Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Natur Wissenschaft
Angewandte Mathematik-Stochastik
Univ. Prof. Dr. Barbara Rüdiger-Mastandrea

Ableitung der Wahrscheinlichkeit für einen unabsichtlichen Verbindungsaufbau im Mobilfunk ("Hosentaschenverwähler")

Auftraggeber: PRANG Interim Management & Consulting

Fallbeschreibung

Eine Studentin fährt mit dem Fahrrad zur Vorlesung. Ihr Handy befindet sich mit anderen persönlichen Sachen in Ihrer textilen Umhängetasche. Sie hat vergessen, die Tastensperre zu aktivieren. Das Tastaturlayout ihres Standard-Handys (kein Slider oder Klapphandy) umfasst 10 Ziffertasten (0-9) plus Stern- und Raute-Taste sowie 3 Funktionstasten (Anrufen, Beenden, Löschen), also insgesamt 15 Tasten. Es wird unterstellt, dass alle Tasten aufgrund Größe und Druckpunkt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gedrückt werden können.
Durch die Bewegung und Erschütterung in der Umhängetasche "wählt" das Handy selbständig eine zufällige Folge von Tasten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Verbindung mit einem Kurzwahldienst ihres Mobilfunkbetreibers zustande kommt. Hierzu sollen exemplarisch folgende Kurzwahlen zugrunde gelegt werden.

44444
22555
11177
22222
55222

Die vom Handy gewählte Ziffernkombination muss mit einer der belegten 5-stelligen Kurzwahlen (s. o.) beginnen, kann sich aber durch eine beliebige Zeichenfolge fortsetzen (Überwahlfähigkeit). Voraussetzung für eine Verbindung ist jedoch zu einem bestimmten Zeitpunkt die Betätigung der Anruf-Taste bei vorherigem Ausschluss der Löschen-Taste bzw. auch der Auflegen-Taste.
Die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Verbindungsaufbau sollte mathematisch sauber dekliniert sein, aber in einer für den Laien nachvollziehbaren Sprache. Am Ende sollte ein Vergleich zur Wahrscheinlichkeit eines 6er im Lotto (6 aus 49) oder anderen gängigen Chancen/Risiken möglich sein.

Lösung

I) Grundlagen :) Einführung in der Kombinatorik

$\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*,\#, Anruf-Taste, Beenden-Taste, Loeschen-Taste\}$ sei Menge der Tasten des Telefons.
Die Wahrscheinlichkeit bei einem Tastendruck zufällig eine gegebene Taste X *aus* Ω zu drücken ist:

$$P(\{X\}) = \frac{1}{|\Omega|} \tag{1}$$

mit $|\Omega|$ = Anzahl Elemente in Ω, d.h. $|\Omega| = 15$. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Tastendruck zufällig eine Taste aus einer Teilmenge A von Ω zu drücken, ist die Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \tag{2}$$

mit $|A|$=Anzahl Element in A

- Bei n zufälligen Tastendrücken ist die Wahrscheinlichkeit
beim 1° Druck eine Taste aus der Menge A_1,
beim 2° Druck eine Taste aus der Menge A_2,
” ”
” ”
” ”
beim n° Druck eine Taste aus der Menge A_n,
zu drücken:

$$P(A_1 \times \ldots \times A_n) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} \times \ldots \times \frac{|A_n|}{\Omega} \tag{3}$$

$$= \frac{|A_1| \times \ldots \times |A_n|}{|\Omega|^n} = \frac{|A_1| \times \ldots \times |A_n|}{15^n} \tag{4}$$

Gegeben eine 5-stellige Kurzwahl (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5). Z.B. $(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5) = (4,4,4,4,4)$, die Wahrscheinlichkeit diese zu wählen ist

$$P(\{X_1\} \times \{X_2\} \times \{X_3\} \times \{X_4\} \times \{X_5\}) = \frac{|\{X_1\}|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\{X_2\}|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\{X_3\}|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\{X_4\}|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\{X_5\}|}{|\Omega|}$$

$$= \left(\frac{1}{15}\right)^5 = 1.3169 \times 10^{-6} \tag{5}$$

II) Lösung der Aufgabe:

Eine erfolgreiche Verbindung ist nach dem n-ten Tastendruck aufgebaut (mit $n \geq 6$), falls folgende Bedingungen gelten:

1. Zuerst eine gegebene 5-stellige Kurzwahl gewählt wird. Z.B. 44444
2. Die n-te gewählte Taste $\{X_n\} = \{Anruf - Taste\}$ ist
3. für $k \in \{6, \ldots, n-1\}$ die k-te gewählte Taste aus der Menge $C = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*,\#\}$ ist.

