Numerische Mathematik 1

2. Übung

Sommersemester 2008

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 22.04.08, Mittwoch 23.04.08, Donnerstag 24.04.08
Abgabe der Hausübungen: 29.04.08 in der Vorlesung oder in der Übung.

Hörsaalübungen

Aufgabe 1: *(Zahlendarstellung in verschiedenen Basen)*
Es bezeichne $x = (a)_b$ die Darstellung der Zahl $x \in \mathbb{R}$ zur Basis $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$.

(a) Berechnen Sie den Wert von

$$(6.35)_8 + (4.921875)_{10} + (11110.101)_2,$$

und stellen Sie das Ergebnis jeweils zur Basis $b \in \{2, 8, 10\}$ dar.

(b) Bestimmen Sie die b-adische Entwicklung von $\left(\frac{3}{32}\right)_{10}$ zur Basis $b = 4$.

Aufgabe 2: *(b-adische Darstellung natürlicher Zahlen)*
Zeigen Sie: Für jede Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ eines Zahlensystems lässt sich jede natürliche Zahl $n > 0$ in der b-adischen Form $(a_m \ldots a_1 a_0) := \sum_{k=0}^{m} a_k b^k$ darstellen, wobei die Stellenzahl $m + 1 \in \mathbb{N}$ und die Ziffern $a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ mit $a_m \neq 0$ eindeutig durch n bestimmt sind.
(Hinweis: Einziges benötigtes Hilfsmittel ist die Division mit Rest, $n = q \cdot b + r$, mit eindeutig bestimmten Zahlen $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. q ist dabei die größte ganze Zahl mit $q \cdot b \leq n$.)

Aufgabe 3: *(Fehlerverstärkung bei der Division)*
Zeigen Sie, dass der relative Fehler bei der Division zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ auf einem Computer im Rahmen der Maschinengenauigkeit bleibt.

Hausübungen

Aufgabe 4: *(Zahlendarstellung in verschiedenen Basen)*
Es bezeichne $x = (a)_b$ die Darstellung der Zahl $x \in \mathbb{R}$ zur Basis $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die b-adische Entwicklung der Zahl $x = (0.1)_{10}$ zur Basis $b = 2$ periodisch ist, und geben Sie diese Darstellung an.

(b) Bestimmen Sie diejenige Zahl $x \in \mathbb{R}$ zur Basis $b = 10$, die die b-adische Entwicklung

$$x = (0.0\overline{6314})_8$$

zur Basis $b = 8$ besitzt.

Aufgabe 5: *(b-adische Darstellung rationaler Zahlen)*
Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ kann bekanntlich als unendlicher Dezimalbruch bezüglich einer Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ dargestellt werden (b-adische Entwicklung). Zeigen Sie:

(a) Eine Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist genau dann rational, wenn ihre b-adische Entwicklung entweder endlich oder periodisch ist.

(b) Die Periodenlänge von p/q, $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, beträgt höchstens $q - 1$.

Aufgabe 6: *(Fortpflanzung von Rundungsfehlern)*
Es bezeichne $\mathbb{M}(b, m, l)$ die Menge der Maschinenzahlen zur Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, mit Mantissenlänge $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und Exponentenlänge $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Es sei vorausgesetzt, dass die elementaren Rechenoperationen $(+, -, \cdot, /)$ mit einem Fehler von höchstens der doppelten Rundungsfehlereinheit $u := 2 \cdot \frac{b^{1-m}}{2} = b^{1-m}$ durchführbar sind (also dem *Standardmodell der Gleitkommaarithmetik* genügen), d.h. es gilt:

$$x \otimes y = (x \times y)(1 + \delta), \text{ mit } |\delta| \leq u, \; \times \mathrel{\widehat{=}} (+, -, \cdot, /).$$

Für $x, y \in \mathbb{M}(b, m, l)$ soll der Wert des Ausdrucks $z := x^2 - y^2$ berechnet werden.

(a) Geben Sie mit Hilfe der elementaren Rechenoperationen $(+, -, \cdot, /)$ zwei Methoden (direkt, Binomische Formel) an, um den Wert von z zu bestimmen.

(b) Entscheiden Sie durch eine Abschätzung des relativen Fehlers der beiden Methoden, welche sich besser zur Berechnung von z eignet.