Numerische Mathematik 1

12. Übung

Sommersemester 2008

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 8.7., Mittwoch 9.7., Donnerstag 10.7.
Abgabe der Hausübungen: 15.7.;

Hörsaalübungen

Aufgabe 63: *(Konvergenzgeschwindigkeit)*
Es sei $|\cdot|$ eine beliebige Vektornorm auf dem $\mathbb{R}^m$, mit zugehöriger submultiplikativer Matrixnorm $\|\cdot\|$. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ lässt sich zeigen, dass für den Spektralradius $\rho(A)$ gilt:

$$\rho(A) = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}. \tag{1}$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^m$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, und es gelte $\rho(I - Q^{-1}A) < 1$. Zeigen Sie mit Hilfe von (1), dass für jeden Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|x^{(n)} - x\|}{\|x^{(0)} - x\|}\right)^{1/n} \le \rho(I - Q^{-1}A).$$

Was bedeutet dieses Resultat anschaulich?

Aufgabe 64: *(Lineare Ausgleichsrechnung)*
Mit 5 Messungen erhält man folgende Wertetabelle:

i	1	2	3	4	5
x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	1	0	1	1

Es soll die Ausgleichsgerade $y = mx+t$ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Gesucht sind also Zahlen $m, t \in \mathbb{R}$, für die $\sum_{i=1}^{5} [mx_i + t - y_i]^2$ minimal wird.

(a) Formulieren Sie das gegebene Problem zunächst als lineares Ausgleichsproblem.

(b) Lösen Sie das aufgestellte lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der Normalengleichung.

Aufgabe 65: *(Lineare Ausgleichsrechung für Schwingungen)*
Eine Schwingung soll durch eine Funktion der Form

$$y = a\sin t + b\sin 2t$$

approximiert werden. Zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a und b werden in verschiedenen Punkten $t_i,\ i = 1,2,3,4$ die Amplitudenwerte y_i gemessen.

t_i	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$
y_i	0.310^{-8}	4.2	-0.9598	1.4

(a) Stellen Sie mit diesen Messdaten das lineare Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Koeffizienten a und b auf.

(b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem über das Normalengleichungssystem!

(c) Geben Sie die Norm des Defektes $\|b - Ax^*\|_2$ für die Lösung des Ausgleichsproblems an.

(d) Welchen Wert liefert die Ausgleichskurve für $t = \frac{\pi}{6}$?

Hausübungen

Aufgabe 66: *(Haus vom Nikolaus)*
Es seien die Punkte $v_1 = (2,0)^T$, $v_2 = (0,2)^T$, $v_3 = (1,1)^T$, $v_4 = (2,2)^T$, $v_5 = (1,3)^T$, $w_1 = (-2,1)^T$, $w_2 = (\frac{1}{2},1)^T$, $w_3 = (-1,1)^T$, $w_4 = (-\frac{3}{2},2)^T$ und $w_5 = (-\frac{1}{2},\frac{5}{2})^T$ gegeben. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

so, dass

$$\sum_{i=1}^{5} \|Mv_i - w_i\|_2^2 \tag{2}$$

minimal wird.

Hinweis: überlegen Sie sich zunächst, dass das Ausgleichsproblem, in zwei unabhängige Teilprobleme zerfällt, und lösen Sie diese im Anschluss getrennt voneinander.

(10 Punkte)

Aufgabe 67: *(Positiv (semi)definit)*
Zeigen Sie: Ist ein Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semidefinit, dann gilt:

$$a_{jk} \leq \frac{1}{2}(a_{jj} + a_{kk}) \qquad \text{und} \qquad a_{jk} \leq \sqrt{a_{jj}a_{kk}}$$

Ist A positiv definit, so gelten die Ungleichungen sogar strikt.

(10 Punkte)

Aufgabe 68: *(Iterative Verfahren)*
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3/10 & -1/10 & 6/5 \\ -1/10 & 3 & 1/5 & 7/10 \\ 3/10 & -1/5 & 1 & 1/10 \\ 2/5 & -3/10 & 7/10 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

(a) Man zeige, dass in diesem Fall das Jakobi-Verfahren konvergiert.

(b) Was läßt sich über die Konvergenz des Gauß-Seidel Verfahrens sagen?

(c) Bestimmen Sie für den Startwert $x^0 = (0,0,0,0)^\top$ und die Maximums(vektor)norm $\|\cdot\|_\infty$ eine Schranke K, für die gilt:

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq 10^{-4} \quad \forall k \geq K$$

(10 Punkte)