D.h. die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Verbindung nach n-Tastendrücken ist:

$$\begin{aligned} &P\left(\{X_1\} \times \{X_2\} \times \{X_3\} \times \{X_4\} \times \{X_5\} \times \underbrace{C \times \ldots \times C}_{(n-6)-mal} \times Anruf - Taste\right) \\ &= \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{|C|}{15}\right)^{n-6} \cdot \frac{1}{15} = \left(\frac{1}{15}\right)^6 \cdot \left(\frac{12}{15}\right)^{n-6} \end{aligned} \tag{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Verbindung ist:

$$\sum_{n=6}^{\infty} \left(\frac{1}{15}\right)^6 \left(\frac{12}{15}\right)^{n-6} = 8.7791 \times 10^{-8} \times \sum_{n=6}^{\infty} 0.8^{n-6} \tag{7}$$

$$= 8.7791 \times 10^{-8} \times \frac{1}{1-0.8}$$

$$= \frac{8.7791 \times 10^{-8}}{0.2}$$

$$= 4.3896 \cdot 10^{-7} \tag{8}$$

Exkurs: Geometrische Reihe es gilt: für $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} q^n = \lim_{N \to \infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}. \tag{9}$$

(Bemerkung $q = 0.8$ in Gleichung (7))

III) Vergleich zur Wahrscheinlichkeit eines 6er im Lotto (6 aus 49).

Beim deutschen Lotto werden aus 49 Zahlen 6 angekreuzt. Man gewinnt bei 6 Treffern. Dabei ist es wichtig zu bemerken, daß man nicht die Reihenfolge der angekreuzten Zahlen betrachtet, sondern nur die Zahlen selbst. Die Anzahl der Möglichkeiten dieses zu tun ist:

$$|\Omega_L| = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816 \tag{10}$$

Das Ereignis eines 6er im Lotto zu kreuzen. lautet:

L: "sechs richtige im Lotto" Zu L gehört genau eine Möglichkeit von insgesamt 13.983.816 Möglichkeiten. Damit ist

$$P(L) = \frac{1}{13.983.816} \approx 7.2000 \cdot 10^{-8} \tag{11}$$

die Wahrscheinlichkeit bei einem Tipp genau 6 richtige zu haben.

- Alternative Berechnung

Beim Lotto 6 aus 49 wird eine Kugel nach der anderen aus der Ziehungsmaschine der Lottogesellschaft gezogen, aber die gezogene Kugel wird nach der Ziehung nicht wieder in die Ziehungsmaschine zurückgelegt. Dadurch ist ausgeschlosen, daß eine Zahl mehr als einmal gezogen wird. Das Lottospiel"6 aus 49" kann man, in 6 hintereinander ablaufende Ziehungen (Laplace-Experiment) aufteilen:

1. Ziehung 1 (Z_1)

$$|\Omega_1| = 49 \Rightarrow P(Z_1) = \frac{1}{49}$$

2. Ziehung 2 (Z_2)

$$|\Omega_2| = 48 \Rightarrow P(Z_1) = \frac{1}{48}$$

3. Ziehung 3 (Z_3)

$$|\Omega_3| = 47 \Rightarrow P(Z_1) = \frac{1}{47}$$

4. Ziehung 4 (Z_4)

$$|\Omega_4| = 46 \Rightarrow P(Z_1) = \frac{1}{46}$$

5. Ziehung 5 (Z_5)

$$|\Omega_5| = 45 \Rightarrow P(Z_1) = \frac{1}{45}$$

6. Ziehung 6 (Z_6)

$$|\Omega_6| = 44 \Rightarrow P(Z_1) = \frac{1}{44}.$$

Insgesamt ist

$$
\begin{aligned}
P(L) &= P(Z_1 \textit{ und } Z_2 \textit{ und } Z_2 \textit{ und } Z_4 \textit{ und } Z_5 \textit{ und } Z_6) \times 6! \\
&= P(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_2 \cap Z_4 \cap Z_5 \cap Z_6) \times 720 \\
&= P(Z_1) \times P(Z_2) \times P(Z_3) \times P(Z_4) \times P(Z_5) \times P(Z_6) \times 720 \\
&= \frac{1}{49} \times \frac{1}{48} \times \frac{1}{47} \times \frac{1}{46} \times \frac{1}{45} \times \frac{1}{44} \times 720 \\
&= \frac{1}{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44} = \frac{1}{1.0068 \cdot 10^{10}} \times 720 \\
&= \frac{720}{1.0068 \cdot 10^{10}} = \approx 7.2000 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}
$$

Wobei die Zahl $6! = 720$ bedeutet, dass es genau 720 Möglichkeiten, 6 Zahlen in einer anderen Reihenfolge einzuordnen.

IV) Resultat

Die Wahrscheinlichkeit,
dass eine erfolgreiche Verbindung aufgebaut wird ist $4.3896 \cdot 10^{-7} \approx 4 \cdot 10^{-7}$ d.h. 0,00004 % (siehe Gleichung (8)) und die für einen 6er im Lotto 6 aus 49 ist $7,2000 \cdot 10^{-8} \approx 1 \cdot 10^{-7}$ d.h. 0,00001 % (siehe Gleichung (11)). Somit ist die Wahrscheinlichkeit eine erfolgreiche Verbindung aufzubauen fast gleich wie die für einen 6er im Lotto 6 aus 49, nämlich c.a. eine von 10 Milionen.