Dualität

Zur Geschichte einer mathematischen Idee mit einem Seitenblick auf die Didaktik der linearen Algebra

Antrittsvorlesung an der BUW

Ralf Krömer

28. Mai 2014

"Duality is an important general theme which has manifestations in almost every area of mathematics... Despite the importance of duality in mathematics, there is no single definition which covers all instances of the phenomenon."
(The Princeton Companion of Mathematics, 2008)

- Eine Möglichkeit, das Thema einzugrenzen, ist, die Entwicklung des Begriffs zu betrachten: was wurde alles als Dualität bezeichnet, wie hängen diese Beispiele historisch oder systematisch miteinander zusammen?
- Wenn das Thema so wichtig ist: gibt es eine Chance, es auch schon in der Schule zu berühren? Oder taucht es da sogar schon auf, ohne dass man es gleich merkt?

Einige Felder, in denen Dualität in der Mathematik bekannt ist:

- Polyeder
- Projektive Geometrie
- „duale Kurven“ etc.
- Vektorräume und Linearformen
- Fouriertransformation
- Funktionalanalysis
- Logik/boolesche Algebra/Verbandstheorie
- algebraische Topologie (Poincaré)
- Gruppentheorie (Pontrjagin)
- homologische Algebra, Kategorientheorie
- algebraische Geometrie
- Quantenmechanik
- ...

Erscheinungsformen von Dualität:

- "ein Beweis, zwei Sätze" (syntaktische Dualisierung); Zwei-Spalten-Texte
- komplementäre Dimensionen
- duale Paarung: $(\cdot, \cdot) \to \mathbb{R}$ (Verknüpfung eines Objekts mit seinem Dualobjekt liefert Element im "Grundkörper")
- ein Objekt festhalten, das andere variieren
- Kategorientheorie: Pfeile herumdrehen
- "Echte" Dualität ist involutorisch, d.h. zweimaliges Dualisieren liefert Ausgangssituation zurück.

Aufgaben von Dualität:

- "ein Beweis, zwei Sätze"
- Um einen Raum zu untersuchen, untersucht man die auf ihm definierten Funktionen in einen "einfacheren" Raum

Narrativ 1: Atiyah

Projektive Geometrie

endl.-dim. lineare Algebra

∞-dim. lineare Algebra

Fouriertransformation

Θ-Funktionen, Modulformen

abelsche Gruppen (Pontrjagin)

nichtabelsche Gruppen

Homologie (Poincaré)

Hodge

Physik

[Atiyah(2007)]

Narrativ 2: Yves André

Projektive Geometrie

endl.-dim. lineare Algebra

∞-dim. LA

KT

Mechanik
(Lagrange/Hamilton)

Homologie
(Poincaré)

Distributionen

Fouriertransformation

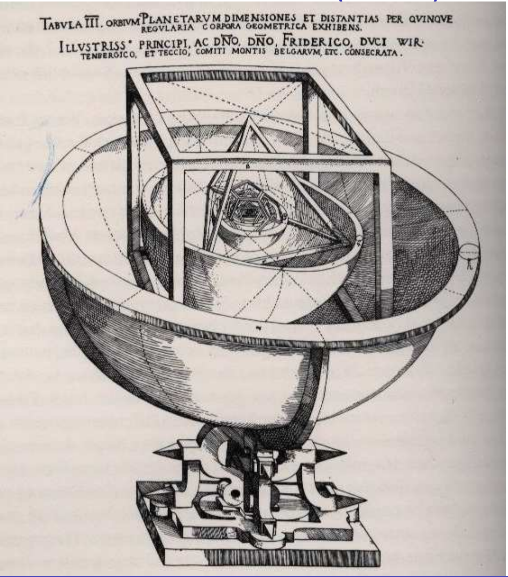
Welle-Teilchen-Dualität:
(q, t) (Position, Zeit) dual
zu (p, ω) (Impuls, Frequenz)

De Rham-Hodge

Maxwell

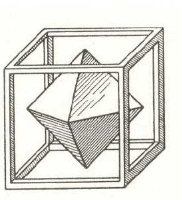
[André(2009)]

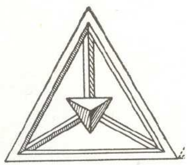
Keplers Weltharmonie (1619)

