DIPLOMARBEIT

Die motivische Adams-Spektralsequenz

Angefertigt am
Mathematischen Institut

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

März 2012

Von

Sven-Torben Stahn

Aus
Siegburg

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die (homologisch konstruierte) motivische E-Adamsspektralsequenz für ein geeignetes motivisches Ringspektrum E und ein motivisches Spektrum X ist eine trigraduierte Spektralsequenz $E_r^{s,t,u}$ mit Differentialen

$$d_r : E_r^{s,t,u} \longrightarrow E_r^{s+r,t+r-1,u}$$

und E_2-Term

$$E_2^{*,*,*}(X) = \mathrm{Ext}^{*,*,*}_{\pi_{**}(E)}(E_{**}(S), E_{**}(X))$$

Diese Verallgemeinerung der klassischen Adamsspektralsequenz in den motivischen Kontext geht auf Fabien Morel zurück, der die motivische (kohomologisch konstruierte) Adamsspektralsequenz erstmals in seinem Artikel [MOR] beschrieben hat. Die zusätzliche Graduierung im Vergleich zur klassischen Adamsspektralsequenz resultiert aus der Bigraduierung der motivischen Homotopiegruppen und wird motivisches Gewicht genannt. Sie bleibt unter allen Differentialen erhalten und verleiht so der motivischen Sequenz zusätzliche Struktur. Unter geeigneten Vorraussetzungen konvergiert die Spektralsequenz wie im klassischen Fall gegen eine Filtration der Homotopiegruppen der von Bousfield definierten E-nilpotenten Vervollständigung $X_E^\wedge$ des Spektrums X.

Wählt man als Ringspektrum E das motivische Eilenberg-MacLane-Spektrum H, welches die motivische mod-2-Kohomologie repräsentiert, und X als das motivische Sphärenspektrum, so erhält man die motivische Adamsspektralsequenz. Dank der Arbeiten von Voevodsky ist die motivische Steenrodalgebra und die duale motivische Steenrodalgebra über Grundkörpern von Charakteristik 0 bekannt, und für zusätzlich algebraisch abgeschlossene Grundkörper sehr ähnlich zur Struktur der klassischen Steenrod-Algebra. Dies erlaubt die explizite Berechnung des E_2-Term der motivischen Adams-Spektralsequenz mit den Methoden des klassischen Falls. Diese Berechnungen wurden von Dugger und Isaksen in ihrer Arbeit [DI] vorgenommen.
Über geeigneten Grundkörpern, die sich in die komplexen Zahlen einbetten lassen, steht zusätzlich eine Realisierungsabbildung von der Kategorie der motivischen in die der topologischen Spektren zur Verfügung, die eine Vergleichsabbildung von der motivischen in die klassische Adamsspektralsequenz induziert, und so wechselseitige Rückschlüsse zwischen motivischer und klassischer Adamsspektralsequenz erlaubt. Die Vergleichsabbildung über den komplexen Zahlen wird ebenfalls in [DI] besprochen und zur Berechnung von Differentialen in der motivischen Adamsspektralsequenz benutzt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Darstellung der homologischen und kohomologischen Konstruktion der motivischen mod-2-Adams-Spektralsequenz über einem algebraisch

abgeschlossenen Grundkörper von Charakteristik 0 und die Diskussion ihrer Konvergenzeigenschaften anhand der Arbeit von Dugger und Isaksen. Diese verläuft analog zu der im klassischen Fall und greift deshalb in ihren Kernpunkten auf den grundlegenden Artikel von Bousfield [BOU] zurück.
Weiterhin vergleiche ich (in Bezug auf Beweismethodik und Gültigkeit) die Konvergenzaussage [DI, Korollar 6.15] für das motivische Sphärenspektrum mit einer von Hu, Kriz und Ormsby bewiesenen weitergehenden Konvergenzaussage [HKO, Theorem 1, Korollar 3]) für motivische Zellenspektren von endlichem Typ über Basiskörpern von Charakteristik 0 , die eine Verallgemeinerung ihres Ergebnisses [HKO2, Theorem 6] für algebraisch abgeschlossene Körper von Charakteristik 0 darstellt. Abschließend untersuche ich die Vergleichsabbildung von Spektralsequenzen über $\mathbb{C}$ und ergänze die Beweise der Lemmata 8.2, 8.4 und 8.8 aus [DI].
[DI] stellt den Hauptbezugspunkt meiner Arbeit dar, und ich folge ihnen weitgehend in Notation und Vorgehensweise.

In **Kapitel 1** stelle ich die für die Arbeit notwendigen Erkenntnisse über Objekte der (stabilen) motivischen Homotopiekategorie zusammen und kläre Notation und Begrifflichkeiten.
In **Kapitel 2** führe ich die homologische und kohomologische Konstruktion der Adamsspektralsequenz für ein allgemeines motivisches Ringspektrum E und insbesondere für den Fall des motivischen mod-2-Eilenberg-MacLane-Spektrums H aus.
In **Kapitel 3** diskutiere ich die Konvergenzeigenschaften der Adamsspektralsequenz insbesondere für das Sphärenspektrum. Ich stelle (skizzenhaft) ein weitergehendes Theorem von Hu, Kriz und Ormsby über die Konvergenzeigenschaften von motivischen Sphärenspektren endlichen Typs vor [HKO] und vergleiche mit [DI].
In **Kapitel 4** ergänze ich die Untersuchung der Vergleichsabbildung von motivischer und klassischer Adamsspektralsequenz über $\mathbb{C}$ in [DI].

