Grundlagen der Lehre von den Körpern[1]

Zusammenfassung

Obwohl die Stereometrie unter die elementaren mathematischen Disziplinen gerechnet zu werden pflegt, fehlt doch vieles, dass sie als solide behandelt und, wie die ebene Geometrie, in ein sicheres System gebracht einzuschätzen sei. Da nämlich in der ebenen Geometrie nach den Linien und Winkeln hauptsächlich geradlinige Figuren untersucht und ihre Eigenschaften dargelegt werden, welchen der Einfachheit halber der Kreis hinzugefügt zu werden pflegt, so wäre es in der Stereometrie angemessen, nachdem die Grundlagen über die Neigung der Ebenen und die Raumwinkel[2] gelegt sind, die zwischen ebenen Seitenflächen[3] eingeschlossenen Körper zu behandeln und ihre Eigenschaften zu entwickeln, wo es vorzüglich gebührte, diese Körper in bestimmte Klassen einzuteilen, welchen ferner der Einfachheit halber die Kugel mit dem Zylinder und dem Kegel hinzugefügt werden könnte. Allerdings ist in den Elementen der Stereometrie durchaus nichts von einer Einteilung der Körper in bestimmte Klassen nach der Anzahl[4] der Seitenflächen zu finden; sondern es werden nur gewisse Arten hervorgehoben, wie Prismen, Pyramiden und die sogenannten regelmäßigen Körper, alle übrigen beiseite gelassen ohne irgendeine Einteilung und wechselseitige Verbindung. Was jedoch in der ebenen Geometrie höchst einfach war: die geradlinigen Figuren nach der Anzahl der Kanten[5] (welche natürlich stets gleich der Anzahl der Winkel ist) in Klassen einzuteilen — das ist in der Stereometrie, wenn wir unsere Aufmerksamkeit nur auf die zwischen ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper richten, sehr viel mühsamer, da allein die Zahl der Seitenflächen dazu nicht hinreicht. Wenn wir nämlich die Oberfläche[6] dieser Körper betrachten, so werden diese nicht nur von den Seitenflächen begrenzt, sondern auch von Raumwinkeln und den Zusammenstößen je zweier Seitenflächen, die der hochberühmte Autor, in Ermangelung eines geeigneteren und herkömmlichen Namens, *Grate*[7] genannt hat; es ziemt sich unbedingt, dass diese Dinge, welche nicht durch irgendein feststehendes Gesetz untereinander verbunden zu sein scheinen, bei den aufzustellenden Klassen von Körpern in Rechnung gestellt werden — deswegen, weil unter den Körpern derselben Zahl von Seitenflächen eine ungeheure Verschiedenheit betreffend das Verhältnis von Raumwinkeln zu Seitenflächen stattha-

[1]"Elementa doctrinæ solidorum" (Eneström 230), *Novi commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ* 4 (1752/3), 1758, pp.14–17, 109–140.

[2]*angulis solidis.*

[3]*hedris.*

[4]*numerum.* Im Deutschen sollte man strenggenommen zwischen "Anzahl" und "Zahl" unterscheiden; wir verwenden aber von Fall zu Fall beides, da das fast immer gemeinte "Anzahl" oft etwas schwerfällig ist.

[5]*laterum. latus* würde im Kontext der ebenen Geometrie besser mit "Seite" als mit "Kante" übersetzt, doch gäbe dies Anlass zu Verwechslungen mit "Seitenfläche".

[6]*ambitum.*

[7]Euler verwendet hier *acies*, was eigentlich mit "Spitze" zu übersetzen wäre; dies gäbe aber zu leicht Anlass zu Verwechslungen mit den Raumwinkeln. Die Übersetzung "Grat" ist nicht nur eindeutiger, sondern auch dadurch gerechtfertigt, dass in der späteren französischsprachigen Literatur der Terminus *arête* für das, was Euler mit *acies* bezeichnet, verwendet wird.

ben kann, durch welche deren Naturbeschaffenheit stark verändert wird. So werden ein Oktaeder, ein sechseckiges Prisma und eine auf einer siebeneckigen Basis errichtete Pyramide von acht Seitenflächen eingeschlossen, wer wollte jedoch diese so verschiedenen Körper in einer und derselben Klasse vereinigen? Daher hat der hochberühmte Autor drei Merkmale herausgestellt, die besonders zur Einteilung der Körper in Klassen geeignet sind, welches sind: 1. die Zahl der Seitenflächen, 2. die Zahl der Grate und 3. die Zahl der Raumwinkel. Wer dies aufmerksamer untersuchte, würde leicht erkennen, dass zum Durchschauen der natürlichen Beschaffenheit aller möglichen Körper das[8] so nötig ist, dass, wenn es vernachlässigt wird, die Elemente der Stereometrie auf keine Weise solide und wissenschaftlich behandelt werden könnten, weshalb es verwunderlich ist, dass bisher niemand über diese aufzustellenden Grundsätze der Stereometrie nachgedacht hat und dass diese Disziplin kaum jemals über die Grenzen Euklids hinaus etwas vorangetrieben wurde, obwohl doch alle Geometer sehr mit diesem Studium beschäftigt waren. Allerdings ist die Entwicklung der besagten Merkmale viel schwieriger als es auf den ersten Blick scheint. Es stellt sich nämlich heraus, dass sie durch ein bestimmtes Gesetz untereinander verbunden sind, dessen Grund so versteckt zu sein scheint, dass der Autor es zunächst ohne Beweis, allein auf Induktion gestützt, angeführt hat, und darauf erst nach mehreren Versuchen sich des Beweises vollends bemächtigt habe, welchen er in einer anschließenden Abhandlung besonders darstellen wolle. Diese Wahrheit jedoch, so schwierig bewiesen, besteht darin, dass bei jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper das Aggregat aus der Anzahl der Seitenflächen und der Anzahl der Raumwinkel immer um zwei die Anzahl der Grate überschreitet; diese Aussage entspricht der, nach welcher in der ebenen Geometrie die Anzahl der Winkel einer jeden geradlinigen Figur der Anzahl der Kanten gleich ist. Und wie diese die Grundlage der Kenntnis der Figuren enthält, so ist zu vermuten, dass jene in der Stereometrie die ersten Grundsätze der Kenntnis der Körper umfasst. Wenn also bei einem Körper zwei der besagten Merkmale bekannt wären, so wird der dritte sogleich daraus auf das leichteste bekannt. Wenn nämlich die Anzahl der Raumwinkel $= S$ wäre, die Anzahl der Grate $= A$ und die Anzahl der Seitenflächen $= H$, so gilt stets $S + H = A + 2$, und daraus $S = A + 2 - H$ oder $H = A + 2 - S$ oder $A = S + H - 2$, und diese Einfachheit des Verhältnisses scheint ob der Schwierigkeit des Beweises sehr bewundernswert.[9] Ferner wie es eine vorzügliche Eigenschaft der ebenen Figuren ist, dass alle Winkel zusammengenommen gleich sind zweimal so vielen Rechten, wie es Winkel sind, weniger vier, so zeigt der Autor auch eine gewissermaßen ähnliche Eigenschaft der zwischen ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper, welche um die Winkel der einzelnen Seitenflächen kreist, deren aller Summe immer gleich ist viermal so vielen Rechten, wie es im Körper Raumwinkel gibt, abzüglich acht. Ausserdem sehen wir, dass viele andere ausgezeichnete Eigenschaften solcher Körper bekannt gemacht werden, aus der Anzahl der Kanten der Seitenflächen entnommen, sie seien Dreiecke oder Vierecke oder Fünfecke und so weiter, woraus der Autor schließt, dass allein aus sechseckigen Seitenflächen, oder solchen von noch mehr Winkeln, kein Körper konstruiert werden kann. Aus diesen befestigten Grundsätzen

[8] Diese Übersetzung geht davon aus, dass *ea* Subjekt des AcI ist und der Singular bei *necessariam* ein vom Deutschen her verständlicher Lapsus ist.

[9] Die von Euler verwendeten Buchstaben erklären sich aus den lateinischen Termini: "Raumwinkel" = *angulus solidus*, "Grat" = *acies*, "Seitenfläche" = *hedra*.

fließen endlich Klassen und Arten von Körpern und ihrer vorzüglichen Eigenschaften, welche dem reichhaltigeren Ausbau dieser Lehre ein sehr weites Feld eröffnen, weil ja daraus ein vollständiges System der Stereometrie erbaut werden könnte.