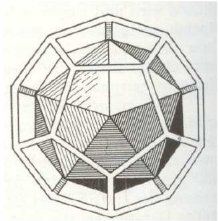


Duale Polyeder bei Kepler

„Es treten nun unter den Figuren zwei bemerkenswerte Pärchen auf, die je aus verschiedenen Klassen zusammengestellt sind. Die Männchen sind die Würfel und das Dodekaeder aus der Klasse der primären Körper, die Weibchen sind das Oktaeder und das Ikosaeder, die sekundären Körper. Dazu kommt gleichsam ein Einzelgänger oder Zwitter, da es sich selbst einbeschreiben lässt, wie jene Weibchen den Männchen einbeschrieben werden können, gleichsam unter ihnen liegen und den männlichen entgegengesetzte Geschlechtsmerkmale besitzen, d. h. Ecken gegenüber Seitenflächen.“ (Harmonice mundi [1619]; S. 281 – 282 der deutschen Übersetzung von Max Caspar [München, 1967])







- Man erhält das duale Polyeder, indem man die Mittelpunkte der Seitenflächen miteinander verbindet
- “Echte” Dualität, denn zweimaliges Dualisieren liefert (bis auf eine Ähnlichkeitsabbildung) den Ausgangskörper zurück
- Abzählen liefert eine “Dualität von F und E”:

…eder	Tetra	Hexa	Okta	Dodeka	Ikosa
F (Anzahl Seitenflächen)	4	6	8	12	20
E (Anzahl Ecken)	4	8	6	20	12
K (Anzahl Kanten)	6	12	12	30	30

- Weitere Eigenschaften, die die Paare dualer Polyeder gemeinsam haben: isomorphe Symmetriegruppen
- Verfahren funktioniert auch bei Archimedischen oder Catalanschen Körpern

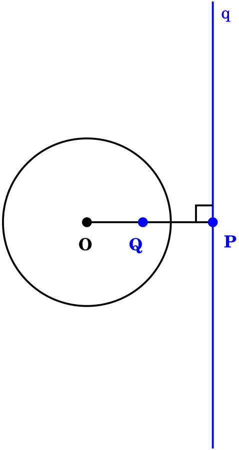
Didaktischer Seitenblick 1

- Polyeder können deskriptiv bereits in der Primarstufe und der Sekundarstufe I thematisiert werden.
- (Eine analytische Behandlung kann im Rahmen des Lernbereichs Lineare Algebra der Oberstufe erfolgen; vgl. z.B. Jahnke et al., Gymnasiale Oberstufe Mathematik. Analytische Geometrie/Lineare Algebra, Cornelsen 2003)
- Man wird dann vermutlich auch eine Tabelle wie oben anlegen; anhand dieser wäre es möglich, dass die SuS auf die "Dualität" von F und E aufmerksam werden; diese Entdeckung wäre weitaus eher zu erwarten als z.B. die Euler-Gleichung $E - K + F = 2$.
- Katja Eilerts (Potsdam) hat eine Unterrichtsreihe entwickelt, in der sogar die Symmetriegruppen der Körper thematisiert werden; auch hier könnte man auf die Dualität aufmerksam werden.

Dualität in der ebenen Geometrie

- Euklidische Geometrie:
  - Zwei Punkte bestimmen eine Gerade
  - Zwei **nichtparallele** Geraden bestimmen einen Punkt
- Ziel: Beseitigung der “Asymmetrie” der beiden Aussagen (also des Wortes “nichtparallel”)
- Lösung: Hinzufügen von “unendlich fernen Punkten” (als Schnittpunkten von Parallelen)
- dies wird im frühen 19. Jhdt. in der sogenannten “projektiven Geometrie” vollzogen.
- Es gilt das *Dualitätsprinzip*: Ein Satz bleibt wahr, wenn man “Punkt” durch “Gerade” ersetzt und umgekehrt.
- Es entspricht sogar jedem Punkt genau eine Gerade und umgekehrt
- — aber welche?

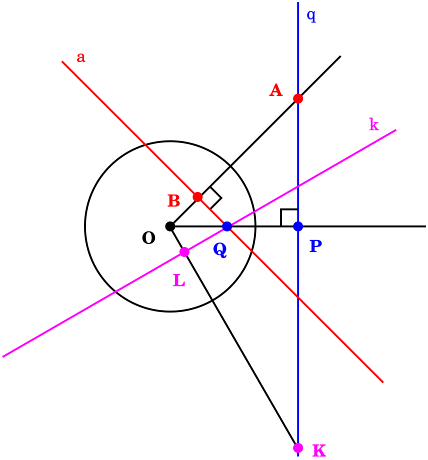
Pol und Polare



(Abb.: Wikipedia)

- Das Bild zeigt die Polare q eines Punkts Q in Bezug auf einen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt O.
- P ist der zu Q reziproke Punkt (d.h. $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^2$; Kathetensatz); die Polare ist die Senkrechte zu OQ durch P.
- Analog kann man zu einer gegebenen Geraden q einen Pol Q bestimmen; hierbei ist der Pol der Polaren eines gegebenen Punkts Q wieder Q selbst (Polarisierung ist involutorisch).
- Ähnlich kann man Pol bzw. Polare bezüglich eines Kegelschnitts betrachten (Jean-Victor Poncelet, 1788-1867).