1.1 Vorraussetzungen

1.1.1 Die stabile motivische Homotopiekategorie

Wir arbeiten in der stabilen motivischen Homotopiekategorie SH_k, bzw., um technische Schwierigkeiten mit dem Smashprodukt zu vermeiden, in der Homotopiekategorie der symmetrischen motivischen Spektren über k (Siehe [JAR]). Die Konstruktion der stabilen motivischen Homotopiekategorie erfolgt (unter Unterschlagung aller Details) stufenweise aus der Kategorie glatter Schemata:

Sei Sm/k die Kategorie der glatten Schemata über einem Grundkörper k, und $\Delta^{op}PreShv_{Nis}(Sm/k)$ die Kategorie der simplizialen Prägarben von glatten Schemata. Hier fassen wir Sm/k als Situs, versehen mit der Nisnevich-Topologie, auf. Diese Kategorie stellt das motivische Äquivalent zu der Kategorie der topologischen Räume dar. Wir können Schemata X aus Sm/k als die simpliziale Prägarbe in $\Delta^{op}PreShv_{Nis}(Sm/k)$ einbetten, die in jedem simplizialen Grad den Wert $\mathrm{Hom}_{Sm/k}((-), X)$ annimmt. Ebenso erhalten wir eine Einbettung von simplizialen Mengen in $\Delta^{op}PreShv_{Nis}(Sm/k)$ indem wir einer simpliziale Menge die simpliziale Prägarbe zuordnen, die überall gerade die gegebene simpliziale Menge als Wert annimmt.
Die motivische Modellstruktur auf $\Delta^{op}PreShv_{Nis}(Sm/k)$ ergibt sich zweistufig durch Definition einer lokalen Modellstruktur, in der die Kofibrationen die Monomorphismen und die schwachen Äquivalenzen diejenigen Abbildungen sind, die halmweise (die Nisnevich-Topologie auf Sm/k erlaubt die Bildung von Halmen) schwache Äquivalenzen von simplizialen Mengen induzieren, und anschließender "Kontraktion der affinen Linie", in dem wir die Modellstruktur weiter an einem rationalen Punkt $* \longrightarrow \mathbb{A}^1$ lokalisieren. Die Homotopiekategorie dieser Modellkategorie liefert uns die motivische (unstabile) Homotopiekategorie. Ihre Konstruktion in [MV] ist das Verdienst von Morel und Voevodsky. Insbesondere haben wir zwei Familien von Sphären: einen simplizialen Kreis, die konstante simpliziale Garbe $S_s = \Delta^1/\delta\Delta^1$, und der von $\mathbb{A}^1\backslash 0$ definierte geometrische Kreis S_t. Ihr Smashprodukt $T := S_s \wedge S_t$, das äquivalent zu der Einbettung von $\mathbb{P}^1$ ist, definiert mit den üblichen Definitionen von Spektren und Morphismen von Spektren die Kategorie der T-Spektren $Spt_T(k)$. Die Modellstruktur auf Spt_T ist durch eine Stabilisierung der levelweisen Modellstruktur gegeben. Hinzufügen eines disjunkten Basispunktes und Bildung des Einhängungspektrums liefert eine Einbettung von $\Delta^{op}PreShv_{Nis}(Sm/k)$ in $Spt_T(k)$, und die Homotopiekategorie dieser Modellkategorie ist die stabile motivische Homotopiekategorie.
Stabilisieren wir nicht an T, sondern nur an S_s, so erhalten wir die Kategorie der S^1-Spektren. (Siehe [MOR2, Kapitel 3]). Durch Stabilisierung an T erhalten wir einen Pushforward von den S^1-Spektren in die Kategorie der T-Spektren.
In Übereinstimmung mit der Notation von Dugger und Isaksen gebe ich S_s den Bigrad $(1,0)$ und S_t den Bigrad $(1,1)$, und definiere $S^{p,q} := S_s^{\wedge(p-q)} \wedge S_t^{\wedge q}$ für $p \geq q$. In der in [HKO] verwendeten Notation entspricht dies der Sphäre $S^{(p-q)+q\alpha}$ bzw. umgekehrt $S^{m+n\alpha} = S^{m+n,n}$. In der Kategorie der motivischen T-Spektren erhält man durch die formalen Umkehrungen des Suspensionsfunktors Σ_T beliebige Sphären $S^{p,q}$, und ent-

sprechend bigraduierte Homotopiegruppen $\pi_{p,q}(X) := [S^{p,q} \wedge S, X] =: [S, X]_{p,q}$. $Spt_T(k)$ ist trianguliert, und das Smashprodukt mit den simplizialen Sphären $S^{(n,0)}$ modelliert den Shift [n] in der triangulierten Struktur von $Sp_T(k)$.

Für alle Teile der Arbeit sei die Charakteristik des Grundkörpers 0 (Nur in diesem Fall ist die motivische Steenrod-Algebra bekannt) und überall dort, wo nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist, sei k algebraisch abgeschlossen.

