Numerische Mathematik 1

1. Übung

Sommersemester 2008

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik, Angewandte Mathematik / Optimierung
Prof. Dr. Klamroth, Dipl.-Technomath. Stiglmayr

Hörsaalübungen: Dienstag 15.4., Mittwoch 16.4., Donnerstag 17.4.

Dieses erste Übungsblatt, das ausnahmsweise nur aus Hörsaalübungen besteht, soll wichtigen Stoff der Vorlesungen Analysis I/II und Lineare Algebra I/II wiederholen.

Hörsaalübungen

Aufgabe 1: *(Taylorreihe)*

(a) Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion $\ln(1+x)$ um den Punkt $x_0 = 0$ an, und bestimmen Sie daraus eine Näherungsformel für den Wert von $\ln(2)$.

(b) Zeigen Sie, dass sich aus dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) die folgende Reihenentwicklung ableiten lässt:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Geben Sie auch in diesem Fall eine Näherungsformel für den Wert von $\ln(2)$ an, und vergleichen Sie sie mit dem Resultat aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 2: Eine häufig gebrauchte Abschätzung für $(1+x)^n$ ist:

$$(1+x)^n \approx 1 + xn \qquad \text{für } x \ll 1$$

(a) Begründen Sie, warum dies eine gegeignete Approximation ist.

(b) Geben Sie für $n = 4$ eine Formel für die Genauigkeit der Abschätzung an.

Aufgabe 3: *(Gaußsches Eliminationsverfahren)*

(a) Berechnen Sie durch Gaußelemination der Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ihre Determinante:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 4 & -7 & -18 \\ -1 & -12 & 0 & -11 \\ 0 & 24 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Wieviele elementare Rechenoperationen $(+,-,\cdot,:)$ waren dazu nötig?
(*Hinweis: Die Zahl der Rechenoperationen kann – je nach gewählten Rechenweg – variieren. Geben Sie die Anzahl der Rechenoperationen für ihre Lösung von Aufgabe (a) an.*)

(c) Geben sie die maximal nötige Zahl von Rechenoperation einer Gaußelemination für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in Abhänigkeit der Größe n der Matrix an.

Aufgabe 4: *(Äquivalenz von Normen)*

Zwei Normen $\|\bullet\|_A$ und $\|\bullet\|_B$ auf einem Vektorraum V heißen äquivalent, falls es Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass gilt:

$$c_1\|x\|_B \le \|x\|_A \le c_2\|x\|_B \quad \forall x \in V.$$

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Normen

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

(b) Es sei $V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ der Raum der stetigen reellen Funktionen auf dem Intervall $I = [0,1]$. Zeigen Sie, dass die beiden Normen

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|dx \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty := \max_{x\in I}\{|f(x)|\}$$

auf V nicht äquivalent sind.
(*Hinweis:* Betrachten Sie hierfür die Funktion $f_n(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.)