Projektive Dualität als Polarität



(Abb.: Wikipedia)

- Das Bild illustriert die Dualität zwischen Punkten und Geraden und die Doppelbedeutung des Wortes “Inzidenz”.
- Wenn zwei Geraden *a* und *k* durch einen Punkt *Q* gehen (mit ihm inzidieren), dann verbindet die Polare *q* von *Q* die Pole *A* und *K* der Geraden *a* und *k* (inzidiert mit ihnen).
- Pole von Geraden durch *O* sind unendlich ferne Punkte, die Polare von *O* ist die “unendlich ferne Gerade”.

Poncelet und Gergonne

Joseph Diaz Gergonne (1771-1859):

Dualität als syntaktisches Austauschen von Wörtern

Punkt	$\leftrightarrow$	Gerade
schneiden in	$\leftrightarrow$	liegen auf

"The principle of duality [in the sense of syntactically interchanging terms in propositions] may properly be ascribed to Gergonne [. . .]. Poncelet protested that it was nothing but his method of reciprocation with respect to a conic (polarity), and Gergonne replied that the conic is irrelevant—duality is intrinsic in the system. Thus Gergonne came nearer to realizing how the principle rests on the symmetrical nature of the axioms of incidence" [Coxeter(1961), p.15].

“It is a fair if somewhat crude summary of the history of geometry since 1800 to say that it has led from the view that geometry is the apodeictic science of space to the conception that geometry, in so far as it is part of natural science, is a system of “conventions” or “definitions” for ordering and measuring bodies.” [Nagel(1939)] (p. 143)

“The liberation of geometrical terms from their usual but narrow interpretation first required a thoroughgoing denial of the need for absolute simples as the foundation for a demonstrative geometry. Such a liberation was in large measure the consequence of the discovery of the principle of duality and of the manifold extensions and applications which were made of it.” [Nagel(1939)] (p. 179)

Projektive Dualität in n Dimensionen

- in einem projektiven Raum der Dimension n sind Teilräume der Dimension r dual zu Teilräumen der Dimension $n - r - 1$.
- z.B. dreidimensional: Punkte dual zu Ebenen, Geraden dual zu Geraden.
- Wieder kann man entweder einen rein syntaktischen Austausch von “Punkt” und “(Hyper-)Ebene” usw. vornehmen oder explizit Pole und Polare konstruieren.
- Polyeder können durch Polarenbildung bezüglich ihrer Um- bzw. Inkugel (“höherer Kegelschnitt”) dualisiert werden.
- Ein analytisch-geometrischen Methoden zugängliches Modell gewinnt man durch “homogene Koordinaten”.
- Weitere Anwendungen der Pol-Polare-Beziehung im 19.Jhdt.: “duale Kurven” (Kurven, die aus den Polen der Tangenten der gegebenen Kurve bestehen) etc.

Dualität der Booleschen Algebra

- für aussagenlogische Junktoren oder alternativ für elementare Operationen auf Mengen
- Negation kehrt die Wenn-Dann-Richtung um / Komplementbildung dreht die Teilmengenbeziehung um
- Durch die de Morganschen Regeln ersetzt die Negation “und” durch “oder” u. umgekehrt / Komplementbildung ersetzt Schnitt durch Vereinigung u. umgekehrt:

$$\begin{array}{lcl} \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q & \text{bzw.} & \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B \\ \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q & \text{bzw.} & \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \end{array}$$

- ein Satz bleibt also gültig, wenn die Zeichen entsprechend ausgetauscht werden (ein Beweis, zwei Sätze)
- Diesmal braucht man keine “Elemente im Unendlichen” (idealen Elemente), um die Dualität komplett zu machen
- Involutorisch, zumindest in der klassischen Logik mit $\neg\neg p \leftrightarrow p$

Geschichte dieser Dualität?

- Augustus de Morgan, *Formal Logic: or, The calculus of inference, necessary and probable*, 1847
- historische Beziehung zur projektiven Geometrie? ("meet" und "join")
- Frege kennt nachweislich Poncelets Schriften, Schröder die von Gergonne
- Boole verwendet den Namen "Law of duality" zunächst für etwas anderes (sein Gesetz $x^2 = x$), für das Jevons den Namen "law of simplicity" vorschlägt.
- "Viel später": der Stone'sche Darstellungssatz für Boolesche Algebren

Z.B. offene und abgeschlossene Mengen

Satz 4a. *Ist* $\{O_\nu\}_{\nu \in N}$, *(N beliebige Indexmenge), eine Familie von offenen Mengen* O_ν, *so ist die Vereinigung* $\bigcup_{\nu \in N} O_\nu$ *offen.*