1.1.2 Milnor-k-Theorie, Milnor-Witt-Ring

Sei k ein Körper. Die Milnor-k-Theorie von k ist definiert als

$$K_*^M(k) := T^*k^\times/(a \otimes (1-a)|a \neq 0, 1) \tag{1.1.2.1}$$

Hierbei bezeichnet $T^*k^\times$ die Tensoralgebra der multiplikativen Gruppe von k.
Sei $K_*^{MW}(k)$ definiert als der Quotient von $T^*k^\times[\eta]$ (η von Grad -1) durch das von den folgenden Relationen aufgestellte Ideal:

- $ab = a + b + \eta$
- $a(1-a) = 0$
- $a\eta = \eta a$
- $\eta(2 + [-1]\eta) = 0$

(für $a, b \in k^\times$)

Es gilt $K_*^{MW}(k)/(\eta) = K_*^M(k)$.

1.1.3 Bekannte Informationen über die stabilen motivischen Homotopiegruppen

Die beiden bekannten Theoreme über die stabilen Homotopiegruppen des motivischen Sphärenspektrums beschreiben zum einen die Homotopiegruppen in gleichen Bigraden und zum anderen das Verschwinden der Homotopiegruppen in gegebenem ersten Grad für hinreichend großes Gewicht:

Sei k ein perfekter Körper und char $k \neq 2$.

1. $\pi_{n,n}(S) \cong K_{-n}^{MW}(k)$
   Das Theorem geht auf entsprechende Berechnungen durch Morel zurück, siehe [MOR2, Theorem 6.2.1]. Das zu η korrespondierende Element in $\pi_{1,1}(S)$ ist das von der "motivischen Hopf-Abbildung" $S^{(3,2)} \simeq \mathbb{A}^2\backslash 0 \stackrel{(x,y)\mapsto[x:y]}{\longrightarrow} \mathbb{P}^1 \simeq S^{(2,1)}$ induzierte Element.

2. $\pi_{m,n}(S) = 0$ für $m < n$. Siehe [MOR3]

Beide Aussagen werden im Beweis des Theorems 1 aus [HKO] benötigt. Die zweite Aussage übersetzt sich dort in eine Zusammenhangsaussage über das motivische Sphärenspektrum.

1.1.4 Homologie- und Kohomologiegruppen

Für ein motivisches Spektrum E sei die E-(Ko)Homologie auf einem motivischen Spektrum X definiert durch

- $E^{m,n}(E) := [X, \Sigma^{m,n} E]$
- $E_{m,n}(E) := [\Sigma^{m,n} S, E \wedge X]$

In den folgenden Abschnitten sei H stets das motivische mod-2-Eilenberg-MacLane-Spektrum, welches motivische Kohomologie repräsentiert. H ist ein motivisches Ringspektrum.

1.1.5 Kohomologie des Punktes

Die Berechnung der mod-2-Kohomologie des Punkts ist Voevodsky zu verdanken. Das angegebene Resultat folgt aus Korollar 6.9(2), Theorem 6.1, und Korollar 6.10 in [VOE]. (Siehe auch die entsprechende Anmerkung in [DI])
Es gilt

$$\mathbb{M}_2 := H^{**}(\mathrm{Spec} k, \mathbb{Z}/2) = (K_M^*(k)/2)[\tau]$$

Die Elemente in $K_M^n(k)$ haben Bigrad (n,n), und τ hat Bigrad (0,1).
Sei k algebraisch abgeschlossen. Dann vereinfacht sich die Aussage zu $\mathbb{M}_2 = \mathbb{F}_2[\tau]$.
Dann ist $H^{**}(S) = \mathbb{M}_2$ und $\pi_{**}(H) = H_{**}(S) = \mathbb{F}_2[\tilde{\tau}] =: \tilde{\mathbb{M}}_2$, wobei $\tilde{\tau}$ den Bigrad (0,-1) hat.

1.1.6 Die motivische Steenrod-Algebra

Sei k ein Körper von Charakteristik 0 und p eine beliebige Primzahl.
Die Form der motivischen mod-p-Steenrodalgebra ist in diesem Fall dank der Arbeiten [VOE2] und [VOE3] von Voevodsky bekannt. Im Fall $p = 2$ und mit der Zusatzannahme, dass k algebraisch abgeschlossen ist, vereinfachen sich seine Resultate zu der folgenden Aussage:
Die motivische mod-2-Steenrod-Algebra $A := H^{**}(H)$, d.h. der Ring der bistabilen motivischen Kohomologieoperationen, ist unter dem Ringhomorphismus

$$\mathbb{M}_2 = [S, H]_{**} \longrightarrow H^{**}(H)$$

$$(\alpha \in [S, H]_{p,q}) \mapsto (\Sigma^{p,q} H = S^{p,q} \wedge H \stackrel{\alpha \wedge id_H}{\longrightarrow} H \wedge H \stackrel{\mu}{\longrightarrow} H)$$

eine $\mathbb{M}_2$-Algebra. Die motivische mod-2-Steenrod-Algebra A wird als $\mathbb{M}_2$-Modul von den motivischen Steenrod-Operationen $Sq^{2k} \in H^{2k,k}(H)$ und $Sq^{2k-1} \in H^{2k-1,k-1}(H)$

erzeugt, die den folgenden Adem-Relationen für $a < 2b$ unterliegen:

$$Sq^a Sq^b = \sum_c \binom{b-1-c}{a-2c} \tau^{t_c} Sq^{a+b-c} Sq^c \tag{1.1.6.2}$$

(Hier bezeichnet t_c die Differenz im zweiten Bigrad zwischen $Sq^a Sq^b$ und $Sq^{a+b-c}Sq^c$, und der Binomialkoeffizient ist modulo zwei zu verstehen)
Die motivische Steenrod-Algebra ist als $\mathbb{M}_2$-Modul frei erzeugt von den zulässigen Monomen der Steenrod-Operationen.
Aus den motivischen Adem-Relationen folgt direkt (Durch Umstellen der Relation wie im klassischen Fall), dass Sq^k zerlegbar ist für $k \neq 2^i$. Die Unzerlegbarkeit von Sq^{2^i} über $\mathbb{C}$ erhalten wir später durch eine Vergleichsabbildung mit der klassischen Steenrod-Algebra.