---

1. Wie die Geometrie um die Betrachtung ebener Figuren kreist und, was von den Linien und Winkeln in ihr behandelt wird, zu ihren Grundlagen zu rechnen ist, so ist die Stereometrie mit der Betrachtung der Körper befasst, und was dort von der Neigung der Ebenen und den Raumwinkeln erklärt wird, ist ebenso gleichsam als ihre Grundlage zu betrachten.

2. Ein Körper ist in drei Dimensionen ausgedehnt und von allen Seiten begrenzt, und ebenso wird eine Fläche[10] definiert durch die Ausdehnung in nur zwei Dimensionen. Die Körper jedoch sind in zwei Klassen einzuteilen, je nachdem ob ihre Oberfläche von sei es ebenen, sei es konvexen oder konkaven Figuren eingeschlossen wird.

3. Ich habe mich entschlossen, hier nur die Klasse von Körpern zu betrachten, die von allen Seiten von ebenen Figuren begrenzt werden, ebenso, wie auch die Geometrie von den geradlinigen Figuren her beginnt; und so, wie mehrere ausgezeichnete Eigenschaften der geradlinigen Figuren im allgemeinen bekannt sind, werde ich versuchen, einige allgemeine Eigenschaften der Körper dieser Klasse zu ermitteln.

4. Obwohl jedoch die Stereometrie schon als sorgfältig genug ausgearbeitet angesehen wird und in dieser außer der Theorie der Neigung von Ebenen und Raumwinkeln die Bildung mehrerer Körper und vornehmlich der regelmäßigen Körper gelehrt zu werden pflegt, sind dennoch überall feste Grundlagen dieser Lehre von den Körpern zu wünschen, aus welchen derartig die Natur der Körper im allgemeinen erkannt werden könnte.

5. Also muss die Betrachtung der Körper auf ihre Oberfläche gerichtet werden: wenn nämlich die Oberfläche bekannt ist, von welcher ein Körper von allen Seiten eingeschlossen wird, kennt man den Körper selbst auf ähnliche Weise, wie die Beschaffenheit jeder ebenen Figur aus ihrem Rand definiert zu werden pflegt.

6. Zur Oberfläche eines jeden von ebenen Figuren eingeschlossenen Körpers jedoch gehören

erstens: die ebenen Figuren, die seine Oberfläche bilden, selbst, welche *Seitenflächen* genannt werden;

zweitens: der Zusammenlauf zweier Seitenflächen nach den Kanten, aus welchen die linearen Begrenzungen des Körpers hervorgehen; diese Grenzen werde

[10] *superficies.*

ich, nachdem ich bei den Autoren der Stereometrie keinen eigenen Namen finde, *Grate* nennen;

drittens: die Punkte, in welchen drei oder mehr Seitenflächen zusammenlaufen; diese Punkte werden *Raumwinkel* genannt.

7. Grenzen von drei Arten sind also bei jedwedem Körper zu betrachten; nämlich 1.) Punkte, 2.) Linien, 3.) Flächen; oder die zu diesem Vorhaben geeigneten Namen nutzend: 1.) Raumwinkel, 2.) Grate und 3.) Seitenflächen. Und durch diese Grenzen von drei Arten wird der ganze Körper bestimmt. Eine ebene Figur jedoch hat nur Grenzen von zwei Arten, durch welche sie bestimmt wird, 1.) nämlich Punkte oder Winkel, 2.) Linien oder Kanten.

8. Als Beispiel sei der keilförmige Körper $ABCDEF$ vorgeschlagen (Fig. 1), dessen Grenzen erster Art oder Raumwinkel sechs an der Zahl sind: A, B, C, D, E, F. Die linearen Grenzen der zweiten Art oder Grate sind neun an der Zahl: AB, BC, CD, DA, AE, DE, BF, CF, EF. Die Grenzen der dritten Art oder Seitenflächen endlich sind fünf, natürlich $ABCD$, $ABEF$, ADE, $CDEF$, BCF.

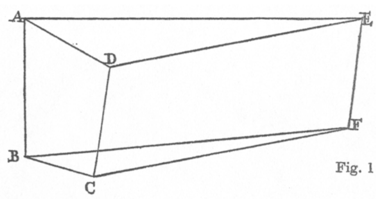


Fig. 1

9. Also entspringt die ganze Verschiedenheit der Körper sowohl aus der Zahl der Raumwinkel als auch der Grate und der Seitenflächen. Die gebräuchlichen Bezeichnungen der Körper jedoch pflegen aus der Zahl der Seitenflächen entnommen zu werden, wovon bekannt sind die Namen Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder, auch wenn diese nur den regelmäßigen Körpern zugeteilt zu werden pflegen. Im allgemeinen nämlich wird durch den Namen Polyeder irgendein regelmäßiger oder unregelmäßiger Körper bezeichnet, der von einer bestimmten Zahl von Seitenflächen eingeschlossen wird.

10. Wenn wir auf ähnliche Weise verschiedene Arten von Körpern aus der Anzahl der Raumwinkel definieren wollten, wären ihre Namen Viereck, Fünfeck, Sechseck, Siebeneck etc. Und der oben betrachtete keilförmige Körper wäre auf diese Weise Sechseck zu nennen; nach der Zahl der Seitenflächen ist er ein Pentaeder.

11. Weil nun allerdings die Körper, welche von der gleichen Zahl von Seitenflächen eingeschlossen werden, sich betreffend der Zahl der Raumwinkel unterscheiden können, wäre es genehm, um sie untereinander sorgfältiger zu unterscheiden, für jeden einzelnen eine Benennung sowohl von der Zahl der Seitenflächen wie von der Zahl der Raumwinkel her zu suchen. So wird der oben betrachtete keilförmige Körper *sechseckiges Pentaeder* genannt, die dreieckige Pyramide wäre das *viereckige Tetraeder*, das dreieckige Prisma das *sechseckige Pentaeder*, das Parallelepiped allerdings das *achteckige Hexaeder* und so weiter.

12. Also: wenn es auch zur Bezeichnung der Art einer geradlinigen ebenen Figur genügt, die Zahl der Kanten zu erinnern, durch welche die Figur eingeschlossen wird, weil ja die Zahl der Winkel immer der Zahl der Kanten gleich ist, so kann dennoch bei den Körpern die Zahl der Raumwinkel von der Zahl der Seitenflächen abweichen, weshalb es nötig ist, beide Zahlen zu benennen. So wird die viereckige Pyramide ebenso durch fünf Seitenflächen eingeschlossen wie das dreieckige Prisma, aber jene hat nur fünf Raumwinkel, während dieses sechs hat.

13. Zur Herstellung der allgemeinen Körper wäre es allerdings überflüssig, außer der Zahlen der Seitenflächen und der Raumwinkel obendrein die Zahl der Grate hinzuzufügen, da ja, wie ich demnächst zeigen werde, die Zahl der Grate stets aus der Zahl der Seitenflächen und Raumwinkel bestimmt wird, so dass, wenn sowohl die Zahl der Seitenflächen als auch die Zahl der Raumwinkel gegeben wäre, daraus zugleich die Zahl der Grate jedes Körpers bekannt wäre.

14. Höhere Unterschiede der Körper sind aufzusuchen sowohl aus der Naturbeschaffenheit der Seitenflächen oder Anzahl der Kanten, von welchen jede Seitenfläche eingeschlossen ist, als auch allerdings aus der Naturbeschaffenheit der Raumwinkel, je nachdem jeder entweder aus drei oder aus mehr ebenen Winkeln gebildet ist. Aus weniger als drei ebenen Winkeln kann ein Raumwinkel nämlich nicht bestehen; mehr jedoch können in beliebig großer Zahl zur Herstellung eines Raumwinkels zusammenlaufen, solange ihrer aller Summe kleiner als vier Rechte ist.

15. Sind alle Seitenflächen gegeben, durch welche irgendein Körper eingeschlossen wird, so ist sofort die Zahl aller Kanten, die sämtliche Seitenflächen einschließen, zu erkennen, und diese Zahl ist gleich der Zahl aller ebenen Winkel, die in sämtlichen Seitenflächen zu finden sind, weil in einer beliebigen Seitenfläche die Zahl der Winkel gleich ist der Zahl der Kanten.[11]

16. Ferner kann auch die Summe aller ebenen Winkel leicht ermittelt werden, deswegen weil bei jeder Seitenfläche die Zahl all seiner Winkel aus der Zahl der Kanten derselben bestimmt wird. Wie viele Kanten nämlich irgendeine Seitenfläche auch habe, die Summe all ihrer Winkel wird, wie es feststeht, gleich sein zwei mal so vielen rechten Winkeln, wie es Kanten gibt, weniger vier.