Satz 4b. *Ist* $\{A_\nu\}_{\nu \in N}$, *(N beliebige Indexmenge), eine Familie von abgeschlossenen Mengen* A_ν, *so ist der Durchschnitt* $\bigcap_{\nu \in N} A_\nu$ *abgeschlossen.*

Beweis. Wir beweisen den links stehenden Satz. Ist $x \in \bigcup_{\nu \in N} O_\nu$, so gilt $x \in O_\nu$ für mindestens einen Index $\nu = \mu$ und es gibt eine Umgebung $U(x) \subseteqq O_\mu$. Für diese Umgebung gilt auch $U(x) \subseteqq \bigcup_{\nu \in N} O_\nu$, daher ist $\bigcup_{\nu \in N} O_\nu$ wie behauptet offen.

Satz 5a. *Ist* $\{O_\nu\}_{\nu \in N}$ *eine endliche Familie von offenen Mengen* O_ν, *so ist der Durchschnitt* $\bigcap_{\nu \in N} O_\nu$ *offen.*

Satz 5b. *Ist* $\{A_\nu\}_{\nu \in N}$ *eine endliche Familie von abgeschlossenen Mengen* A_ν, *so ist die Vereinigung* $\bigcup_{\nu \in N} A_\nu$ *abgeschlossen.*

Beweis. Wir beweisen wieder den links stehenden Satz. Ist $x \in \bigcap_{\nu \in N} O_\nu$, so gilt $x \in O_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, N$, und es ist nach Satz 1 jede dieser Mengen eine Umgebung von x. Dann ist aber $\bigcap_{\nu \in N} O_\nu$ nach dem Umgebungsaxiom $[U\ 3]$ ebenfalls eine Umgebung von x. Wie behauptet ist also $\bigcap_{\nu \in N} O_\nu$ offen.

(aus v.Mangoldt, Knopp, *Höhere Mathematik* IV (von Friedrich Lösch 1972), S.286)

Der duale Vektorraum (dim $< \infty$)

- Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Sein Dualraum V' ist die Menge aller linearen Abbildungen $f : V \to \mathbb{R}$.
- Die r-dimensionalen Unterräume von V entsprechen den $n - r$-dimensionalen Unterräumen von V'.
- Genauer entspricht ein r-dimensionaler Unterraum S von V dem "Annulator"

$$Ann(S) := \{f \in V' | f(s) = 0 \; \forall s \in S\},$$

  der ein $n - r$-dimensionaler Unterraum von V' ist
- "the correspondence [. . .] of spaces to their annihilators leads to the Duality Principle of n-dimensional projective geometry" [Birkhoff und Mac Lane(1965)] p.185f.
- (Man beachte, dass aufgrund der homogenen Koordinaten die Punkte des n-dimensionalen projektiven Raums die linearen Teilräume eines $n + 1$-dimensionalen euklidischen Raums sind.)

Geschichte der Dualität in der linearen Algebra

- Die gerade genannte systematische Beziehung zwischen Vektorraumdualität und projektiver Dualität ist oberflächlich betrachtet sicher keine historische (man hat den Dualraum nicht eingeführt, weil man die projektive Dualität in dieser Form behandeln wollte)
- eine tieferliegende historische Beziehung gibt es aber möglicherweise über Plückers Koordinatenmethode?
- Hans Hahn spricht in seinem Beweis des Satzes von Hahn-Banach vom “polaren Raum” [Hahn(1927)] p.219.
- Im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* kommt “dual” in Zusammenhang mit Vektorräumen bis 1929 nicht vor
- Erste explizite Theorie linearer Gleichungssysteme unter Dualitätsgesichtspunkten bei Georg Frobenius (1849-1917)

Georg Frobenius 1877

"**§. 3. Ueber adjungirte Systeme homogener linearer Gleichungen.**
Gegeben seien m unabhängige homogene lineare Gleichungen

$$a_1^{(\mu)} u_1 + \cdots + a_n^{(\mu)} u_n = 0, \quad (\mu = 1, \ldots m) \qquad (10.)$$

zwischen den $n (> m)$ Unbekannten $u_1, \ldots u_n$. Ist

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 0$$

irgend eine lineare Verbindung derselben, so rechnen wir sie auch zum System (10.). Auch kann dies System durch m unabhängige lineare Verbindungen seiner Gleichungen ersetzt werden. [...]
Sind $A_1, \ldots A_n$ und $B_1, \ldots B_n$ irgend zwei *particuläre* Lösungen der Gleichungen (10.), so ist auch $aA_1 + bB_1, \ldots aA_n + bB_n$ eine Lösung.
Mehrere particuläre Lösungen

$$A_1^{(\kappa)}, \ldots A_n^{(\kappa)}, \quad (\kappa = 1, \ldots k)$$

sollen daher *unabhängig* oder *verschieden* heissen, wenn $c_1 A_\alpha^{(1)} + \cdots + c_k A_\alpha^{(k)}$ nicht für $\alpha = 1, \ldots n$ verschwinden kann, ohne dass $c_1, \ldots c_k$ sämmtlich gleich Null sind, mit andern Worten, wenn die k linearen Formen $A_1^{(k)} u_1 + \cdots + A_n^{(k)} u_n$ [lies: $A_1^{(\kappa)} u_1 + \cdots + A_n^{(\kappa)} u_n$] unabhängig sind.