1.1.7 Die duale motivische Steenrod-Algebra

Die duale motivische Steenrod-Algebra wurde von Voevodsky ebenfalls in [VOE2] und [VOE3] bestimmt. Wir benötigen erneut nur die mod-2-Resultate über einem algebraisch abgeschlossenen Körper explizit. Die duale Steenrod-Algebra ist aber in derselben Allgemeinheit bekannt wie die Steenrod-Algebra.
Die duale motivische Steenrod-Algebra $A_{**} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}(H^{**}(H), \mathbb{M}_2)$ ist als $H_{**}(S)$-Algebra isomorph zu $\tilde{\mathbb{M}}_2[\tau_i, \xi_i]/(\tau_i^2 - \tilde{\tau}\xi_{i+1})$, wobei τ_i den Bigrad $(2^{i+1}-1, 2^i)$ und ξ_i den Bigrad $(2^{i+1}-2, 2^i-1)$ hat.
Für uns ist insbesondere relevant, dass A_{**} frei als $\pi_{**}(H)$-Modul ist.

1.1.8 Definition: Motivisch endlicher Typ

Für die Realisierung von kohomologisch konstruierten Adamsauflösungen brauchen wir eine bestimmte Endlichkeitsbedingung:
Eine Menge von Tupeln $\{(p_\alpha, q_\alpha)\}_{\alpha \in S}$ heißt von motivisch endlichem Typ, wenn für jedes $\alpha \in S$ nur endlich viele $\beta \in S$ existieren, s.d. $p_\alpha \geq p_\beta$ und $2q_\alpha - p_\alpha \geq 2q : \beta - p_\beta$.
Die Bedingung ist offensichtlich invariant unter $\{(p_\alpha, q_\alpha)\}_{\alpha \in S} \mapsto \{(p_\alpha - n, q_\alpha)\}_{\alpha \in S}$.
Für ein beliebiges Spektrum X heißt ein Wedge von Einhängungen $\bigvee_{\alpha \in S} \Sigma^{p_\alpha, q_\alpha} X$ von motivisch endlichem Typ, wenn $(p_\alpha, q_\alpha)_{\alpha \in S}$ von motivisch endlichem Typ ist.
Ein bigraduierter $\mathbb{M}_2$-Modul M heißt von motivisch endlichem Typ, wenn er frei ist und eine Basis besitzt, deren Bigrade eine Menge von motivisch endlichem Typ sind.

2 Die Konstruktion der motivischen Adamsspektralsequenz

Wir konstruieren homologisch die motivische Adamsspektralsequenz für bestimmte motivische Ringspektren E und identifizieren ihren E_2-Term. Für das motivische Eilenberg-MacLane-Spektrum konstruieren wir die Adamsspektralsequenz sowohl homologisch als auch kohomologisch und vergleichen die entstehenden Spektralsequenzen. Für diese Zwecke benötigen wir zuallererst einige algebraische Fakten über Hopfalgebroide:

2.1 Hopf-Algebroide

Die Nützlichkeit der Adamsspektralsequenz für Berechnungen beruht auf der Möglichkeit, den E_2-Term in Begriffen der homologischen Algebra auszudrücken. Für ein geeignetes motivisches Ringspektrum E ist das Paar $(\pi_{**}(E), E_{**}(E))$ ein bigraduierter, flacher Hopfalgebroid und für ein geeignetes motivisches Spektrum X ist $H_{**}(X)$ über diesem Hopfalgebroid ein Hopfalgebroid- Komodul. Dies erlaubt die Identifizierung des E_2-Terms mittels des Ext-Funktors von Komoduln. In diesem Kapitel zitiere ich für spätere Referenzen die für unsere Zwecke wichtigsten Aussagen über Hopf-Algebroide und ihre Komoduln aus Anhang A1 von Ravenels "grünem Buch" [RAV], der ihre Theorie ausführlich darstellt.

2.1.1 Definition: Hopf-Algebroid

Sei (A, Γ) ein Paar von R-Algebren mit Strukturabbildungen

- $\eta_L : A \longrightarrow \Gamma$ (Links-Eins)
- $\eta_R : A \longrightarrow \Gamma$ (Rechts-Eins)
- $\epsilon : \Gamma \longrightarrow A$ (Ko-Eins)
- $\Delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma \underset{A}{\otimes} \Gamma$ (Komultiplikation)
- $c : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ (Konjugation)

Das Paar (A, Γ) heißt *Hopf-Algebroid*, wenn die Strukturabbildungen die folgenden Relationen erfüllen:

- $\epsilon \circ \eta_L = \epsilon \circ \eta_R = id_A$
- $(id_\Gamma \otimes \epsilon) \circ \Delta = (\epsilon \otimes id_\Gamma) \circ \Delta = id_\Gamma$