17. Zur Bestimmung des Körpers können also, außer den Anzahlen der Raumwinkel, Grate und Seitenflächen, welche Dinge eigentlich zur Oberfläche des Körpers gehören, bequem auch zum einen die Anzahl aller Kanten oder, was ihr gleich ist, die Anzahl aller ebenen Winkel, besonders allerdings auch die Summe aller ihrer ebenen Winkel herangezogen werden.

[11] Hier wird offenbar jeder Grat doppelt gezählt. S.u. Proposition 1.

18. Aus dem Zusammentragen dieser fünf Dinge, welche bei jedem beliebigen Körper zu betrachten sind, kann man mehrere ausgezeichnete allgemeine Eigenschaften der Körper erhalten, welche denjenigen Eigenschaften ähnlich sind, die von den ebenen geradlinigen Figuren allgemein erwähnt zu werden pflegen. Die Zahl dieser Dinge jedoch, welche wir bei den Körpern betrachten, ist größer und wird uns auch mehr allgemeine Eigenschaften verschaffen, als man bei den ebenen Figuren findet.

19. Da diese Eigenschaften so leicht niemand derer, die die Sterometrie behandelt haben, berührt hat, werde ich mich damit beschäftigen, auf dass ich, wenn nicht alle, so doch die vorzüglichen bekannt machen und durch Beweise bestätigen möge. Was umso nützlicher zu sein scheint, als ohne die Kenntnis dieser Eigenschaften die Lehre von den Körpern keineswegs mit Erfolg behandelt werden könnte.

20. Mit um so größerem Recht wird es erstaunlich scheinen, dass, während die Grundlagen der ebenen Geometrie schon seit so langer Zeit mit aller Sorge ausgearbeitet und deutlich dargestellt sind, die Grundlagen der Stereometrie von so großer Finsternis eingeschlossen sind und sich niemand gefunden hat, der versucht hätte, diese ans Licht zu ziehen.

Proposition 1

21. *Bei einem beliebigen Körper ist die Zahl aller Grate die Hälfte der Zahl aller ebenen Winkel, die in sämtlichen Seitenflächen gefunden werden, aus denen seine Oberfläche besteht.*

Beweis

Jeder beliebige Grat der Oberfläche eines Körpers wird von zwei Kanten zweier Seitenflächen gebildet, und da unter allen Kanten sämtlicher Seitenflächen je zwei zusammengenommen je einen Grat bilden, steht fest, dass die Zahl aller Grate die Hälfte der Zahl aller Kanten ist. Aber die Zahl aller Kanten ist doch gleich der Zahl aller ebenen Winkel, da ja jede beliebige Seitenfläche so viele Winkel wie Kanten hat. Also ist auch die Zahl aller Grate die Hälfte der Zahl aller ebenen Winkel, die in sämtlichen Seitenflächen gefunden werden, aus denen die Oberfläche des Körpers besteht. W. z. b. w.

Korollar 1

22. Da die Zahl der Grate nicht gebrochen sein kann, ist es offenbar, dass die Zahl aller Kanten oder aller ebenen Winkel immer gerade sein muss; und die Hälfte dieser Zahl wird die Zahl der Grate geben, welche auf der Oberfläche des Körpers aufgefunden werden.

Korollar 2

23. Wenn also alle Seitenflächen, aus denen die Oberfläche des Körpers besteht, Dreiecke wären, so wäre deren Zahl notwendig gerade; wenn die Zahl dieser Seitenflächen nämlich ungerade wäre, dann wäre auch die Zahl der ebenen Winkel ungerade — was nicht geschehen kann. Ebensolches ist festzuhalten von allen Seitenflächen, die Vielecke mit einer ungeraden Anzahl von Kanten sind; wenn nämlich je eine Seitenfläche ein Dreieck oder Fünfeck oder ein Siebeneck etc. wäre, so muss deren Anzahl immer gerade sein.

Korollar 3

24. Wenn unter den Seitenflächen, aus denen irgend ein Körper besteht, die Zahl derer, die Vierecke oder Sechsecke oder Achtecke oder Vielecke mit irgendeiner geraden Anzahl von Kanten sind, $= m$ ist, die Zahl derer hingegen, die Dreiecke oder Fünfecke oder Siebenecke oder Vielecke mit irgendeiner ungeraden Anzahl von Kanten sind, $= n$, so dass die Zahl aller Seitenflächen $= m + n$ ist, dann muss n eine gerade Zahl sein. Was allerdings die Zahl m anbelangt, so ist es gleich, ob sie gerade oder ungerade ist.

Korollar 4

25. Wenn also die Oberfläche des ganzen Körpers aus a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, d Sechsecken, e Siebenecken etc. bestünde, so wäre die Zahl aller Seitenflächen $= a + b + c + d + e +$ etc. Die Zahl aller ebenen Winkel beziehungsweise Kanten hingegen wäre $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e +$ etc. Die Zahl aller zur Oberfläche des Körpers gehörigen Grate jedoch wäre

$$= \frac{3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.}}{2},$$

weshalb die Zahl $a + c + e +$ etc. gerade sein muss.

Proposition 2

26. *Die Zahl aller ebenen Winkel ist größer oder gleich dreimal der Zahl aller Seitenflächen. Anders gesagt, die Zahl der ebenen Winkel kann niemals kleiner sein als das Dreifache der Zahl der Seitenflächen, aus denen die Oberfläche irgendeines Körpers besteht.*

Beweis

Alle Seitenflächen sind entweder Dreiecke oder Figuren mit mehr als drei Kanten; wenn alle Seitenflächen Dreiecke sind, ist die Zahl der Kanten oder der ebenen Winkel dreimal größer als die Zahl der Seitenflächen; wenn jedoch entweder alle oder doch einige der Seitenflächen mehr als drei Winkel haben, dann ist auch die Zahl der ebenen Winkel größer als das Dreifache die Zahl der Seitenflächen. Stets ist also die Zahl aller ebenen Winkel größer oder gleich dreimal der Zahl der Seitenflächen, und kann ebenso niemals kleiner sein. W. z. b. w.

Korollar 1

27. Wenn also alle Seitenflächen dreieckig sind, ist die Zahl der ebenen Winkel gleich dem Dreifachen der Zahl der Seitenflächen; wenn jedoch nicht alle Seitenflächen dreieckig sind, sondern Figuren mit mehr als drei Kanten, dann ist die Zahl der ebenen Winkel größer als das Dreifache der Zahl der Seitenflächen.

Korollar 2

28. Wenn also bei irgendeinem Körper die Zahl der Seitenflächen $= H$ gesetzt wird und die Zahl der Grate $= A$, so wäre, da ja die Zahl der ebenen Winkel $= 2A$ ist, entweder $2A = 3H$ oder $2A > 3H$. Es ist also unmöglich, dass $2A < 3H$ ist.

Korollar 3

29. Diese Bezeichnungen beibehaltend, gibt es keinen Körper, bei welchem $A < \frac{3}{2}H$ oder $H > \frac{2}{3}A$ ist. Obgleich jedoch hieraus das Verhältnis zwischen der Zahl der Seitenflächen und der Zahl der Grate nicht bestimmt ist, werden dennoch sehr viele Verhältnisse ausgeschlossen, die niemals statthaben können.

Proposition 3

30. *Die Zahl aller ebenen Winkel, die auf der Oberfläche irgendeines Körpers existieren, ist größer oder gleich dreimal der Zahl aller Raumwinkel. Anders gesagt, die Zahl der ebenen Winkel kann niemals kleiner sein als das Dreifache der Zahl der Raumwinkel.*

Beweis

Jeder beliebige Raumwinkel wird entweder aus drei ebenen Winkeln oder aus mehr als drei gebildet, weniger nämlich als drei ebene Winkel können keinen Raumwinkel bilden. Daher, wenn alle Raumwinkel aus drei ebenen Winkel gebildet werden, muss die Zahl der ebenen Winkel dreimal größer sein als die Zahl der Raumwinkel; wenn jedoch bei der Bildung einiger Raumwinkel mehr als drei ebene Winkel zusammengefügt werden, so ist auch die Zahl der ebenen

Winkel größer als die Zahl der Raumwinkel[12], weniger kann es jedoch niemals sein. W. z. b. w.