[...]

$$a_1^{(\mu)} A_1^{(\nu)} + \cdots + a_n^{(\mu)} A_n^{(\nu)} = 0, \quad (\mu = 1, \ldots m; \nu = 1, \ldots n - m), \tag{11.}$$

und daher sind

$$A_1^{(\nu)}, \ldots A_n^{(\nu)}, \quad (\nu = 1, \ldots n - m), \tag{12.}$$

$n - m$ Lösungen der Gleichungen (10.). [...]

Mehr als $n - m$ verschiedene Lösungen können aber die Gleichungen (10.) nicht haben. Denn [...]

Sind $c_1, \ldots c_{n-m}$ *willkürliche Constanten*, so soll

$$A_1 = \sum c_\nu A_1^{(\nu)}, \ldots A_n = \sum c_\nu A_n^{(\nu)}$$

die *allgemeinste Lösung* der Gleichungen (10.) heissen. Aus ihr kann jede particuläre Lösung erhalten werden, indem man den willkürlichen Constanten bestimmte Werthe ertheilt. [...]

Bedeuten von nun an die Grössen (12.) irgend $n - m$ verschiedene Lösungen der Gleichungen (10.), so sind

$$A_1^{(\nu)} u_1 + \cdots + A_n^{(\nu)} u_n = 0 \tag{13.}$$

$n - m$ unabhängige homogene lineare Gleichungen zwischen den Unbekannten $u_1, \dots u_n$, und zufolge der Relationen (11.) sind

$$a_1^{(\mu)}, \dots a_n^{(\mu)} \quad (\mu = 1, \dots m) \tag{14.}$$

m verschiedene Lösungen derselben. Die beiden Systeme linearer Gleichungen (10.) und (13.), und ebenso die Systeme ihrer Coefficienten $a_\alpha^{(\mu)}$ und $A_\alpha^{(\nu)}$ sollen einander *zugeordnet* oder *adjungirt* genannt werden. Zwischen ihren allgemeinsten Lösungen besteht die Relation

$$a_1 A_1 + \cdots + a_n A_n = 0. \tag{11*.}$$

Die Coefficienten des einen Gleichungssystems sind die Lösungen des andern."

[Frobenius(1877)]

Didaktischer Seitenblick 2

- Geschichte und Didaktik des Begriffs Rang und seiner Theorie: [Dorier(1993), Dorier(2000)]
- Dualität zwischen Koeffizienten und Lösungen: eine denkbare Aufgabenart wäre, zu einem gegebenen Lösungsraum ein passendes LGS zu suchen.
- Vgl. z.B. H. Scheid, W. Schwarz, *Elemente der Linearen Algebra und der Analysis*, Spektrum 2009, S.18f
- [Tietze u. a.(2000)Tietze, Klika u. a.] S.34: fünf verschiedene Darstellungsformen von LGS möglich:
  - eben als System linearer Gleichungen
  - als Vektorgleichung $x_1\vec{a}_1 + \ldots x_n\vec{a}_n = \vec{b}$
  - als Matrizengleichung $A\vec{x} = \vec{b}$
  - als lineare Abbildung (gesucht $\vec{x}$ mit $\vec{x} \mapsto \vec{b}$
  - als System von Skalarproduktgleichungen $\vec{x} \cdot \vec{a}_i = b_i$
- A. Hoffkamp: “Zeilenbild” und “Spaltenbild” [Hoffkamp(2014)]

Von der Teilraumdualität zum Dualraum

- In den bisherigen Situationen war meist *ein* “Raum” gegeben und bestimmte Teile dieses Raums waren “dual” zu anderen Teilen:
  - Polyeder
  - projektive Geometrie
  - Unterraumdualität à la Frobenius
- Spricht man allerdings allgemein vom “Dualraum eines Vektorraums”, so handelt es sich um einen zweiten Raum, der zum ganzen Raum dual ist.
- Bevor es möglich ist, auf solch einen Gedanken zu kommen, müssen also einige Veränderungen im Raumbegriff eintreten; außerdem muss die Verschiedenheit der beiden Räume sichtbar sein. Bei endlichdimensionalen Räumen ist das schwierig, weil dann $V \cong V'$.

