

Übungen Elemente der Geometrie

SS 2012 — Serie 1

- 1) a) Wählen Sie Punkte P, Q, R in der Ebene, nicht auf einer Geraden (nicht *kollinear*) und einen weiteren Punkt S beliebig — Skizze! Deuten Sie die Halbebenen PQR^+ (Scheid-Notation) und, falls möglich PRS^- an.
b) Unter welcher Bedingung ist PRS^- definiert, wann nicht?
c) Geben Sie das Dreieck (genauer das Innere) des Dreiecks $\triangle PQR$ als Schnitt von Halbebenen an.
d) Notieren Sie den Rand des Dreiecks $\triangle PQR$ (den *Kantenzug* PQR) in Mengensymbolik (unter Verwendung von Strecken, Halbebenen etc.). Wie lässt sich die Figur beschreiben, die aus dem Inneren und dem Rand des Dreiecks besteht (das sogenannte “abgeschlossene Dreieck”)?
- 2) a) Geben sie je zwei Beispiele konvexer und nichtkonvexer Figuren der Ebene an.
b) Beweisen Sie, dass der Durchschnitt von zwei konvexen Figuren wieder konvex ist.
c) Warum sind Dreiecke stets konvex? Gilt das auch für Vierecke oder gar beliebige n - Ecke (*Polygone*)?
- 3) Betrachten Sie eine Kugeloberfläche \mathcal{S} (*Sphäre*) mit Mittelpunkt M . Ist \mathcal{E} irgendeine Ebene durch M , so heißt $\mathcal{S} \cap \mathcal{E}$ ein *Großkreis* der Sphäre. Ein Großkreis durch je zwei (verschiedene) Punkte A und B auf \mathcal{S} werde hier mit $\tilde{g}_{A,B}$ bezeichnet. $\tilde{g}_{A,B}$ kann in gewissem Sinne als eine sphärische Verallgemeinerung der Geraden angesehen werden. (Können Sie angeben in welchem Sinne?) — Die so definierte Geometrie heißt *sphärische Geometrie*.
a) Überprüfen Sie, welche der Grundeigenschaften von Geraden (G1) bis (G 4) aus der Vorlesung für Großkreise gelten und welche nicht (Bedingungen (1) bis (4) in Scheid/Schwarz: Elemente der Geometrie, Kap I.1 oder Scheid: Geometrie 1. bis 3. Auflage, Kap. II.1; dort in anderer Reihenfolge).
b) Überprüfen Sie, ob das Parallelenaxiom (P) in der sphärischen Geometrie gilt.
c) Versuchen Sie in der sphärischen Geometrie “Halbgeraden” zu definieren. Welche Schwierigkeit tritt auf? Was geschieht beim Versuch “Strecken” in der sphärischen Geometrie analog zur ebenen Geometrie zu definieren?
- 4) Schränken Sie nun die Betrachtung auf eine Hälfte der Sphäre ein. Wählen Sie dazu eine Ebene durch den Mittelpunkt aus, die “Äquatorebene” heißen soll. Betrachten Sie die obere Halbsphäre \mathcal{S}' bezüglich dieser Äquatorebene *ohne* die Punkte auf dem Äquator selbst. Betrachten Sie als “Geraden” die in \mathcal{S}' liegenden Bögen der Großkreise. Überprüfen Sie, welche der Grundeigenschaften von Geraden (G1) bis (G 4) und (P) aus der Vorlesung für Großkreisbögen in \mathcal{S}' gelten.