Korollar 1

31. Wenn die Zahl der Raumwinkel $= S$ gesetzt wird, die Zahl der Grate hingegen $= A$, so ist für einen beliebigen Körper, da ja die Zahl aller ebenen Winkel $= 2A$ ist, immer entweder $2A = 3S$ oder $2A > 3S$.

Korollar 2

32. Es kann also nicht geschehen, dass jemals $2A < 3S$ beziehungsweise $A < \frac{3}{2}S$ beziehungsweise $S > \frac{2}{3}A$ sei. Daher, wenn außerdem die Zahl der Seitenflächen $= H$ gesetzt wird, kann weder diese Zahl H noch die Zahl S größer als $\frac{2}{3}A$ sein.

Proposition 4

33. *Bei jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper überschreitet die Summe der Zahl der Raumwinkel und der Zahl der Seitenflächen die Zahl der Grate um zwei.*

Beweis

Wenn wir wie bisher setzen:

$$\begin{array}{lcl} \text{Zahl der Raumwinkel} & = & S, \\ \text{Zahl der Grate} & = & A, \\ \text{Zahl der Seitenflächen} & = & H, \\ \text{so ist zu zeigen } S+H & = & A+2. \end{array}$$

Ich bin freilich gezwungen zu bekennen, dass ich bisher keinen zuverlässigen Beweis dieses Satzes habe erbringen können; inzwischen ist jedoch seine Wahrheit für alle Arten von Körpern, bei welchen sie untersucht wird, nicht schwierig zu erkennen, so dass die folgende Induktion die Rolle eines Beweises spielen kann.

[12]Gemeint ist natürlich: als das Dreifache dieser Zahl.

1. Betrachten wir also zunächst (Fig. 2) eine beliebige Pyramide, die über einer Basis $ABCDEFG$ mit beliebig vielen Kanten errichtet ist und in der Spitze H ausläuft. Sei die Zahl der Kanten der Basis $= m$; ebenso viele Dreiecke erheben sich von der Basis bis zur Spitze. Also wird diese Pyramide von $m+1$ Seitenflächen eingeschlossen, wovon m Dreiecke sind, eine allerdings ein Vieleck mit m Winkeln beziehungsweise Kanten. So ist also die Zahl der Seitenflächen $H = m+1$, und die Zahl der Raumwinkel ist ebenfalls $S = m+1$. Ferner ist die Zahl aller ebenen Winkel $= 3m + m = 4m$, weshalb die Zahl der Grate $A = 2m$ ist. Da also $H + S = 2m + 2$ ist, ist in diesem Fall durchaus $H + S = A + 2$.

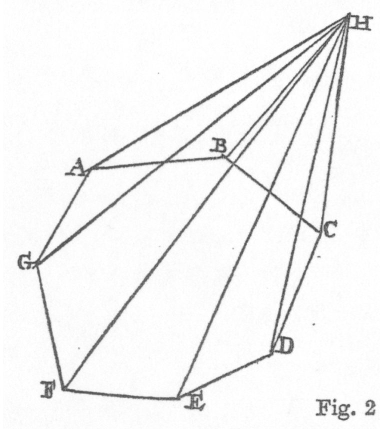


Fig. 2

2. Sei ein keilförmiger Körper gegeben (Fig. 1), der von einer Basis mit beliebig vielen Kanten $ABCD$ in einen Grat EF ausläuft. Die Basis sei ein Vieleck von m Kanten, dann ist die Zahl der Raumwinkel um zwei größer, also $S = m + 2$. Ferner sind außer der Basis selbst ebenso viele Seitenflächen vorhanden, wie die Basis Kanten hat, weswegen die Zahl aller Seitenflächen $H = m + 1$ ist, und unter diesen Seitenflächen ist eine, nämlich die Basis, ein Vieleck mit m Kanten, die übrigen sind Dreiecke, zwei ausgenommen, die Vierecke sein müssen und durch deren Zusammenlaufen der Grat EF entsteht; außer der Basis mit m Kanten gibt es also $m - 2$ Dreiecke und 2 Vierecke, wonach die Zahl aller Kanten beziehungsweise ebenen Winkel

$$= m + 3(m-2) + 2 \cdot 4 = 4m + 2$$

ist, und daraus geht die Zahl der Grate $A = 2m + 1$ hervor. Da nun $H + S = 2m + 3$ ist, ist $H + S = A + 2$.

3. Gegeben sei ein Körper (Fig.3) einem Kasten oder einer Kiste ähnlich, zwischen zwei Basen $ABCD$ und $EFGH$ enthalten, jede der beiden Basen jedoch möge dieselbe Zahl von Kanten m haben, und die Zahl der Raumwinkel ist $S = 2m$. Ferner sind außer diesen zwei Basen alle Seitenflächen Vierecke, und zwar m an der Zahl; also ist die Zahl aller Seitenflächen

$$H = m + 2.$$

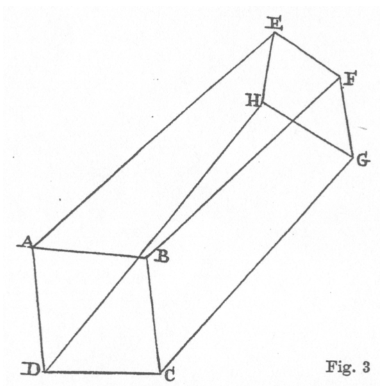


Fig. 3

Die Zahl der ebenen Winkel jedoch ist, da es zwei Seitenflächen mit m Kanten und m Seitenflächen mit vier Kanten gibt, =

$2m + 4m = 6m$, und daher wird die Zahl der Grate erschlossen als $A = 3m$. Daher, weil

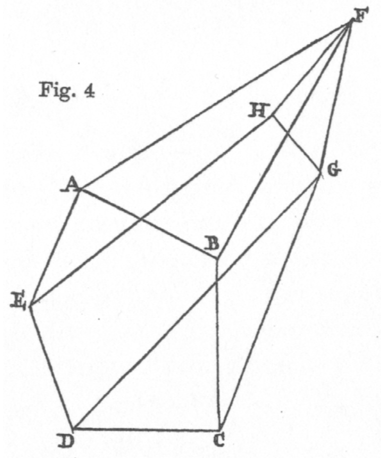
$$H + S = 3m + 2$$

ist, ist von neuem

$$H + S = A + 2.$$

4. Sei erneut ein Körper mit zwei Basen $ABCDE$ und FGH gegeben, die jedoch nicht dieselbe Zahl von Kanten haben mögen (Fig. 4). Sei also für die eine Basis $ABCDE$ die Zahl der Kanten größer, $= m + n$, für die andere Basis FGH jedoch die Zahl der Kanten $= m$; dann ist die Zahl der Raumwinkel $= m + n + m$, also $S = 2m + n$. Dann gibt es außer den zwei Basen so viele Seitenflächen, wie diejenige der zwei Basen Kanten hat, welche die größere Zahl von Kanten hat, also $m+n$, wonach die Zahl aller Seitenflächen $H = m + n + 2$ ist; da von diesen die eine Basis $m+n$ Kanten hat, die andere m, unter den übrigen Seitenflächen jedoch, derer es $m + n$ gibt, so viele Vierecke sein müssen, wie die Basis FGH Kanten hat, nämlich m, die anderen aber, deren Zahl n ist, Dreiecke sind, ist die Zahl aller ebenen Winkel

Fig. 4



$$= m + n + m + 4m + 3n = 6m + 4n;$$

die Zahl der Grate ist $A = 3m + 2n$. Da nun $H + S = 3m + 2n + 2$ ist, ist wiederum $H + S = A + 2$.

