Numerische Mathematik 1

6. Übung

Sommersemester 2008

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 27.5., Mittwoch 28.5., Donnerstag 29.5.
Abgabe der Hausübungen: 3.6.;

Hörsaalübungen

Aufgabe 26: *(Orthogonalität der Legendre Polynome)*
Zeigen Sie die Legendre Polynome

$$P_k = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \tag{1}$$

sind orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx \tag{2}$$

Aufgabe 27: *(Gauß-Quadratur)*
Berechnen Sie die Gewichte und Stützstellen der Gaußquadratur auf $[-1, 1]$ für $n = 3$ zur Gewichtsfunktion

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Verwenden Sie dazu (vgl. Bronstein)
$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x)$ und $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1 - x^2}$

Aufgabe 28: *(Rekursionsformel Legendre Polynome)*
Zeigen Sie, dass die Legendre Polynome P_k $k = 0, 1, 2, \ldots$ durch das folgende zweistufige-rekursierve Schema berechnet werden können.

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Verwenden Sie dazu: $P_k(1) = 1 \; \forall k \in \mathbb{N}$

Hausübungen

Aufgabe 29: *(Gauß-Quadratur)*
Berechnen Sie Approximationen für das folgende Integral mit Hilfe der Gauß–Quadratur (Legendre Gewichtsfunktion) mit 2 und 3 Knoten ($n = 1$ bzw. $n = 2$) und vergleichen Sie diese Näherungen mit dem exakten Wert des Integrals.

$$\int_{1}^{1.5} x^2 \ln(x) \, dx$$

(10 Punkte)

Aufgabe 30: *(Tschbyscheff Polynome)*
Zeigen Sie: Die Tschebyscheff Polynome sind ω-orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Tipp: $\cos(\phi + \psi) + \cos(\phi - \psi) = 2 \cos \phi \cos \psi$

(10 Punkte)

Aufgabe 31: *(Extrapolation – Lemma 4.17)*
Beweisen Sie die Aussage von Lemma 4.17 aus der Vorlesung:
Für die Lagrange Polynome

$$L_{j,n-1}(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

zu den Stützstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} L_{j,n-1}(0) \, x_j^m = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{für } 1 \leq m < n \\ (-1)^{n-1} x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n & \text{für } m = n \end{cases}$$

(10 Punkte)