- $(id_\Gamma \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id_\Gamma) \circ \Delta$
- $c \circ \eta_L = \eta_R$ und $c \circ \eta_R = \eta_L$
- $c \circ c = id_\Gamma$
- In dem folgenden Diagramm existieren die gestrichelten Morphismen, s.d. das das Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma & \Gamma \underset{R}{\otimes} \Gamma \arrow[l, "\mu_\Gamma \circ (c \otimes id_\Gamma)"'] \arrow[r, "\mu_\Gamma \circ (id_\Gamma \otimes c)"] \arrow[d] & \Gamma \\
 & \Gamma \underset{A}{\otimes} \Gamma \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, dashed] & \\
A \arrow[uu, "\eta_L"] & \Gamma \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[u, "\Delta"] & A \arrow[uu, "\eta_R"']
\end{tikzcd}$$

Sei B eine beliebige R-Algebra und C_B der Graph, dessen Objekte Elemente in $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ und dessen Morphismen $\mathrm{Hom}_{C_B}(f : A \longrightarrow B, g : A \longrightarrow B)$ diejenigen Elemente $h \in \mathrm{Hom}_R(\Gamma, B)$ sind, s.d. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, equal] & B \arrow[r, equal] & B \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\eta_L"] & \Gamma \arrow[u, "h"] & A \arrow[u, "g"'] \arrow[l, "\eta_R"']
\end{tikzcd}$$

Die obigen Anforderungen an die Strukturabbildungen sind dann äquivalent zu der Aussage, dass C_B für beliebiges B ein Groupoid ist, d.h. eine Kategorie, deren Morphismen sich alle invertieren lassen. Die Identitäten sind hierbei durch $id_f := f \circ \epsilon$, die Inversen durch Verkettung mit c gegeben.

2.1.2 Definition: Komoduln von Hopf-Algebroiden

Sei für einen gegebenen Hopf-Algebroid (A, Γ) ein A-Modul M zusammen mit einer Strukturabbildung $\Psi_M : M \longrightarrow \Gamma \underset{A}{\otimes} M$ gegeben. M heißt Γ-*Linkskomodul*, wenn

1. $(\epsilon \otimes id_M) \circ \Psi_M = id_M$
2. $(\Delta \otimes id_M) \circ \Psi_M) = (id_\Gamma \otimes \Psi_M) \circ \Psi_M$.

Sind (M, Ψ_M) und (N, Ψ_N) zwei Γ-Linkskomoduln, so heißt ein A-Modulhomomorphismus $f : M \longrightarrow N$ Morphismus von Γ-Linkskomoduln, wenn gilt $(id_\Gamma \otimes f) \circ \Psi_M = \Psi_N \circ f$. Die Definition von Γ-Rechtskomoduln und Γ- Rechtskomodulmorphismen erfolgt auf die gleiche Weise.

2.1.3 Wohldefiniertheit von Ext für flache Hopfalgebroide

Sei Γ als A-Linksmodul flach. Dann ist die Kategorie der Γ-Komoduln abelsch und besitzt genügend Injektive.
(Siehe [RAV, A1.1.3 und A1.2.2])

2.1.4 Definition: Cotensorprodukt von Komoduln

Sei (M, Ψ_M) ein Γ-Rechts- und (N, Ψ_N) ein Γ-Linkskomodul. Ihr Kotensorprodukt $M \square_\Gamma N$ ist definiert als Kern der Abbildung von R-Moduln

$$M \underset{A}{\otimes} N \stackrel{\Psi_M \otimes id_N - id_M \otimes \Psi_N}{\longrightarrow} M \underset{A}{\otimes} \Gamma \underset{A}{\otimes} N$$

(und damit im Allgemeinen nur ein R-Modul).

2.1.5 Hom-Funktor und Kotensorprodukt

Sei N ein Γ-Linkkomodul. Dann gilt $\mathrm{Hom}_\Gamma(A, N) \cong A \square_\Gamma N$.
Inbesondere gilt für $i \geq 0$: $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(A, N) = \mathrm{Cotor}^i_\Gamma(A, N)$.
(Siehe [RAV, A1.1.5])

2.1.6 Definition: Ausgedehnte und relativ injektive Komoduln

Sei N ein Γ-Linkskomodul.

1. N heißt *ausgedehnter* Γ- *Komodul*, wenn ein A-Modul N' existiert, s.d.

$$N \cong \Gamma \underset{A}{\otimes} N'$$

2. N heißt *relativ injektiver* Γ-*Komodul*, wenn N direkter Summand eines ausgedehnten Γ-Komoduls ist.

2.1.7 Verschwinden von Cotor für ausgedehnte Komoduln

Sei M ein Γ-Rechtsmodul und projektiv als A-Modul, und $S = \Gamma \underset{A}{\otimes} N$ ein relativ injektiver Komodul. Dann für $i > 0$: $\mathrm{Cotor}^i_\Gamma(M, S) = 0$ und für $i = 0$: $\mathrm{Cotor}^i_\Gamma(M, S) = M \underset{A}{\otimes} N$.
(Siehe [RAV, A1.2.8(b)])

2.1.8 Cotor kann mit relativ injektiven Auflösungen berechnet werden

Seien

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow ... \qquad (2.1.8.1)$$

und

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R^0 \longrightarrow R^1 \longrightarrow ... \qquad (2.1.8.2)$$

Auflösungen von Γ-Komoduln M und N durch relativ injektive Γ-Komoduln.