5. Sei erneut ein Körper gegeben (Fig. 5), der von zwei Basen $ABCD$ und LMN begrenzt ist, jedoch um die Mitte herum Raumwinkel E, F, G, H, I, K

habe.[13] Sei die Zahl der Kanten der Basis $ABCD = m$, der Basis $LMN = n$, die Zahl der Raumwinkel um die Mitte herum jedoch $= p$, welche größer als m und als n sei. Die Zahl aller Raumwinkel ist also $S = m + n + p$. Dann sind von den mittleren Raumwinkeln zur Basis $ABCD$ Seitenflächen gerichtet[14], p an der Zahl, von denen m Vierecke sind, die übrigen $p - m$ Dreiecke; auf ähnliche Weise sind zu der anderen Basis LMN Seitenflächen gerichtet, auch p an der Zahl, von denen n Vierecke, die übrigen $p - n$ jedoch Dreiecke sind, so dass, die beiden Basen hinzugenommen, die Zahl aller Seitenflächen $= 2 + p + p$ beziehungsweise $H = 2p + 2$ ist. Da eine von diesen m Kanten hat, die andere n Kanten, und die Zahl der Vierecke $= m + n$ ist, die der Dreiecke $= 2p - m - n$, ist die Zahl aller ebenen Winkel

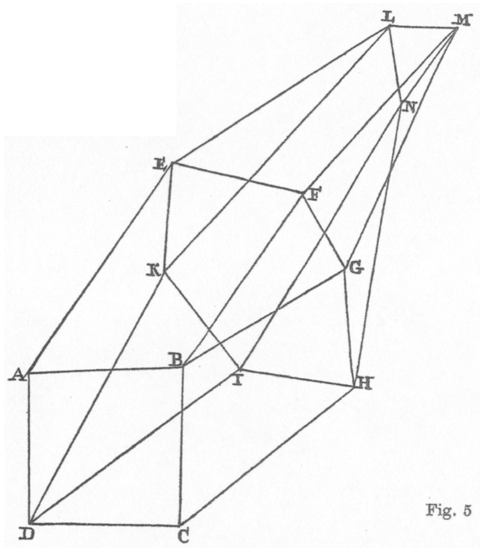


Fig. 5

$$= m + n + 4(m + n) + 3(2p - m - n) = 6p + 2m + 2n,$$

und daraus geht hervor, dass die Zahl der Grate $A = 3p + m + n$ ist. Da $H + S = 3p + m + n + 2$ ist, ist von neuem $H + S = A + 2$.

6. Gegeben dasselbe wie im vorangehenden Fall, seien nun $m > p$ und $p > n$; wie zuvor ist die Zahl der Raumwinkel $S = m+n+p$. Von der Basis $ABCD$ sind nun jedoch m Seitenflächen zu den mittleren Raumwinkeln gerichtet, von denen p Vierecke und $m - p$ Dreiecke sind. Von den mittleren Winkeln zur anderen Basis LMN jedoch sind p Seitenflächen gerichtet, von denen n Vierecke und $p - n$ Dreiecke sind. Daher ist also die Zahl aller Seitenflächen $= 2 + m + p$ oder $H = m + p + 2$, und von diesen Seitenflächen hat eine m Kanten, eine andere n Kanten, $p + n$ sind Vierecke und $m - p + p - n$ oder $m - n$ sind Dreiecke. Daher ist die Zahl aller ebenen Winkel

$$= m + n + 4(p + n) + 3(m - n) = 4p + 4m + 2n,$$

und somit die Zahl der Grate $A = 2p + 2m + n$. Da

$$H + S = 2p + 2m + n + 2$$

ist, ist $H + S = A + 2$.

[13] In der Zeichnung ist das Rechteck $GHMN$ verdreht, also keine ebene Seitenfläche. Man begegnet im 18. Jh. häufig dem Phänomen, dass die Drucker den Anforderungen ihrer Autoren beim Satz von mathematischen Formeln und Graphiken nicht gerecht wurden.

[14] *dirigentur.* Hier ist nicht an den späteren Begriff der Orientierung gedacht.

7. Wenn die Zahl der mittleren Raumwinkel p kleiner ist als beide Zahlen m und n, so ist gewiss wie zuvor die Zahl der Raumwinkel

$$S = m + n + p.$$

Aber nun sind von der Basis $ABCD$ zu den mittleren Winkeln m Seitenflächen gerichtet, von der anderen Basis aber n Seitenflächen, und jeweils p davon sind Vierecke, $m - p$ aus jenem Teil aber und $n - p$ aus diesem Teil sind Dreiecke. Daher ist die Zahl aller Seitenflächen $= 2 + m + n$ oder $H = m + n + 2$; die Zahl der ebenen Winkel jedoch ist

$$= m + n + 4 \cdot 2p + 3(m + n - 2p) = 2p + 4m + 4n.$$

Daraus geht hervor, dass die Zahl der Grate $A = p + 2m + 2n$ ist; und da $H + S = 2m + 2n + p + 2$ ist, ist $H + S = A + 2$.

8. Wenn auch dies genügen könnte, die Wahrheit des Satzes unumstößlich darzutun, beliebt es dennoch, diese außerdem mit den regelmäßigen Körpern zu bestätigen. Für das Tetraeder ist die Zahl der Seitenflächen gewiss $H = 4$; da diese Dreiecke sind, ist die Zahl aller ebenen Winkel $= 12$ und daher die Zahl der Grate $A = 6$, und weil die Raumwinkel einzig aus drei ebenen Winkeln bestehen, ist deren Zahl $S = \frac{12}{3} = 4$: Daher $H + S = 8 = A + 2$. Für das Hexaeder ist $H = 6$, und weil die Seitenflächen einzig Vierecke sind, ist die Zahl der ebenen Winkel $= 24$ und daher die Zahl der Grate $A = 12$: und da ein Raumwinkel aus drei ebenen Winkeln besteht, ist die Zahl der Raumwinkel $S = \frac{24}{3} = 8$, und so $H + S = 14 = A + 2$. Für das Oktaeder ist $H = 8$; da dessen Seitenflächen Dreiecke sind, ist die Zahl der ebenen Winkel $= 24$ und daher die Zahl der Grate $A = 12$, und da vier ebene Winkel einen Raumwinkel bilden, ist die Zahl der Raumwinkel $S = \frac{24}{4} = 6$, und so $H + S = 14 = A + 2$.

Für das Dodekaeder ist $H = 12$; da dessen Seitenflächen Fünfecke sind, ist die Zahl der ebenen Winkel $= 5 \cdot 12 = 60$ und daher die Zahl der Grate $A = 30$. Weil ferner drei ebene Winkel zu einem Raumwinkel zusammenlaufen, ist die Zahl der Raumwinkel $S = 20$, also $H + S = 32 = A + 2$. Für das Ikosaeder ist $H = 20$; da dessen Seitenflächen Dreiecke sind, ist die Zahl der ebenen Winkel $= 60$ und die Zahl der Grate $A = 30$. Dann aber, weil die Raumwinkel einzig aus fünf ebenen Winkeln bestehen, ist ihre Zahl $S = 12$ und daher $H + S = 32 = A + 2$.

Da also die Wahrheit des Satzes in all diesen Fällen aus sich heraus feststeht, ist kein Zweifel, dass sie überhaupt bei allen Körpern statthabe, und so scheint der Satz genügend bewiesen.

Korollar 1

34. Wenn also die Zahl der Raumwinkel S und die Zahl der Seitenflächen H irgendeines Körpers gegeben ist, so ist daraus sofort die Zahl der Grate A zu erkennen, da $A = H + S - 2$ ist.

Korollar 2

35. Sind jedoch die Zahl der Raumwinkel S und die Zahl der Grate A irgendeines Körpers gegeben, so ist daraus leicht die Zahl der Seitenflächen H zu entnehmen, da $H = A - S + 2$ ist.

Korollar 3

36. Sind jedoch die Zahl der Seitenflächen H und die Zahl der Grate A irgendeines Körpers gegeben, so ist daraus leicht die Zahl der Raumwinkel S zu finden, weil $S = A - H + 2$ ist.

Proposition 5

37. *Es kann kein Körper existieren, bei dem die Zahl der Grate um sechs erhöht größer ist als entweder das Dreifache der Zahl der Seitenflächen oder das Dreifache der Zahl der Raumwinkel.*

Beweis

Sei die Zahl der Grate $= A$, die Zahl der Seitenflächen $= H$ und die Zahl der Raumwinkel $= S$, und wir haben oben gesehen, dass es nicht geschehen kann, dass entweder

$$3H > 2A \quad \text{oder} \quad 3S > 2A,$$

also sind diese Formeln $3H > 2A$ und $3S > 2A$ unmöglich. Nun jedoch sehen wir, dass

$$H + S = A + 2 \quad \text{beziehungsweise} \quad H = A - S + 2 \quad \text{und} \quad S = A - H + 2,$$

und diese Werte, in jene unmöglichen Formeln eingesetzt, ergeben die folgenden unmöglichen Formeln:

$$3A - 3S + 6 > 2A \quad \text{und} \quad 3A - 3H + 6 > 2A,$$

die auf diese hinauslaufen:

$$A + 6 > 3S \quad \text{und} \quad A + 6 > 3H.$$

Daraus steht fest, dass es nicht geschehen kann, dass die Zahl der Grate um sechs erhöht größer ist als entweder das Dreifache der Zahl der Seitenflächen oder das Dreifache der Zahl der Raumwinkel. W. z. b. w.

