Numerische Mathematik 1

9. Übung

Sommersemester 2008

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 17.6., Mittwoch 18.6., Donnerstag 19.6.
Abgabe der Hausübungen: 24.6.;

Hörsaalübungen

Aufgabe 44: *(Ableitung B-Splines)*
Zeigen Sie für die Ableitung eines B-Splines $N_{j,k}$ zum Gitter $\bar{\Delta} = \{\tau_1, \ldots, \tau_{2k+n+1}\}$ gilt:

$$N'_{j,k}(x) = \frac{k}{\tau_{j+k} - \tau_j} N_{j,k-1}(x) - \frac{k}{\tau_{j+k+1} - \tau_{j+1}} N_{j+1,k-1}(x)$$

Aufgabe 45: *(Definition und Rekursion der B-Splines)*
Sei $\Delta = \{x_{-k}, \ldots, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+k}\}$ eine Knotenfolge mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Beweisen Sie, dass die Definition der B-Splines

$$N_{j,k}(x) = (x_{j+k+1} - x_j)[x_j, \ldots, x_{j+k+1}](\cdot - x)_+^k$$

die folgende Rekursionsbedingung erfüllt.

$$N_{j,k}(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+k} - x_j} N_{j,k-1}(x) + \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+k+1} - x_{j+1}} N_{j+1,k-1}(x)$$
$$N_{j,0}(x) = \chi_{[x_j, x_{j+1})}(x) \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

Hausübungen

Aufgabe 46: *(Partition der Eins)*

(a) Es sei ein Gitter $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ gegeben. Zeigen Sie, die B-Splines bilden eine Partition der Eins.

$$\sum_{j=-k}^{n} N_{j,k}(x) = 1 \qquad \forall x \in [a, b],\ k \in \mathbb{N}_0$$

(b) Durch die Kontrollpunkte $d_j \in \mathbb{R}^2$ kann man zum Gitter Δ eine B-Spline-Kurve γ definieren.

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(x) = \sum_{j=0}^{n+k} d_j N_{j,k}(x)$$

Interpretieren Sie die Eigenschaft „Partition der Eins“ für diese Fall geometrisch. Was bedeutet sie für die Lage der Kurve $\gamma(x)$?

(10 Punkte)

Aufgabe 47: *(Minimaler Träger eines kubischen Splines)*
Zeigen Sie: Jede kubische Splinefunktion $s \in S_{3,\Delta}$ mit den Randbedingungen

$$s^{(i)}(x_0) = s^{(i)}(x_n) = 0 \qquad i = 0, 1, 2$$

ist identisch Null ($s \equiv 0$) falls $n < 4$.

(10 Punkte)

Aufgabe 48: *(Kubische Spline-Interpolation)*
Gegeben seien die Punktepaare $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, -2)$ und $(x_3, y_3) = (3, 4)$. Berechnen Sie den interpolierenden kubischen Spline s für natürliche Randbedingungen. Bestimmen Sie dazu die Koeffizienten der Teilpolynome $s_i(x)$ auf $[x_i, x_{i+1}]$ für $i = 0, 1, 2$.

(10 Punkte)