Numerische Mathematik 1

10. Übung

Sommersemester 2008

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 24.6., Mittwoch 25.6., Donnerstag 26.6.
Abgabe der Hausübungen: 1.7.;

Hörsaalübungen

Aufgabe 49: *(Dreiecksmatrizen)*

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht als Produkt zweier Dreiecksmatrizen darstellbar ist.

(b) Für welche Werte $\tau, \lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ eine eindeutig bestimme LR-Zerlegung?

Aufgabe 50: *(LR-Zerlegung)*
Berechnen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems mit der LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 51: *(Dreiecksmatrizen)*
Beweisen Sie:

(a) Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere Dreiecksmatrix.

(b) Die Inverse einer regulären oberen Dreiecksmatrix ist wieder eine obere Dreiecksmatrix.

Hausübungen

Aufgabe 52: *(Eulerverfahren – allgemein)*
Geben Sie für das allgemeine Randwertproblem zweiter Ordnung

$$u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x)$$
$$\text{mit } a \le x \le b : u(a) = \alpha \text{ und } u(b) = \beta$$

mit Hilfe der zentralen Differenzenformeln für u'' und u' das lineare Gleichungssystem für die Diskretisierung des Problems zur Schrittweite $h = 1/N$ an.

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \qquad u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 53: *(LR-Zerlegung)*
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem, indem Sie eine LR-Zerlegung der Matrix vornehmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -8 & -3 & -6 \\ 3 & 14 & 5 & 8 \\ -4 & -20 & -7 & -8 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 54: *(Cholesky-Zerlegung)*
Es seien die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 12 & -18 & 36 \\ 12 & 5 & -4 & 11 \\ -18 & -4 & 77 & 12 \\ 36 & 11 & 12 & 54 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 4 \\ -91 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie A ist positiv definit.

(b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$.

Siehe Rückseite !!!

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(d) Treten in praktischen Anwendungen große symmetrische Matrizen auf, die nicht durch die Modellierung offensichtlich positiv definit sind, so muss zunächst überprüft werden ob diese positiv definit sind und damit das Cholesky-Verfahren anwendbar ist.

Skizzieren Sie eine Erweiterung des Gauß–Algorithmus (Pseudocode), der eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n} : S^\top = S$ möglichst effizient auf „Positiv-definit-heit“ überprüft und geben Sie dessen Komplexität an.

(10 Punkte)