1. Jede Γ-Komodulabbildung $f : M \longrightarrow N$ kann zu einer Abbildung von Auflösungen fortgesetzt werden.

2. Sei L ein Γ-Rechtskomodul und projektiv als A-Modul. Dann kann $\mathrm{Cotor}^i_\Gamma(L, M)$ und $\mathrm{Cotor}^i_\Gamma(L, N)$ auf den obigen Auflösungen (durch Anwenden von $L\Box_\Gamma(-)$ und Bildung der Kohomologiegruppen) berechnet werden. Die durch die Fortsetzung von f induzierte Abbildung zwischen den Cotorgruppen hängt nur von f ab.

(Siehe [RAV, A1.2.9])

2.2 Die reduzierte Kobar-Auflösung

2.2.1 Definition der reduzierten Kobar-Auflösung

Sei (A, Γ) ein Hopfalgebroid mit Strukturabbildungen $(\eta_l, \eta_r, \mu, \epsilon, \Delta, c)$ und M ein Γ-Links-Komodul mit Komultiplikation $\psi : M \longrightarrow \Gamma \otimes_A M$.
Definiere $\bar{\Gamma} := \ker(\Gamma \xrightarrow{\epsilon} A)$.
Dann ist die *reduzierte Kobarauflösung* definiert durch

$$D^s_\Gamma(M) := \Gamma \otimes_A \bar{\Gamma}^{\otimes_A s} \otimes_A M \text{ für } s \in \mathbb{N}_0 \qquad (2.2.1.3)$$

und ihr Differential $d_s : D^s_\Gamma(M) \longrightarrow D^{s+1}_\Gamma(M)$ definiert durch

$$d_s(\gamma\otimes\gamma'_1\otimes...\otimes\gamma'_s\otimes m) := \Delta(\gamma)\otimes\gamma_1\otimes...\otimes\gamma_s\otimes m+\sum_{i=1}^{s}(-1)^i\gamma\otimes...\otimes\Delta(\gamma_i)\otimes...\otimes\gamma_s+(-1)^{s+1}\gamma\otimes\gamma_1\otimes...\otimes\gamma_s\otimes\psi(m) \qquad (2.2.1.4)$$

Anmerkung: Das Differential ist wohldefiniert.
Sei $\gamma \otimes \gamma'_1 \otimes ... \otimes \gamma'_s \otimes m \in D^s_\Gamma(M)$.
Zu zeigen ist $d_s(\gamma \otimes \gamma'_1 \otimes ... \otimes \gamma'_s \otimes m) \in D^{s+1}_\Gamma(M) \subset \Gamma^{\otimes(s+1)} \otimes M$. Mit anderen Worten, für $1 \leq j \leq s+1$ muss die Abbildung $id_\Gamma \otimes id_\Gamma \otimes ... \otimes id_\Gamma \otimes \epsilon \otimes id_\Gamma \otimes ... \otimes id_\Gamma \otimes id_M$(ab hier abgekürzt als ϵ'_j), in der ϵ auf den jeweils (j+1)-ten Tensorfaktor wirkt, auf $d_s(\gamma \otimes \gamma'_1 \otimes ... \otimes \gamma'_s \otimes m)$ verschwinden.

Für $1 \leq j < s$ gilt:
$\epsilon'_j(d_s(\gamma \otimes \gamma'_1 \otimes ... \otimes \gamma'_s \otimes m))$
$= \epsilon'_j(\Delta(\gamma) \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes m + \sum_{i=1}^s(-1)^i\gamma \otimes ... \otimes \Delta(\gamma_i) \otimes ... \otimes \gamma_s$
$+(-1)^{s+1}\gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes \psi(m))$

Wegen $\gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes m \in D^s_\Gamma(M)$ fallen alle bis auf zwei Summanden weg:
$= \epsilon'_j((-1)^{j-1}\gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \Delta(\gamma_{j-1}) \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes m + (-1)^j\gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \Delta(\gamma_j) \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes m)$
Aufgrund der Kounität der Komultiplikation heben sich die beiden verbleibenden Terme gegenseitig weg:
$= (-1)^j\gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes m + (-1)^j\gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes m$
$= 0$

Für $j = s$ gilt: $\epsilon'_s(d_s(\gamma \otimes \gamma'_1 \otimes ... \otimes \gamma'_s \otimes m))$
$= \epsilon'_s(\Delta(\gamma) \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes m + \sum_{i=1}^{s}(-1)^i \gamma \otimes ... \otimes \Delta(\gamma_i) \otimes ... \otimes \gamma_s$
$+ (-1)^{s+1}\gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes \psi(m))$

Wie zuvor fallen alle bis auf zwei Terme weg:
$= (id_\Gamma \otimes ... \otimes id_\Gamma \otimes \epsilon \otimes id_M)((-1)^s \gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \Delta(\gamma_s) \otimes m + (-1)^{s+1}\gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes \psi(m))$
Wegen der Kounität des Koprodukts und der Komodulabbildung ψ_M:
$= (-1)^s \gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes m + (-1)^{s+1}\gamma \otimes \gamma_1 \otimes ... \otimes \gamma_s \otimes m$
$= 0$ $\square$

2.3 Homologische Konstruktion der motivischen Adamsspektralsequenz

Wir konstruieren in diesem Kapitel die homologische Version der motivischen Adamsspektralsequenz für (fast) beliebige motivische Ringspektra. Da in der motivischen Homotopiekategorie nicht mehr alle Spektren zellulär sind, müssen wir, um den E_2-Term der konstruierten Spektralsequenz sinnvoll identifizieren können, neben der üblichen Anforderung, dass die Homologie des Ringspektrums flach als Modul über dem Ring der Homotopiegruppen des Ringspektrums sein sollen, noch eine zusätzliche technische Anforderung an E stellen, die für den Fall des motivischen Eilenberg-MacLane-Spektrums erfüllt ist.
Ich stelle die Konstruktion vorbehaltlich dieser Änderung anhand von Ravenels Buch [RAV] vor. Eine andere Darstellung der Konstruktion findet sich bspw. im Buch „Stable homotopy and Generalised Homology “[A, III.15] des Erfinders und Namensgebers der Spektralsequenz, John Frank Adams.

