# Numerische Mathematik 1

# 8. Übung

**Sommersemester 2008**

**Bergische Universität Wuppertal**
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 10.6., Mittwoch 11.6., Donnerstag 12.6.
Abgabe der Hausübungen: 17.6.;

## Hörsaalübungen

**Aufgabe 38:** *(Lösen von tridiagonalen LGS's)*
Gegeben sei die symmetrische, tridiagonale Matrix

$$A_4 := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

wobei $a_{ij} \neq 0$ für alle $i, j = 1, \dots, 4$, $a_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, 4$, und ein Vektor $b_4 \in \mathbb{R}^4$.
Entwickeln Sie ausgehend von dieser Matrix einen Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A_n x = b_n$ für $n \geq 1$ mit Hilfe von Gauß-Elemination, der die spezielle, tridiagonale Struktur der Matrix geschickt ausnützt. Dabei sei $A_n$ stets eine positive, symmetrische Matrix, mit $a_{ij} \neq 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ und $a_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Welche Komplexität hat dieser Algorithmus?

**Aufgabe 39:** *(Periodische Splines)*
Für $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$, $n > 0$ seien $(x_i, f_i)$, $i = 1, \dots, n$, die Stützstellen des periodischen kubischen Splines

$$s(x) := a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

wobei $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$ für $k = 0, \dots, n-1$. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, mit dessen Hilfe die Werte $a_k, b_k, c_k, d_k$ für $k = 0, \dots, n-1$ bestimmt werden können.

**Aufgabe 40:** *(Kubische Splines)*
Gegeben sei die stückweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & \text{für} \quad x \in ]-\infty, 1], \\ c(x-2)^2 & \text{für} \quad x \in [1, 3], \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & \text{für} \quad x \in ]3, \infty[, \end{cases}$$

mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle Werte der Parameter $a, b, c, d, e$, für die $f$ einen kubischer Spline darstellt.

b) Geben Sie alle Werte der Parameter $a, b, c, d, e$ an, so dass der kubische Spline $f$ die folgende Iterpolationsaufgabe löst:

| $x$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 26 | 7 | 25 |

## Hausübungen

**Aufgabe 41:** *(Abgebrochene Potenzen)*
Zeigen Sie: Die abgebrochenen Potenzen bilden zusammen mit den Monomen eine Basis des Splineraumes $S_{k,\Delta}$.

$$\{(x - x_i)_+^k, i = 1, \dots, n-1\} \cup \{x^i, i = 1, \dots, k\}$$

mit $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ und

$$x_+^l := \begin{cases} x^l & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(10 Punkte)

**Aufgabe 42:** *(Spline-Funktionen?)*
Es sei $a < 0 < b$. Geben Sie (mit Begründung) an ob die folgenden Funktionen kubische Splines sind, d.h. im Raum $S_{3,\Delta}$ liegen?

$$\text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + x & \text{für } a \leq x \leq 0 \\ x^3 - x & \text{für } 0 < x \leq b \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{für } a \leq x \leq 0 \\ \cos(3\arccos(x)) & \text{für } 0 < x \leq b \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{für } a \leq x < 0 \\ 0 & \text{für } 0 \leq x \leq b \end{cases}$$

(10 Punkte)

**Aufgabe 43:** *(B-Splines)*
Zeigen Sie:

$$N_{j,k}(x) > 0 \quad \forall x \in (x_j, x_{j+k+1})$$

(10 Punkte)