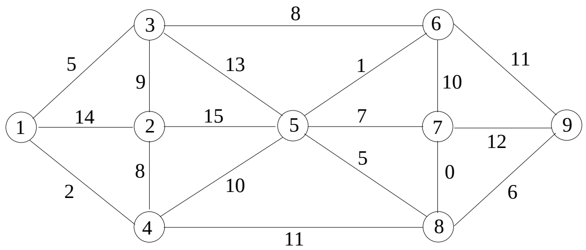
Universität Erlangen-Nürnberg
Naturwissenschaftliche Fakultät I
Sommersemester 2006
Prof. Dr. K. Klamroth
Eva Bijick

04. 05. 2006

Netzwerkoptimierung
Übungsblatt 2

Problem 1:
Gegeben sei der folgende Graph $G = (N, A)$:



Bestimmen Sie einen minimalen spannenden Baum von G

(a) mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal

(b) mit Hilfe des Algorithmus von Prim

(c) mit Hilfe des Algorithmus von Sollin.

Problem 2:
Sei $T = (N, A(T))$ ein spannender Baum von $G = (N, A)$. Für $i, j \in N$ sei mit $\beta[i, j]$ diejenige Kante in T bezeichnet, die die minimalen Kosten unter allen Kanten hat, die auf dem Weg von i nach j in T liegen. Geben Sie einen (effizienten!) Algorithmus an, mit dem man $\beta[i, j]$ für alle Paare $[i, j] \in N \times N$ bestimmen kann.

Problem 3:
Sei $T^* = (N, A(T^*))$ ein minimaler spannender Baum von $G = (N, A)$. Für jede Kante $[i, j] \in A$ wird als *Kostenintervall* diejenige Menge aller Gewichte $c_{ij} \geq 0$ bezeichnet, für die T^* ein minimaler spannender Baum bleibt. Geben Sie einen (effizienten!) Algorithmus an, der das Kostenintervall für eine gegebene Kante $[i, j] \in A$ bestimmt.

Problem 4:
Beweisen Sie für einen spannenden Baum $T = (N, A(T))$ des Graphen $G = (N, A)$:

(a) T hat mindestens zwei Blätter.

(b) T hat genau $n - 1$ Kanten.

(c) Je zwei Knoten sind in T durch genau einen Weg verbunden.

(d) $T + a := (N, A(T) \cup \{a\})$ enthält für jedes $a \in A \setminus A(T)$ genau einen Kreis.

(e) Sei $a \in A \setminus A(T)$ und C der Kreis in $T + a$ aus (d). Dann ist $T + a \setminus \tilde{a} := (N, A(T) \cup \{a\} \setminus \{\tilde{a}\})$ für jedes $\tilde{a} \in C$ ein spannender Baum.

(f) $T \setminus a := (N, A(T) \setminus \{\tilde{a}\})$ zerfällt für jedes $a \in A(T)$ in zwei Unterbäume $(X, A(X))$ und $(\bar{X}, A(\bar{X}))$. $Q = (X, \bar{X})$ ist ein Schnitt in G.

(g) Sei $a \in A(T)$ und $Q = (X, \bar{X})$ der gemäß (f) durch $T \setminus a$ definierte Schnitt. Dann ist $T \setminus a + \tilde{a} := (N, A(T) \setminus \{a\} \cup \{\tilde{a}\})$ für jedes $\tilde{a} \in Q$ ein spannender Baum.