Korollar 1

38. Also ist bei jedem Körper entweder $A + 6 = 3H$ oder $A + 6 < 3H$, und in ähnlicher Weise ist entweder $A + 6 = 3S$ oder $A + 6 < 3S$. Oder wenn angenommen wird, dass α, β, γ, δ positive Zahlen bezeichnen, die Null[15] nicht ausgenommen, so ist

$$A + 6 + \alpha = 3H \quad \text{und} \quad A + 6 + \beta = 3S.$$

Korollar 2

39. Dann aber, weil immer entweder $A = \frac{3}{2}S$ oder $A > \frac{3}{2}S$, ebenso entweder $A = \frac{3}{2}H$ oder $A > \frac{3}{2}H$ ist, ist in ähnlicher Weise

$$A = \frac{3}{2}H + \gamma \quad \text{und} \quad A = \frac{3}{2}S + \delta,$$

wo γ und δ, wie zuvor α und β, keine negativen Zahlen sein können.

Korollar 3

40. Werden diese letzteren Werte in die vorangehenden Gleichungen eingesetzt, so gehen diese Gleichungen hervor:

$$\frac{3}{2}H + 6 + \alpha + \gamma = 3H \quad \text{und} \quad \frac{3}{2}S + 6 + \beta + \delta = 3S$$

beziehungsweise

$$4 + \frac{2}{3}(\alpha + \gamma) = H \quad \text{und} \quad 4 + \frac{2}{3}(\beta + \delta) = S,$$

woraus offenbar ist, dass weder die Zahl der Seitenflächen noch die Zahl der Raumwinkel kleiner als vier sein kann.

Korollar 4

41. Da $H + S = A + 2$, so ist, durch Einsetzen dieser letzteren Werte,

$$8 + \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = A + 2,$$

woraus hervorgeht, dass die Zahl der Grate A niemals kleiner als sechs sein kann. So ist also die dreieckige Pyramide der einfachste aller Körper, weil sowohl die Zahl der Seitenflächen als auch die Zahl der Raumwinkel $= 4$ ist und die Zahl der Grate $= 6$.

[15] *cyphra.* Vgl. frz. *zéro.* γ und δ kommen erst im nächsten Korollar zum Tragen.

Proposition 6

42. *Es kann kein Körper existieren, bei dem die Zahl der Seitenflächen um vier erhöht größer ist als das Zweifache der Zahl der Raumwinkel oder die Zahl der Raumwinkel um vier erhöht größer ist als das Zweifache der Zahl der Seitenflächen.*

Beweis

Sei die Zahl der Seitenflächen $= H$, die Zahl der Raumwinkel $= S$ und die Zahl der Grate $= A$; da wir ja oben erkannt haben, dass es nicht geschehen kann, dass entweder $3H > 2A$ oder $3S > 2A$ sind, so sind diese zwei Formeln unmöglich:

$$3H > 2A \quad \text{und} \quad 3S > 2A.$$

Da nun $A = H + S - 2$ ist, sind die folgenden Formeln, diesen Wert für A eingesetzt, unmöglich:

$$3H > 2H + 2S - 4 \quad \text{und} \quad 3S > 2H + 2S - 4,$$

die auf diese hinauslaufen:

$$H + 4 > 2S \quad \text{und} \quad S + 4 > 2H.$$

Daher kann weder die Zahl der Seitenflächen um vier erhöht größer sein als das Zweifache der Zahl der Raumwinkel noch die Zahl der Raumwinkel um vier erhöht größer ist als das Zweifache der Zahl der Seitenflächen. W. z. b. w.

Korollar 1

43. Also ist bei jedem Körper entweder $H + 4 = 2S$ oder $H + 4 < 2S$; ferner ist in ähnlicher Weise entweder $S + 4 = 2H$ oder $S + 4 > 2H$. Wenn also α und β positive Zahlen bezeichnen mögen, die Null nicht ausgenommen, so ist

$$H + 4 + \alpha = 2S \quad \text{und} \quad S + 4 + \beta = 2H.$$

Korollar 2

44. Da $S = 2H - 4 - \beta$ und $S = \frac{1}{2}H + 2 + \frac{1}{2}\alpha$ ist, kann die Zahl der Raumwinkel S niemals größer als $2H - 4$ oder kleiner als $\frac{1}{2}H + 2$ sein. Also kann die Zahl der Raumwinkel S nicht außerhalb dieser Grenzen $2H-4$ und $\frac{1}{2}H+2$ fallen.

Korollar 3

45. Da in ähnlicher Weise $H = 2S - 4 - \alpha$ und $H = \frac{1}{2}S + 2 + \frac{1}{2}\beta$ ist, kann die Zahl der Seitenflächen H niemals größer als $2S - 4$ oder kleiner als $\frac{1}{2}S + 2$ sein; weshalb die Zahl der Seitenflächen H nicht außerhalb dieser Grenzen $2S - 4$ und $\frac{1}{2}S + 2$ fallen kann.

Korollar 4

46. Ferner ist aus der vorangehenden Proposition zu erkennen, dass die Zahl der Grate A weder außerhalb der Grenzen $\frac{3}{2}H$ und $3H-6$ noch außerhalb der Grenzen $\frac{3}{2}S$ und $3S-6$ fallen kann; auf ähnliche Weise geht aus demselben hervor, dass weder Zahl der Seitenflächen H noch die Zahl der Raumwinkel S außerhalb der Grenzen $\frac{2}{3}A$ und $\frac{1}{3}A+2$ fallen können.

Korollar 5

47. Gegeben also die Zahl der Seitenflächen, können sowohl für die Zahl der Raumwinkel als auch für die Zahl der Grate Grenzen angegeben werden, welche sie nicht überschreiten können, und welche die folgende Tabelle liefert:

Grenzen, die nicht überschritten werden können

Zahl der Seitenflächen	Zahl der Raumwinkel	Zahl der Grate
4	4 ... 4	6 ... 6
5	6 ... $4\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$ ... 9
6	8 ... 5	9 ... 12
7	10 ... $5\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$ ... 15
8	12 ... 6	12 ... 18
9	14 ... $6\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$ ... 21
10	16 ... 7	15 ... 24
11	18 ... $7\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$ ... 27
12	20 ... 8	18 ... 30
13	22 ... $8\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{2}$ ... 33
14	24 ... 9	21 ... 36
15	26 ... $9\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$ ... 39
16	28 ... 10	24 ... 42
17	30 ... $10\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$ ... 45
18	32 ... 11	27 ... 48
19	34 ... $11\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$ ... 51
20	36 ... 12	30 ... 54
21	38 ... $12\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$ ... 57
22	40 ... 13	33 ... 60
23	42 ... $13\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$ ... 63
24	44 ... 14	36 ... 66
25	46 ... $14\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$ ... 69

Korollar 6

48. Wenn aber die Zahl der Raumwinkel S gegeben ist, gehen für die Zahl der Grate dieselben Grenzen hervor, welche die Tabelle angibt, für die Zahl der

Seitenflächen allerdings werden die Grenzen gefunden, welche in der Tabelle für die Zahl der Raumwinkel angegeben werden.