Der Dualraum (dim $= \infty$)

- Auch der erste unendlichdimensionale Raum, der einer genauen Betrachtung unterzogen wurde (L^2), ist selbstdual
- Erst als F.Riesz 1910 die L^p-Räume angab, lag ein Beispiel nichtselbstdualer Räume vor: $L^{p'} = L^q$ mit $q = \frac{p}{p-1}$.
- Bei [Riesz(1910)] S.459 steht das jedoch keineswegs explizit:
  - "Jede der Klassen $[L^p]$, $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ [besteht] genau aus jenen Funktionen, die mit jeder Funktion der andern Klasse multipliziert, integrierbare Produkte ergeben"
  - "die Klasse $[L^p]$ [enthält] alle linearen Verknüpfungen je einer endlichen Anzahl in ihr enthaltener Funktionen ebenfalls"
- Bei der Weiterentwicklung der Funktionalanalysis stellte man fest, dass für dim $= \infty$ die Dualität nicht mehr involutorisch, der Bidual also nicht mehr der Ausgangsraum sein muss (wo doch, spricht man von "reflexiven Räumen")

Euler-Charakteristik frei nach Wiki

- Für eine geschlossene triangulierte Fläche S ist
$$\chi(S) := E - K + F$$
(E Anzahl der Ecken, K der Kanten, F der Dreiecke)
- Für einen n-dimensionalen CW-Komplex X ist
$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i k_i$$
(k_i Anzahl der Zellen der Dimension i)
- Sei X ein topologischer Raum mit i-ter singulärer Homologiegruppe $H_i(X)$. Haben all diese Gruppen endlichen Rang $\dim(H_i(X)) =: b_i$ ("i-te Betti-Zahl") und sind nur endlich viele b_i ungleich 0, so ist
$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i$$

Poincaré- und Alexander-Dualität

- Für eine orientierbare n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M sind die r-te und die $n-r$-te Betti-Zahl gleich:

$$b_r = b_{n-r}$$

- Poincaré gibt den Satz und einen Beweis in §9 seiner "Analysis situs" [Poincaré(1895)] an; er spricht selbst nicht von Dualität.
- (Außerdem sind die Betti-Zahlen noch nicht explizit als Ränge von Homologiegruppen definiert)
- Nachdem P. Heegaard 1897 Poincarés Beweis kritisiert hat, gibt Poincaré einen neuen, der duale Polyeder ("polyèdres réciproques") verwendet.
- Der Dualitätssatz von Alexander (1922) besagt: für einen beliebigen Komplex F im $\mathbb{R}^n$ ist die r-te Betti-Zahl von F gleich der $n-r-1$-ten Betti-Zahl des Komplements $\mathbb{R}^n - F$.
- Betrachtung des Komplements z.B. wichtig in der Knotentheorie

Pontrjagin-Dualität

- Pontrjagin strebt 1931 eine Verallgemeinerung an, die beide Sätze enthält [Pontrjagin(1931)].
- Er verwendet jetzt (abelsche) Gruppen und Gruppencharaktere; insbesondere betrachtet er Schnitt- und Verschlingungszahlen bestimmter Komplexe als Ergebnisse einer dualen Paarung der zugehörigen Gruppen; auch der "Annulator" tritt auf
- Eine Analyse dieses Beispiels führt ihn 1934 auf die nach ihm benannte Dualität (die er auch Dualität nennt) [Pontrjagin(1934)]
- Das Narrativ, das dies aus der Fouriertransformation herkommen sieht, hat trotzdem einen wahren Kern, weil Pontrjagin die Resultate von Péter und Weyl zur Fourierentwicklung in Lie-Gruppen verwendet
- Bei seiner Betrachtung spielen auch die Homomorphismen zwischen den Gruppen eine wichtige Rolle; beim Übergang zur dualen Situation drehen sich diese herum

Kategorientheoretische Dualität: der Dualraum als Funktor

- Schreiben wir $L(V)$ statt V', dann ist durch L ein Funktor auf der Kategorie der endlichdimensionalen reellen Vektorräume definiert: sei $g : V_1 \to V_2$ ein Pfeil in dieser Kategorie, und sei $f_2 \in L(V_2)$. Dann definiert die Hintereinanderausführung

$$V_1 \xrightarrow{g} V_2 \xrightarrow{f_2} \mathbb{R},$$

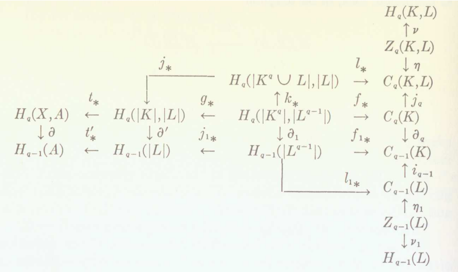
  ein Element von $L(V_1)$; wir können also einen Pfeil $L(g) : L(V_2) \to L(V_1)$ definieren durch

