Numerische Mathematik 1

11. Übung

Sommersemester 2008

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 1.7., Mittwoch 2.7., Donnerstag 3.7.
Abgabe der Hausübungen: 8.7.;

Hörsaalübungen

Aufgabe 56: *(Matrixnormen)*
Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, $n \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Spektralnorm $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$,

$$\|A\|_2 := \max_{x\neq 0} \frac{\sqrt{x^\top A^\top A x}}{\sqrt{x^\top x}}$$

eine submultiplikative Matrixnorm ist.

(b) Es bezeichne λ_m den betragsgrößten Eigenwert von $A^\top A$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\|A\|_2 \;=\; \sqrt{\lambda_m}.$$

(c) Zeigen Sie, dass der *Spektralradius* $\rho(A) := \lambda_m$ einer Matrix A keine Matrixnorm darstellt.

Aufgabe 57: *(Spektralradius)*
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und es bezeichne ρ den Spektralradius.

(a) Zeigen Sie: Sind A und B untere Dreiecksmatrizen, so gilt:

$$\rho(AB) \;\leq\; \rho(A)\cdot\rho(B).$$

(b) Gilt die obige Aussage auch für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Aufgabe 58: *(Schurnorm)*
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichne

$$\|A\|_S \;:=\; \left(\sum_{ij=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

die Schurnorm von A.
Zeigen Sie, dass die Schurnorm $\|A\|_S$ mit der euklidischen Norm $|\cdot|_2$ verträglich ist, dass heißt für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|Ax|_2 \;\leq\; \|A\|_S \cdot |x|_2.$$

Hausübungen

Aufgabe 59: *(Invertierbare Matrizen)*
Es bezeichne $\|\cdot\|$ eine beliebige Matrixnorm auf dem $\mathbb{R}^{n\times n}$, und es sei $\mathcal{I}_n$ die Menge aller invertierbarer Matrizen im $\mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{I}_n$ offen ist, und dicht in der Menge aller Matrizen des $\mathbb{R}^{n\times n}$ liegt. Zu zeigen ist also:

(a) Ist $A \in \mathcal{I}_n$, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass auch $B := A + E$ für alle $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mit $\|E\| \leq \delta$ invertierbar ist.

(b) Ist A nicht invertierbar, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine invertierbare Matrix $A_\varepsilon \in \mathcal{I}_n$, so dass $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$.

(10 Punkte)

Aufgabe 60: *(Magisches Quadrat)*
Für $p \in [1, \infty]$ bezeichne $|\cdot|_p$ die p-Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, und für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$\|A\|_p := \max_{x\neq 0} \frac{|Ax|_p}{|x|_p}$$

die zugehörige induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie:
Ist A ein *magisches Quadrat*, das heißt A enthält die Zahlen $1, \ldots, n^2$ so angeordnet, dass alle Zeilen- und Spaltensummen den Wert $\mu_n = n(n^2+1)/2$ haben,

so haben alle p-Matrixnormen den Wert μ_n, wobei $p \in [1, \infty]$.

Hinweis: Bei der Beweisführung dürfen Sie verwenden, dass die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \log \|A\|_{1/x},$$

konvex ist (*Satz von Riesz-Thorin*).

(10 Punkte)

Aufgabe 61: *(Schurnorm)*
Es bezeichne $\|\cdot\|_S$ die Schurnorm auf dem $\mathbb{R}^{n\times n}$, und für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$\mathcal{T}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die Spur von A. Zeigen Sie:

(a) Es gilt: $\sqrt{\mathcal{T}(AA^\top)} = \|A\|_S = \sqrt{\mathcal{T}(A^\top A)}$.

(b) Die Schurnorm ist *orthogonal invariant*, d.h. sind $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale Matrizen ($U^\top U = UU^\top = I$), dann gilt:

$$\|UAV\|_S = \|A\|_S.$$

(10 Punkte)