Korollar 7

49. Wenn allerdings die Zahl der Grate gegeben ist, wird, da ja weder die Zahl der Seitenflächen noch die Zahl der Raumwinkel die Grenzen $\frac{2}{3}A$ und $\frac{1}{3}A+2$ überschreiten kann, die folgende Grenztabelle aufgestellt:

Zahl der Grate	Grenzen für die Zahlen H und S	Zahl der Grate	Grenzen für die Zahlen H und S
6	$4 \ldots 4$	34	$22\frac{2}{3} \ldots 13\frac{1}{3}$
7	$4\frac{2}{3} \ldots 4\frac{1}{3}$	35	$23\frac{1}{3} \ldots 13\frac{2}{3}$
8	$5\frac{1}{3} \ldots 4\frac{2}{3}$	36	$24 \ldots 14$
9	$6 \ldots 5$	37	$24\frac{2}{3} \ldots 14\frac{1}{3}$
10	$6\frac{2}{3} \ldots 5\frac{1}{3}$	38	$25\frac{1}{3} \ldots 14\frac{2}{3}$
11	$7\frac{1}{3} \ldots 5\frac{2}{3}$	39	$26 \ldots 15$
12	$8 \ldots 6$	40	$26\frac{2}{3} \ldots 15\frac{1}{3}$
13	$8\frac{2}{3} \ldots 6\frac{1}{3}$	41	$27\frac{1}{3} \ldots 15\frac{2}{3}$
14	$9\frac{1}{3} \ldots 6\frac{2}{3}$	42	$28 \ldots 16$
15	$10 \ldots 7$	43	$28\frac{2}{3} \ldots 16\frac{1}{3}$
16	$10\frac{2}{3} \ldots 7\frac{1}{3}$	44	$29\frac{1}{3} \ldots 16\frac{2}{3}$
17	$11\frac{1}{3} \ldots 7\frac{2}{3}$	45	$30 \ldots 17$
18	$12 \ldots 8$	46	$30\frac{2}{3} \ldots 17\frac{1}{3}$
19	$12\frac{2}{3} \ldots 8\frac{1}{3}$	47	$31\frac{1}{3} \ldots 17\frac{2}{3}$
20	$13\frac{1}{3} \ldots 8\frac{2}{3}$	48	$32 \ldots 18$
21	$14 \ldots 9$	49	$32\frac{2}{3} \ldots 18\frac{1}{3}$
22	$14\frac{2}{3} \ldots 9\frac{1}{3}$	50	$33\frac{1}{3} \ldots 18\frac{2}{3}$
23	$15\frac{1}{3} \ldots 9\frac{2}{3}$	51	$34 \ldots 19$
24	$16 \ldots 10$	52	$34\frac{2}{3} \ldots 19\frac{1}{3}$
25	$16\frac{2}{3} \ldots 10\frac{1}{3}$	53	$35\frac{1}{3} \ldots 19\frac{2}{3}$
26	$17\frac{1}{3} \ldots 10\frac{2}{3}$	54	$36 \ldots 20$
27	$18 \ldots 11$	55	$36\frac{2}{3} \ldots 20\frac{1}{3}$
28	$18\frac{2}{3} \ldots 11\frac{1}{3}$	56	$37\frac{1}{3} \ldots 20\frac{2}{3}$
29	$19\frac{1}{3} \ldots 11\frac{2}{3}$	57	$38 \ldots 21$
30	$20 \ldots 12$	58	$38\frac{2}{3} \ldots 21\frac{1}{3}$
31	$20\frac{2}{3} \ldots 12\frac{1}{3}$	59	$39\frac{1}{3} \ldots 21\frac{2}{3}$
32	$21\frac{1}{3} \ldots 12\frac{2}{3}$	60	$40 \ldots 22$
33	$22 \ldots 13$		

Korollar 8

50. Es ziemt sich, zu dieser Tafel obendrein zu notieren, dass, wie viel eine der Zahlen H und S die untere Grenze übersteigt, die andere die obere Grenze um ebenso viel unterschreiten muss. So ist, wenn die Zahl der Grate $A = 30$ ist und die Zahl der Seitenflächen $H = 12+n$, die Zahl der Raumwinkel $S = 20-n$, und hierbei darf $20 - n$ nicht weniger als 12 sein, weswegen n nicht größer als 8 sein kann.

Proposition 7

51. *Es kann kein Körper existieren, dessen sämtliche Seitenflächen Sechsecke sind oder noch mehr Kanten haben; und es kann kein Körper existieren, dessen sämtliche Raumwinkel aus sechs oder mehr ebenen Winkeln gebildet sind.*

Beweis

Zum einen: Sei wie bisher die Zahl der Grate $= A$, die Zahl der Seitenflächen $= H$ und die Zahl der Raumwinkel $= S$. Wenn nun also alle Seitenflächen Sechsecke wären oder von noch mehr Kanten, wäre die Zahl aller ebenen Winkel entweder $= 6H$ oder $> 6H$; daher wäre die Zahl der Grate A entweder $= 3H$ oder $> 3H$. Aber oben haben wir gesehen, dass stets $A = 3H-6$ oder $A < 3H-6$ ist; auf keine Weise kann es also geschehen, dass entweder $A = 3H$ oder $A > 3H$ ist; weshalb es unmöglich ist, dass sämtliche Seitenflächen Sechsecke sind oder noch mehr Kanten haben.

Zum anderen: In ähnlicher Weise, wenn alle Raumwinkel aus sechs oder mehr ebenen Winkeln bestünden, wäre die Zahl aller ebenen Winkel entweder $= 6S$ oder $> 6S$, und daher die Zahl der Grate A entweder $= 3S$ oder $> 3S$. Aber oben haben wir bewiesen, dass es nicht geschehen kann, dass $A + 6 > 3S$ ist, viel weniger kann es also sein, dass $A = 3S$ oder $A > 3S$. Weshalb es unmöglich ist, dass sämtliche Raumwinkel aus sechs oder mehr ebenen Winkeln gebildet sind.

Proposition 8

52. *Die Summe aller ebenen Winkel, die auf der Oberfläche irgendeines Körpers zu finden sind, ist gleich viermal so vielen Rechten, wie Einheiten auftreten, um die die Zahl der Grate die Zahl der Seitenflächen überschreitet.*

Beweis

Seien die Zahl der Grate $= A$ und die Zahl der Seitenflächen $= H$; es ist zu zeigen, dass die Summe aller ebenen Winkel gleich $4A - 4H$ Rechten ist. Um dies zu zeigen, bestehe die Oberfläche des Körpers

aus	a	dreieckigen Seitenflächen
aus	b	viereckigen Seitenflächen
aus	c	fünfeckigen Seitenflächen
aus	d	sechseckigen Seitenflächen
aus	e	siebeneckigen Seitenflächen
		etc.,

die Zahl der Seitenflächen ist also $H = a + b + c + d + e + \text{etc.}$, und die Zahl der Grate $A = \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.})$, weil die Zahl der ebenen Winkel $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.}$ ist.

Da nun die Summe der Winkel	eines Dreiecks ist	=	2	Rechte
	eines Vierecks	=	4	Rechte
	eines Fünfecks	=	6	Rechte
	eines Sechsecks	=	8	Rechte
	eines Siebenecks	=	10	Rechte
	etc.,			

so ist die Summe aller ebenen Winkel

$$\begin{aligned} &= 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{etc. rechten Winkeln,} \\ \text{aber es ist } 4A &= 6a + 8b + 10c + 12d + 14e + \text{etc.} \\ \text{und } 4H &= 4a + 4b + 4c + 4d + 4e + \text{etc.} \\ \hline \text{also } 4A - 4H &= 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{etc.} \end{aligned}$$

Daher ist die Summe aller ebenen Winkel gleich $4A - 4H$ rechten Winkeln. W. z. b. w.

Korollar 1

53. Da entweder $2A = 3H$ oder $2A > 3H$ ist, ist, wenn wir $2A = 3H + \alpha$ setzen, die Summe der ebenen Winkel $= 2H + 2\alpha$,[16] und kann deswegen nicht kleiner sein als $2H$ rechte Winkel.

Korollar 2

54. Ferner, da $A = 3H - 6 - \alpha$ ist, ist

$$4A - 4H = 8H - 24 - 4\alpha.$$

Daher kann die Summe aller ebenen Winkel nicht größer sein als $8H - 24$ rechte Winkel. Deswegen kann die Zahl der rechten Winkel, welche der Summe aller ebenen Winkel gleich ist, nicht außerhalb dieser Grenzen $2H$ und $8H - 24$ fallen.

[16] gemeint ist hier: $= 2H + 2\alpha$ rechten Winkeln.

Proposition 9

55. *Die Summe aller ebenen Winkel, die auf der Oberfläche irgendeines Körpers zu finden sind, ist gleich viermal so vielen Rechten, wie Raumwinkel vorhanden sind, weniger acht.*

Beweis

Sei die Zahl der Raumwinkel $= S$; es muss gezeigt werden, dass die Summe aller ebenen Winkel gleich $4S - 8$ rechte Winkel ist. Hierfür werde die Zahl der Seitenflächen $= H$ und die Zahl der Grate $= A$ gesetzt, und weil wir in der vorangegangenen Proposition gezeigt haben, dass die Summe aller ebenen Winkel $= 4A - 4H$ rechte Winkel ist, und daraus, dass ferner (wegen $H + S = A + 2$) $A - H = S - 2$, und deswegen $4A - 4H = 4S - 8$, ist ersichtlich, dass die Summe aller ebenen Winkel $= 4S - 8$ rechten Winkeln ist oder gleich ebenso vielen Rechten, wie Raumwinkel vorhanden sind, weniger acht. W. z. b. w.