2.3.1 Definition: Motivisches Ringspektrum

Sei E ein motivisches Spektrum. Dann heißt E motivisches Ringspektrum, wenn es zwei Abbildungen $E \wedge E \xrightarrow{\mu} E$ und $S \xrightarrow{\eta} E$ gibt, s.d. die folgenden Diagramme bis auf Homotopie, d.h. bis auf Verkettung mit schwachen Äquivalenzen, kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
E \wedge E \arrow[dr, "\mu"] & & E \wedge E \arrow[dl, "\mu"'] \\
E \wedge S \arrow[u, "id_E \wedge \eta"] & E \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] & S \wedge E \arrow[u, "\eta \wedge id_E"']
\end{tikzcd} \quad (2.3.1.5)$$

(Unität der Multiplikation)

$$\begin{tikzcd}
E \wedge E \wedge E \arrow[r, "\mu \wedge id_E"] \arrow[d, "id_E \wedge \mu"] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] \\
E \wedge E \arrow[r, "\mu"] & E
\end{tikzcd} \quad (2.3.1.6)$$

(Assoziativität der Multiplikation)

Für ein beliebiges motivisches Spektrum X induziert die Abbildung μ auf den E-Homologiegruppen von X eine $\pi_{**}(E)$-Linksmodulstruktur (für $\alpha : \Sigma^{p,q}S \longrightarrow E$, $\beta : \Sigma^{m,n}S \longrightarrow E \wedge X$ gegeben durch $\Sigma^{p+m,q+n} \overset{\alpha\wedge\beta}{\longrightarrow} E \wedge E \wedge X \overset{\mu\wedge id_X}{\longrightarrow} E \wedge X$) und auf $E_{**}(E)$ auch eine $\pi_{**}(E)$-Rechtsmodulstruktur.

2.3.2 Definition: E-gute motivische Spektren

Sei E ein motivisches Ringspektrum und X ein beliebiges motivisches Spektrum. Wir haben eine kanonische Abbildung

$$E_{**}(E) \underset{\pi_{**}(E)}{\otimes} E_{**}(X) \longrightarrow E_{**}(E \wedge X) \tag{2.3.2.7}$$

Diese wird auf $\alpha \otimes \beta$, $\alpha \in E_{p,q}(E), \beta \in E_{m,n}X$ durch

$$\Sigma^{m+p,n+q}S \overset{\alpha\wedge\beta}{\longrightarrow} E \wedge E \wedge E \wedge X \overset{id_E\wedge\mu id_X}{\longrightarrow} E \wedge E \wedge X$$

repräsentiert.

Diese Abbildung ist im klassischen Fall stets ein Isomorphismus (siehe [RAV, 2.2.7]). Da im motivischen Fall nicht alle Spektren zellulär sein müssen und der klassische Beweis deshalb nicht anwendbar ist, müssen wir diese Eigenschaft zusätzlich forden:
Ein motivisches Spektrum X heiße *E-gut*, wenn obige Abbildung ein Isomorphismus ist. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn sich $E \wedge E$ als Wedgesumme von Einhängungen von E schreiben lässt oder wenn X zellulär ist. Ist E zellulär, so sind sogar alle motivischen Spektren E-gut. Siehe auch [DI, Anmerkungen zu Proposition 6.5]. Wir benötigen die folgenden Informationen für die Konstruktion unserer Adamsauflösungen:
Ist E E-gut und X E-gut, so ist auch $E \wedge X$ E-gut.
Ist $E_{**}(E)$ flach über $\pi_{**}(E)$, und zwei Spektren in einer Kofasersequenz

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

sind E-gut, so folgt aus den langen exakten Sequenzen der Homologiegruppen der Kofasersequenz, tensoriert mit $E_{**}(E)$,

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] \arrow[d] & E_{**}(E) \underset{\pi_{**}(E)}{\otimes} E_{**}(E) \arrow[r] \arrow[d] & E_{**}(E) \underset{\pi_{**}(E)}{\otimes} E_{**}(B) \arrow[r] \arrow[d] & E_{**}(E) \underset{\pi_{**}(E)}{\otimes} E_{**}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[d] \\
\ldots \arrow[r] & E_{**}(E \wedge A) \arrow[r] & E_{**}(E \wedge B) \arrow[r] & E_{**}(E \wedge C) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

und dem Fünferlemma, dass auch das dritte E-gut sein muss.

Die im vorhergehenden Abschnitt angeschnittene Theorie der Hopfalgebroide ist für uns für das Algebrenpaar $A = \pi_{**}(E)$, $\Gamma = E_{**}(E)$ von Interesse. Im klassischen Fall handelt es sich für jedes Ringspektrum E um einen Hopfalgebroid, im motivischen Setting benötigen wir zusätzlich die Annahme, dass E E-gut ist.