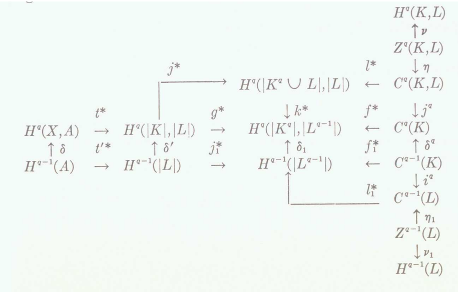
$$[L(g)](f_2) := g \circ f_2.$$

- Der Funktor ist *kontravariant* (die Pfeilrichtung wird umgekehrt).
- Mit diesem Beispiel führen Eilenberg und Mac Lane 1945 den Begriff "Funktor" ein [Eilenberg und Mac Lane(1945)].

Kategorientheoretische Dualität

- In der KT macht man Aussagen über die Verknüpfung von Pfeilen (die man sich als Hintereinanderausführung von Abbildungen vorstellen kann)
- Die zu einer gegebenen Aussage duale Aussage erhält man, indem man die Pfeile herumdreht.





(aus [Eilenberg und Steenrod(1952)])

Moderne Mathematik und kategorientheoretische Dualitäten

- Beispiele für “Dualität durch Pfeilumkehren”:
  - ein Vektorraum und sein Dualraum,
  - eine abelsche topologische Gruppe und ihre Charaktergruppe (Pontrjagin-Dualität),
  - Homologie- und Kohomologiegruppen,
  - direkte und inverse Limites,
  - projektive and injektive Objekte in abelschen Kategorien,
  - eine Kategorie und ihre duale Kategorie,
  - . . .
- Manche dieser Beispiele haben das Herausarbeiten des KT-Dualitätskonzepts historisch überhaupt erst motiviert, andere sind durch seine konsequente Anwendung zustandegekommen;
- in manchen Fällen gibt es ein Dualitätsprinzip, in anderen nicht;
- manche sind “funktional”, andere “axiomatisch”.

Mac Lane: axiomatische vs. funktionale Dualität

"For a topological space the duality between homology and cohomology groups with locally compact abelian coefficient groups can be formulated in terms of character groups. Another formulation is suggested by the axiomatic homology theory of Eilenberg and Steenrod. In this formulation, the axioms for a homology theory refer [. . .] only to certain homomorphisms; the dual statements are exactly the axioms for a cohomology theory. [. . .]

Duality phenomena also appear in the case of vector spaces. [. . .] In these instances there is a process assigning to each object a dual object and to each transformation a dual transformation, so that a "functional" duality is present. Similarly, the duality of (plane) projective geometry may be formulated in two ways: *functional*, by assigning to each figure its polar reciprocal with respect to a fixed conic; *axiomatic*, by observing that the axioms for plane projective geometry are invariant under the interchange of "point" with "line". [Mac Lane(1950), 494f]

"Even for discrete abelian groups or for discrete (infinite-dimensional) vector spaces, a functional duality does not exist. We aim to provide an axiomatic duality covering such cases." [Mac Lane(1950), 494f]

Trifft es zu (wie Coxeter und Nagel suggerieren und wozu zumindest Mac Lanes Vorhaben passen würde), dass Dualität die historische Entwicklung eher in der "axiomatischen" als in der "funktionalen" Form beeinflusst hat?

Leistungen und Grenzen des Axiomatischen

- Eilenberg-Steenrod 1952: Axiomatisierung von Homologie- und Kohomologietheorien (vgl. Mac Lane 1950)
- Cartan-Eilenberg 1956 (1953): Homologische Algebra für Kategorien von R-Moduln

  "In this chapter we present all the algebraic tools of homology theory [. . .]. The treatment here differs from the standard one in that great care is taken to maintain all symmetries and thus keep the system self-dual at all times. [. . .] The reader will have ample opportunities to convince himself that the preservation of this kind of a duality is indispensable." [p.53]
- Trotzdem müssen beide Fälle getrennt behandelt werden; noch kein "Dualitätsprinzip"

- Buchsbaum nennt den Grund; $H(A, B)$ bezeichnet den Homologiefunktor zu zwei Moduln A, B:

