Algorithmus 7.6: Branch and Bound Algorithmus für das TSP

(Input) $G = (N, A)$ *vollständiger (Di-)graph; Kosten* c_{ij} $\forall(i, j) \in A$.

(1) **Anfangslösung:**
Bestimme eine Hamilton'sche Tour mit Hilfe eines heuristischen Verfahrens;
sei z^* *der Zielfunktionswert (obere Schranke).*

(2) **Anfangsrelaxation:**
Löse das relaxierte Problem ohne die Subtour Eliminations Bedingungen;
sei $\bar{z}_1$ *der Zielfunktionswert (untere Schranke).*
Falls $\bar{z}_1 \geq z^*$ *(STOP), die heuristische Lösung ist optimal.*
Sonst wird das aktuelle Problem durch den Knoten P_1 *des Branch and Bound Trees repräsentiert, und er ist der einzige aktive Knoten.*

(3) **Branch and Bound Verfahren:**
Existiert ein aktiver Knoten im Branch and Bound Tree?
Falls ja: Wähle eine aktiven Knoten P_k *mit der besten unteren Schranke, gehe zu Step (4).*
Falls nein: Die beste bekannte zulässige Tour ist optimal. Falls keine solche Tour bekannt ist, dann gibt es keine zulässige Tour.

(4) *Enthält die Lösung im Knoten* P_k *Subtouren?*
Falls ja: Gehe zu Step (5).
Falls nein: (STOP), die Lösung im Knoten P_k *ist optimal.*

(5) **Branching:**
Die Tour $(1, 2, \ldots, r)$ *sei die Subtour mit der kleinsten Anzahl an Kanten, die nicht bereits auf den Wert 1 fixiert sind. Verzweige vom Knoten* P_k *zu neuen Knoten* $P_{s+1}, P_{s+2}, \ldots, P_{s+r}$*, so dass zusätzlich zu den bereits fixierten Variablen im Knoten* P_{s+1} *der Wert* $x_{12} := 0$ *fixiert wird und in jedem Knoten* P_{s+j}*,* $j = 2, \ldots, r$ *die Werte* $x_{j,j+1} := 0$ *(wobei* $x_{r,r+1} = x_{r,1}$*) und* $x_{i,i+1} := 1$ $\forall i = 1, \ldots, j$ *fixiert werden (alle Kanten vor der ausgeschlossenen Kante werden in die Tour aufgenommen).*

(6) **Bounding:**
Für jeden Knoten P_{s+j}*:*
Löse ein Zuordnungsproblem mit den in Step (5) fixierten Variablenwerten.
Der Zielfunktionswert sei $\bar{z}_{s+j}$.
Falls $\bar{z}_{s+j} \geq z^*$*, lösche den Knoten* P_{s+j} *(fathoming).*
Falls $\bar{z}_{s+j} < z^*$ *und die Lösung keine Subtouren enthält, setze* $z^* := \bar{z}_{s+j}$.
Falls $\bar{z}_{s+j} < z^*$ *und die Lösung Subtouren enthält, so ist der Knoten* P_{s+j} *aktiv.*
Gehe zu Step (3).

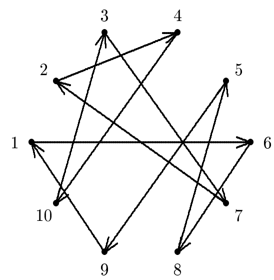
(Output) *Optimale TSP Tour.*

Beispiel 7.7:

Gegeben sei ein TSP mit $n = 10$ und der folgenden Abstandsmatrix $C = (c_{ij})$:

$$C = \begin{pmatrix} - & 9 & 8 & 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & - & 6 & 1 & 3 & 6 & 1 & 9 & 9 & 7 \\ 9 & 2 & - & 8 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & - & 5 & 4 & 8 & 9 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 6 & 5 & - & 3 & 7 & 6 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 8 & 2 & 8 & - & 9 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 6 & 5 & - & 4 & 2 & 8 \\ 7 & 7 & 6 & 1 & 1 & 9 & 4 & - & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 9 & 6 & 2 & 8 & 6 & 3 & - & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 6 & 7 & 7 & 5 & 7 & - \end{pmatrix}$$

Eine der Lösungen des Zuordnungsproblems enthält die zwei Subtouren $(6, 8, 5, 9, 1, 6)$ und $(2, 4, 10, 3, 7, 2)$ und hat Kosten 18:

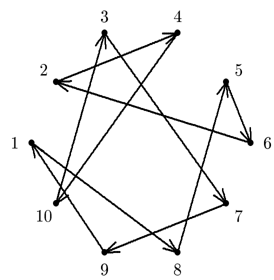


Branching wird auf der ersten dieser Subtouren ausgeführt, und $r = 5$ Teilprobleme werden erzeugt mit den folgenden Mengen einbezogener und ausgeschlossener Kanten:

Knoten P_2: $x_{68} = 0$
Knoten P_3: $x_{85} = 0$; $x_{68} = 1$
Knoten P_4: $x_{59} = 0$; $x_{68} = x_{85} = 1$
Knoten P_5: $x_{91} = 0$; $x_{68} = x_{85} = x_{59} = 1$
Knoten P_6: $x_{16} = 0$; $x_{68} = x_{85} = x_{59} = x_{91} = 1$.

Die Lösungen der zugehörigen Zuordnungsprobleme haben Zielfunktionswerte von 18, 19, 18, 19 bzw. 19.

Im nächsten Schritt wird ein aktiver Knoten mit kleinstem Zielfunktionswert ausgewählt, z.B. der Knoten P_2. Die Lösung, die im Knoten P_2 generiert wird, enthält die zwei Subtouren $(7, 2, 7)$ und $(1, 6, 4, 10, 3, 8, 5, 9, 1)$. Branching wird daher auf der ersten dieser Subtouren ausgeführt. Das erste der beiden resultierenden Teilprobleme mit $x_{72} = 0$ (zusätzlich zu $x_{68} = 0$) liefert den Hamilton'schen Kreis $(1, 8, 5, 6, 2, 4, 10, 3, 7, 9, 1)$ mit Kosten 18. Da der Knoten P_7 aktiv ist und minimalen Zielfunktionswert hat, ist diese Tour optimal.



Der Branch and Bound Tree sieht nun folgendermaßen aus: