Numerische Mathematik 1

3. Übung

Sommersemester 2008

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 29.4., Mittwoch 30.4., Donnerstag 1.5. *Übung entfällt!*
Abgabe der Hausübungen: 6.5.;

Hörsaalübungen

Aufgabe 7: *(Determinate der Vandermonde Matrix)*
Zeigen Sie, dass sich die Determinante der Vandermonde Matrix V_n wie folgt berechnet:

$$\det(V_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j)$$

Aufgabe 8: *(Tschebyscheff Polynome)*
Auf dem Intervall $[-1, 1]$ ist das n-te Tschebyscheff Polynom definiert

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad x \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, die Tschebyscheff Polynome tragen ihren Namen zurecht, d.h. es handelt sich dabei wirklich um Polynome vom Grad n, die durch die Rekursionsformel

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n \geq 1$$

mit $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$ berechnet werden können.

Aufgabe 9: *(Lagrange Interpolation)*
Für die Interpolationspunkte $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$ sind die Lagrange Polynome wie folgt definiert:

$$L_j(x) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, dass die Lagrange Polynome $L_j(x)$ die folgende Gleichung für alle Polynome $p \in \pi_n(\mathbb{R})$ erfüllen.

$$\sum_{j=0}^{n} L_j(x) p(x_j) = p(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Hausübungen

Aufgabe 10: *(Fehlerrechnung für Festkommazahlen)*
Seien a, b, c Festkommazahlen mit N Nachkomma-Dezimalstellen: $0 < a, b, c \leq 1$, sei außerdem das Produkt zweier Festkommazahlen $a * b$ wie folgt definiert: Zu $a \cdot b$ wird $0.5\ 10^{-N}$ addiert, danach die Zahl nach der N-ten Stelle abgebrochen.

(a) Geben Sie eine Schranke für $|(a * b) * c - a \cdot b \cdot c|$ an.

(b) Um wieviele Einheiten der N-ten Nachkommastelle können sich $(a * b) * c$ und $a * (b * c)$ maximal unterscheiden?

(10 Punkte)

Aufgabe 11: *(Lagrange Polynome)*
Zeigen Sie die Lagrange Polynome L_j, $j = 0, \ldots, n$ bilden eine Basis des Raums $\pi_n(\mathbb{R})$, der Polynome vom Grad n.

(10 Punkte)

Aufgabe 12: *(Polynom Interpolation)*
Berechnen Sie für die Stützstellen (x_i, f_i) in der Tabelle das Interpolationspolynom p durch Interpolation in Monombasis *und* mit Hilfe der Lagrange Polynome. Wie bewerten Sie die Verfahren im Hinsicht auf den Rechenaufwand?

x_i	-2	0	1	2	4
f_i	40	10	10	-4	-2

(10 Punkte)