

Numerische Mathematik 1

5. Übung

Sommersemester 2008



Bergische Universität Wuppertal

Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung

Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 20.5., Mittwoch 21.5., Donnerstag 1.5. *Übung entfällt!*

Abgabe der Hausübungen: 27.5.;

Hörsaalübungen

Aufgabe 19: (Newtonsche 3/8-Regel)

Rechnen Sie die Newtonsche 3/8 Regel (Newton-Cotes Formel für $n=3$) nach. Berechnen Sie die Koeffizienten λ_i und geben Sie die Ordnung p der 3/8 Regel an, d.h. den maximalen Polynomgrad p für den diese Quadraturmethode exakt integriert.

Aufgabe 20: (Die Koeffizienten der Newton-Cotes Formeln)

Zeigen Sie: Die Koeffizienten λ_i in den Newton-Cotes Formeln summieren sich zu 1.

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i^{(n)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 21: (Gauß-Quadratur gewichteter Integrale)

Bei der Gauß-Quadratur sind die Stützstellen der Interpolation nicht wie bei den Newton-Cotes Formeln fest und äquidistant, sondern können selbst so gewählt werden, dass Polynome möglichst hohen Grades exakt interpoliert und damit integriert werden.

Geben Sie eine Quadraturformel für das gewichtete Integral I an.

$$I(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$$

Bestimmen Sie $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in [0, 1]$ so, dass die Quadraturformel

$$I(f) \approx Q(f) = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(1)$$

für Polynome vom Höchstgrad 2 exakt ist.

Hausübungen

Aufgabe 22: (Fehlerabschätzung für die Mittelpunkregel)

Zeigen Sie, dass sich der Fehler bei numerischer Integration mit der Mittelpunktsregel von der Ordnung $\mathcal{O}(h^3)$ ist.

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx = \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x) dx + \mathcal{O}(h^3)$$
$$\text{mit } g_k(x) = f\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \quad \forall x \in [t_{k-1}, t_k]$$

Geben Sie außerdem die Ordnung des Fehlers für die summierte Mittelpunktsregel an.

(10 Punkte)

Aufgabe 23: (Summierte Simpson-Regel)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$$

mit Hilfe der summierten Simpson Regel zur Schrittweite $h = 0.25$. Vergleichen Sie den berechneten Näherungswert mit dem exakten Wert des Integrals.

(10 Punkte)

Aufgabe 24: (Trapezregel)

Das Integral

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$$

soll mit der summierten Trapezregel berechnet werden. Der dabei auftretende Fehler soll kleiner als 0,0001 sein. Wie klein muss dazu die Schrittweite h gewählt werden? Wieviele Funktionsauswertungen sind dazu nötig?

(10 Punkte)