Korollar 1

56. Auffallend und auch meisterlich ist diese Eigenschaft der Körper, dass die Summe aller ebenen Winkel einzig durch die Zahl der Raumwinkel bestimmt ist, auf ähnliche Weise, auf welche bei einer beliebigen ebenen Figur die Summe der Winkel aus ihrer Zahl zu entnehmen ist.

Korollar 2

57. Zu Recht ist also ein Beweis dieser Proposition zu wünschen, der allein aus der Zahl der Raumwinkel entnommen ist, so dass in ihn weder die Zahl der Seitenflächen noch die Zahl der Grate eingeht. Hieraus also, und auch daraus, dass ich für die vierte Proposition keineswegs einen zwingenden Beweis geben kann, fällt umso mehr ins Auge, wie wenig die Grundlagen der Stereometrie auch jetzt noch vervollkommnet sind.

Korollar 3

58. Da ja die Summe aller ebenen Winkel einzig von der Zahl der Raumwinkel abhängt, bildet diese Zahl auf diese Weise ein Merkmal der Körper, von welchem offenbar Arten von Körpern abzuleiten sind. Daher sind also die Arten von Körpern nach der Folge der Zahl der Raumwinkel: 1. Viereck. 2. Fünfeck, 3. Sechseck, 4. Siebeneck etc., die der Reihe nach durch die Zahl der Seitenflächen näher bestimmt werden.

Problem 1

59. *Die wichtigeren Arten, welchen alle von ebenen Figuren eingeschlossenen Körper zuzuordnen sind, aufzählen und mit passenden Namen versehen.*

Lösung

Sei die Zahl der Raumwinkel $= S$; wie wir oben gesehen haben, kann die Zahl der Seitenflächen nicht außerhalb der Grenzen $2S - 4$ und $\frac{1}{2}S + 2$ fallen. Hieraus ergeben sich mittels der in Paragraph 47 aufgestellten Tabelle für jede beliebige Zahl von Raumwinkeln die folgenden Arten von Körpern:

Zahl der Raumwinkel	Zahl der Seitenflächen	Zahl der Grate	Namen der Arten
4	4	6	vierflächiges Viereck
5	5	8	fünfflächiges Fünfeck
	6	9	sechsflächiges Fünfeck
6	5	9	fünfflächiges Sechseck
	6	10	sechsflächiges Sechseck
	7	11	siebenflächiges Sechseck
	8	12	achtflächiges Sechseck
7	6	11	sechsflächiges Siebeneck
	7	12	siebenflächiges Siebeneck
	8	13	achtflächiges Siebeneck
	9	14	neunflächiges Siebeneck
	10	15	zehnflächiges Siebeneck
8	6	12	sechsflächiges Achteck
	7	13	siebenflächiges Achteck
	8	14	achtflächiges Achteck
	9	15	neunflächiges Achteck
	10	16	zehnflächiges Achteck
	11	17	elfflächiges Achteck
	12	18	zwölfflächiges Achteck
9	7	14	siebenflächiges Neuneck
	8	15	achtflächiges Neuneck
	9	16	neunflächiges Neuneck
	10	17	zehnflächiges Neuneck
	11	18	elfflächiges Neuneck
	12	19	zwölfflächiges Neuneck
	13	20	dreizehnflächiges Neuneck
	14	21	vierzehnflächiges Neuneck

Zahl der Raumwinkel	Zahl der Seitenflächen	Zahl der Grate	Namen der Arten
10	7	15	siebenflächiges Zehneck
	8	16	achtflächiges Zehneck
	9	17	neunflächiges Zehneck
	10	18	zehnflächiges Zehneck
	11	19	elfflächiges Zehneck
	12	20	zwölfflächiges Zehneck
	13	21	dreizehnflächiges Zehneck
	14	22	vierzehnflächiges Zehneck
	15	23	fünfzehnflächiges Zehneck
	16	24	sechzehnflächiges Zehneck
etc.			

Es ist überflüssig, diesen Katalog der Arten von Körpern weiter fortzuführen, da ja daraus der Fortgang der nachfolgenden Arten unmittelbar klar ist. W. z. f. w.

Korollar 1

60. Es ziehmt sich, hier anzumerken, dass es keinen Körper gibt, der sieben Grate hat, obgleich doch die erste Art nur sechs Grate hat; die zweite Art hat acht, die folgenden mehr als acht, und unter den Zahlen der Grate treten alle Zahlen größer als sechs auf, einzig die Sieben ausgenommen.

Korollar 2

61. Aus der ersten Art geht hervor, dass jeder viereckige Körper zugleich vierflächig ist und umgekehrt; diese Art enthält, als einfachste Art, einen einzigen Fall, die dreieckige, von vier Dreiecken eingeschlossene Pyramide.

Korollar 3

62. Die zweite Art hat 16 ebene Winkel und 5 Raumwinkel, deren vier aus drei ebenen, eine aus vier ebenen Winkeln gebildet ist, und ähnlich sind vier seiner fünf Seitenflächen Dreiecke, eine jedoch ein Viereck, weshalb diese Art einen einzigen Fall enthält, nämlich die über einer viereckigen Basis errichtete Pyramide.

Korollar 4

63. Die dritte Art, mit 18 ebenen Winkeln, 5 Raumwinkeln und 6 Seitenflächen, wird von sechs Dreiecken eingeschlossen, was auf eine einzige Weise

geschehen kann, und zwar ist dieser Körper die dreieckige Doppelpyramide, beziehungsweise aus zwei Pyramiden zusammengesetzt, die gleiche Basen haben und an diesen verbunden sind.

Korollar 5

64. Die vierte Art enthält ebenfalls nur einen Fall, von drei Vierecken und zwei Dreiecken eingeschlossen, welcher dreieckiges Prisma genannt wird. Die folgenden Arten enthalten meistens mehrere Fälle, aber bei ihrer Aufzählung zu verweilen ist nicht erlaubt, deswegen weil andere hierher gehörende Eigenschaften der Körper noch nicht genügend entwickelt sind.

Scholion

65. Dies sind also gewissermaßen die Anfangsgründe der Stereometrie, die die Beschaffenheiten und auch Eigenschaften der üblichen Körper im Allgemeinen enthalten, woraus anschließend die Eigenschaften einzelner Fälle abzuleiten sind. Die hier überlieferten Aussagen sind nämlich denen ähnlich, die in der ebenen Geometrie über die allgemeinen Eigenschaften der Figuren bewiesen zu werden pflegen und welche auf diese beiden zurückgeführt werden, dass erstens bei jeder geradlinigen Figur die Zahl der Winkel gleich der Zahl der Kanten ist, dann aber, dass die Summe aller Winkel gleich ist zweimal so vielen rechten Winkeln, wie es Kanten gibt, weniger vier. Bei den Körpern jedoch ist die Zahl solcher grundlegender Aussagen viel größer, was gewiss wegen der größeren Vielfalt der Dinge, durch welche sie bestimmt werden, nicht verwunderlich ist. Dies jedoch scheint zu Recht höchst verwunderlich, dass, da nicht allein die Grundlagen der ebenen Geometrie auf den höchsten Gipfel der Deutlichkeit vorgetrieben sind, sondern auch die Stereometrie schon von den ältesten Geometern vervollkommnet wurde, dennoch ihre Anfangsgründe bisher unter die Wünsche zu rechnen sind. Obwohl ich nämlich nun freilich dafürhalte, diese Grundlagen ans Licht gezogen zu haben, bin ich doch gezwungen zu gestehen, dass ich diejenigen unter ihnen, welche für vorzüglich zu halten sind, bisher ohne passende und wahrhaft geometrische Beweise gelassen habe, welche ich hauptsächlich deswegen hier öffentlich bekannt gemacht habe, dass ich andere, welchen diese Mühe eine Obliegenheit ist und am Herzen liegt[17], zur Untersuchung dieser Beweise anfache; sind diese gefunden, so ist überhaupt kein Zweifel, dass die Stereometrie zum selben Grad der Vervollkommnung emporgeführt wird wie die Geometrie.

[17] eine idiomatischere Übersetzung von *curæ cordique est* wäre wünschenswert.