# Numerische Mathematik 1

# 7. Übung

**Sommersemester 2008**

**Bergische Universität Wuppertal**
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 3.6., Mittwoch 4.6., Donnerstag 5.6.
Abgabe der Hausübungen: 10.6.;

## Hörsaalübungen

**Aufgabe 32:** *(Eine spezielle Quadraturformel)*
Geben Sie eine Quadraturformel der Form

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \approx Q(f) = \alpha f(0) + \beta f(\pi)$$

an, die für Funktion der Gestalt

$$f(x) = a + b\cos x$$

exakt ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Quadraturformel damit automatisch auch für alle Funktionen der Form

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos\big((2k+1)x\big) + b_k \sin(kx)$$

exakt ist.

**Aufgabe 33:** *(Romberg-Quadratur)*
Jedes Rombergsche Integrationsverfahren $T_{i,k}$ für $i \leq k$ stellt eine Quadraturformel der Form

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j^{(n)} f(\tau_j^{(n)})$$

mit gewissen Stützstellen und nichtnegativen Gewichten dar. Zeigen Sie, dass $T_{3,3}$ für die Schrittweiten $h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{b-a}{2}$ gerade die Simpsonregel liefert.

**Aufgabe 34:** *(Gauß-Quadratur)*
Berechnen Sie mittels Gauß-Quadratur für 2 bzw. 3 Stützstellen Näherungslösungen des Integrals

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x}\sin(2x)\,dx$$

und vergleichen Sie diese mit dem exakten Wert des Integrals.

## Hausübungen

**Aufgabe 35:** *(Romberg-Integration)*
Zeigen Sie: Für das Romberg Verfahren $T_{3,3}$ erhält man mit der Schrittweiten-Folge $h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{h_1}{4} = \frac{b-a}{4}$ gerade die Milne-Regel.

(10 Punkte)

**Aufgabe 36:** *(Newton-Cotes Formeln)*
Ein Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei an den angegebenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_4$ gegeben. Approximieren Sie den Integralwert

$$\int_{1.8}^{2.6} f(x)\,dx$$

mit der Milne-Regel und der summierten Trapezregel.

| $x$ | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.12014 | 4.42569 | 6.04241 | 8.03014 | 10.46675 |

(10 Punkte)

**Aufgabe 37:** *(Romberg-Quadratur)*
Berechnen Sie eine Approximation für den Wert des Integrals

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

durch Romberg-Integration. Berechnen Sie dazu die Trapezsummen zu den Schrittweiten $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ und extrapolieren Sie diese Ergebnisse für $h = 0$.

(10 Punkte)