Numerische Mathematik 1

4. Übung

Sommersemester 2008

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 6.5., Mittwoch 7.5., Donnerstag 8.5.
Abgabe der Hausübungen: 20.5.;

Hörsaalübungen

Aufgabe 13: *(Leibniz Regel für dividierte Differenzen)*
Zeigen Sie:

$$[x_0,\dots,x_n](g\cdot h)=\sum_{j=0}^{n}\big([x_0,\dots x_j]g\big)\cdot\big([x_j,\dots x_n]h\big)$$

Aufgabe 14: *(Linearität der dividierten Differenzen)*
Zeigen Sie:

$$[x_0,\dots,x_n](\lambda g+\mu h)=\lambda[x_0,\dots,x_n]g+\mu[x_0,\dots,x_n]h$$

Aufgabe 15: *(Polynom Approximation)*
Es sei der folgende Datensatz von Stützstellen und Funktionswerten gegeben.

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	0	1
f_i	-1	1	-1	2

(a) Zeigen Sie: Es existiert kein Polynom $p\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ das den Datensatz interpoliert.

(b) Geben Sie das $\tilde{p}\in\mathcal{P}_2$ an für das die Funktion

$$\Delta(p):=\sum_{i=1}^{4}\big(f_i-p(x_i)\big)^2$$

ihr Minimum annimmt.

Hausübungen

Aufgabe 16: *(Inverse Interpolation)*
Es sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ streng monoton und an den Stützstellen $x_0,\dots,x_n$ bekannt. Bestimmen Sie zu einem gegebenen Wert $\bar{y}=-0.5$ dessen Urbild $\bar{x}\in\mathbb{R}$ $(f(\bar{x})=\bar{y})$. Ersetzen Sie dazu die Funktion f^{-1} durch ihr interpolierendes Polynom $p\in\mathcal{P}$ mit $p(f_i)=x_i$ und berechnen Sie mit Hilfe des *Neville-Aitken* Schemas $p(\bar{y})$ als Näherung für $\bar{x}=f^{-1}(\bar{y})$.

i	0	1	2	3
x_i	-24	-5	0	9
f_i	-2	-1	0	1

(10 Punkte)

Aufgabe 17: *(Beweis der Dividierten Differenzen)*
Betrachte die Newton–Darstellung des Interpolationsproblems:

$$P_n(f|x_0,\dots,x_n)(x)=[x_0]f+(x-x_0)[x_0,x_1]f+(x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2]f+\dots$$
$$\dots+(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})[x_0,\dots,x_n]f$$

Zeigen Sie: Die Vorfaktoren $[x_0,\dots,x_n]f$ sind Dividierte Differenzen, d.h. sie lassen sich durch folgendes rekursives Schema berechnen. (Tipp: Lemma 3.10 aus der Vorlesung und Koeffizientenvergleich)

$$[x_0,\dots,x_n]f=\frac{[x_1,\dots,x_n]f-[x_0,\dots,x_n]f}{x_n-x_0}$$

mit $[x_i]f=f(x_i)$.

(10 Punkte)

Aufgabe 18: *(Newton–Darstellung und Interpolationsfehler)*
Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^3[a,b]$ ist an den Stellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_1 = 1$ bekannt.

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
f_i	-3	5	9

(a) Bestimmen Sie zu den oben angegebenen Daten das Interpolationspolynom $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ in Newtondarstellung.

(b) Wie groß kann der Interpolationsfehler

$$\|f - p\|_\infty := \max_{x \in \{-1,1\}} \left| f(x) - p(x) \right|$$

maximal werden, wenn $|f^{(3)}(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [-1,1]$ bekannt ist.