  "In [the] category [of all left Λ-modules $\mathcal{M}_\Lambda$], $H(A, B) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$. However, the dual category $\mathcal{M}_\Lambda^*$ admits no such concrete interpretation. This explains the fact that the duality principle could not be efficiently used, as long as we were restricted to categories concretely defined, in which the objects were sets and the maps were maps of those sets." [p.382]
- Buchsbaums Lösung (1955): Statt Kategorien von R-Moduln betrachtet man allgemeine "exakte" (abelsche) Kategorien sowie die zu einer gegebenen Kategorie $\mathcal{A}$ duale Kategorie $\mathcal{A}^*$; wenn $\mathcal{A}$ exakt ist, dann auch $\mathcal{A}^*$.
- "Ideale Elemente"? Abstrakte Behandlung auf Diagrammebene
- [Grothendieck(1957)]: Strategie greift bei Garben nicht
- Mehr dazu: [Krömer(2007), Krömer und Corfield(2014)]

Ausblick: ein Forschungsprojekt

- DFG-Antrag in Vorbereitung; Dissertations- oder PostDoc-Projekte zu Einzelaspekten (Logik, Funktionalanalysis, . . .)
- internationaler Workshop zu historischen Aspekten
- 3.-5.9.2015: internationaler Workshop “Duality in contemporary mathematics - philosophical aspects” an der BUW gemeinsam mit D.Corfield (Kent): s. meine Homepage
- geplant: Sammelband

Ausklang: Eilenberg als Sammler

Shiva seated with Uma
(Uma-Maheshvaramurti)

Bronze (Nepal 11.Jhdt.)

Samuel Eilenberg Collection 1987

“Umamaheshvaramurti is the image of dalliance between Maheshvara, the Great Lord (a form of Shiva) and his wife, Uma (a form of Parvati). The sculpture symbolizes the ultimate oneness of all things. The pairing of male and female is understood as a metaphor for the dissolution of the mirage of duality that vails the true nature of the universe.”
(Metropolitan Museum of Art, NYC)

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

http://www2.math.uni-wuppertal.de/~kroemer/index.html

André, Y.
Leçons de Mathématiques contemporaines à l'Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique (IRCAM), Centre Pompidou, Paris 2009. Unpublished lecture notes. 2009.

Atiyah, M.
Duality in Mathematics and Physics. Lecture delivered in 2007 at the Institut de Matemàtica de la Universitat de Barcelona (IMUB). http://www.fme.upc.edu/arxius/butlleti-digital/riemann/071218_conferencia_atiyah-d_article.pdf.
2007.

Birkhoff, G. und Mac Lane, S.
A survey of modern algebra.
MacMillan, 1965.

Cartan, H. und Eilenberg, S.
Homological Algebra.
Princeton University Press, 1956.

Coxeter, H. S. M.

The real projective plane.
Cambridge Univ. Press, 2nd Auflage, 1961.

Dorier, J. L.
Emergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations lineaires (3) 2 (1993): 159–190.

Dorier, J.-L. e.
On the teaching of linear algebra.
Band 23 von *Mathematics Education library*.
Kluwer, 2000.

Eilenberg, S. und Mac Lane, S.
General theory of natural equivalences.
Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945): 231–294.

Eilenberg, S. und Steenrod, N. E.
Foundations of algebraic topology.
Princeton University Press, 1952.

Frobenius, G.

Ueber das Pfaffsche Problem.
J. Reine Angew. Math. 82 (1877): 230–315.

Grothendieck, A.
Sur quelques points d'algèbre homologique.
Tôhoku Math. J. 9 (1957): 119–221.

Hahn, H.
Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen.
J. Reine Angew. Math. 157 (1927): 214–229.

Hoffkamp, A.
Stoffdidaktik im Fokus - Das Beispiel Lineare (Un-)Abhängigkeit.
In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. WTM Verlag, 2014.

Krömer, R.
Tool and object. A history and philosophy of category theory.
Band 32 von *Science Network Historical Studies*.
Basel: Birkhäuser, 2007.

Krömer, R. und Corfield, D.

The duality of space and function, and category-theoretic dualities.
In *14th CLMPS 2011 Proceedings*. 2014.
Pierre Edouard Bour and Gerhard Heinzmann and Wilfrid Hodges and Peter Schroeder-Heister (ed.); to appear.

Mac Lane, S.
Duality for Groups.
Bull. Amer. Math. Soc. 56 (1950): 485–516.

Nagel, E.
The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry.
Osiris 7 (1939): 143–224.

Poincaré, H.
Analysis situs.
Journal de l'École polytechnique 1 (1895): 1–121.

Pontrjagin, L.
Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze.
Math. Ann. 105 (1931): 165–205.

—.
The theory of topological commutative groups.
Annals Math. 35 (1934): 361.

Riesz, F.
Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen.
Math. Ann. 69 (1910): 449–497.

Tietze, U., Klika, M., und Wolpers, H.
Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 2: Didaktik der analytischen Geometrie und linearen Algebra.
Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 2000.