2.3.3 Lemma: Der Hopf-Algebroid $(\pi_{**}(E), E_{**}(E))$

Sei E ein E-gutes motivisches Ringspektrum. Dann bildet das Paar $(E_{**}(E), \pi_{**}(E))$ mit den folgenden Strukturabbildungen einen Hopf-Algebroid:

(Linkseins) $\eta_l : \pi_{**}(E) = [S, E]_{**} = [S, E \wedge S]_{**} \overset{\circ(id \wedge \eta)}{\longrightarrow} [S, E \wedge E]_{**} = E_{**}(E)$

(Rechtseins) $\eta_r : \pi_{**}(E) = [S, E]_{**} = [S, S \wedge E]_{**} \overset{\circ(\eta \wedge id)}{\longrightarrow} [S, E \wedge E]_{**} = E_{**}(E)$

(Ko-Eins) $\epsilon : E_{**}(E) = [S, E \wedge E]_{**} \overset{\circ\mu}{\longrightarrow} [S, E]_{**} = \pi_{**}(E)$

(Komultiplikation)

$$\begin{aligned}\Delta : E_{**}(E) = [S, E \wedge E]_{**} \cong [S, E \wedge S \wedge E]_{**} &\overset{\circ(id \wedge \eta \wedge id)}{\longrightarrow} [S, E \wedge E \wedge E]_{**} \\ &\cong E_{**}(E) \underset{\pi_{**}(E)}{\otimes} E_{**}(E)\end{aligned}$$

(Konjugation) $c : E_{**}(E) \overset{T}{\longrightarrow} E_{**}(E)$, wobei T die durch den Tausch der Faktoren in $E \wedge E$ induzierte Abbildung ist.

Beweis: Die Kompatibilität der Strukturabbildungen folgt direkt aus der Kompatibilität (bis auf Homotopie) der Strukturabbildungen des Ringspektrums E.

2.3.4 Lemma: Komodulstruktur auf der Homologie von E-guten Spektren

Die Homologiegruppen eines E-guten motivischen Spektrums X haben über dem durch E definierten Hopfalgebroid mittels der folgenden Strukturabbildung eine $E_{**}(E)$-Linkskomodulstruktur:

$$E_{**}(X) = [S, E \wedge X]_{**} = [S, E \wedge S \wedge X]_{**} \overset{\circ(id_E \wedge \eta \wedge id_X)}{\longrightarrow} [S, E \wedge E \wedge X] \cong E_{**}(E) \underset{\pi_{**}(E)}{\otimes} E_{**}(X)$$

In allen folgenden Abschnitten sei E E-gut und zusätzlich $E_{**}(E)$ flach über $\pi_{**}(E)$. Dann ist die Kategorie der $E_{**}(E)$-Komoduln nach 2.1.3 abelsch und besitzt genügend Injektive, s.d. für die Homologie von E-guten motivischen Spektren X die Ext-Funktoren $\mathrm{Ext}^{i,t,u}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), E_{**}(X))$ definiert sind.

2.3.5 Definition: E_{**}-Adams-Auflösung

Sei für $s \in \mathbb{N}_0$ eine Folge von Spektren X_s, W_s mit $X_0 = X$ und Abbildungen $g_s : X_{s+1} \longrightarrow X_s$ sowie $f_s : X_s \longrightarrow W_s$ gegeben. Eine solche Folge

$$\begin{tikzcd} X = X_0 \arrow[d, "f_0"] & X_1 \arrow[l, "g_0"'] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "f_2"] & \ldots \arrow[l, "g_2"'] \arrow[d] & X_s \arrow[l, "g_{s-1}"'] \arrow[d, "f_s"] & \ldots \arrow[l] \arrow[d] \\ W_0 & W_1 & W_2 & \ldots & W_s & \ldots \end{tikzcd} \tag{2.3.5.8}$$

heißt E_{**}-Adamsauflösung, falls alle beteiligten Spektren E-gut sind und die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(a) $X_{s+1} \xrightarrow{g_s} X_s \xrightarrow{f_s} W_s$ ist eine Fasersequenz.

(b) Es existiert eine linksinverse Abbildung zu $E \wedge X_s \overset{id_E \wedge f_s}{\longrightarrow} E \wedge W_s$, d.h. $E \wedge X_s$ ist ein Retrakt von $E \wedge W_s$

(c) Es existiert eine linksinverse Abbildung zu $W_s = S \wedge K_s \overset{\eta \wedge id_{W_s}}{\longrightarrow} E \wedge W_s$, d.h. W_s ist ein Retrakt von $E \wedge W_s$

(d) $\mathrm{Ext}^{i,(t,u)}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), E_{**}(W_s)) = \begin{cases} \pi_{t,u}(W_s) & |i = 0 \\ 0 & |i > 0 \end{cases}$
Sei zusätzlich $E_{**}(W_s)$ ein relativ injektiver Komodul.

Anmerkung: Die Zusatzannahme der relativen Injektivität (die das Verschwinden der höheren Ext-Funktoren bereits impliziert) wird von Ravenel selbst nicht getroffen. Da ich ohne sie den Beweis der Äquivalenz der von zwei verschiedenen Adamsauflösungen erzeugten Spektralsequenzen nicht verstanden habe, habe ich sie trotzdem aufgenommen.

2.3.6 Definition: Kanonische E_{**}-Adams-Auflösung

Definiere das Spektrum $\bar{E}$ als Homotopiefaser von $S \xrightarrow{\eta} E$:

$$\bar{E} \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\eta} E \xrightarrow{k} \Sigma\bar{E} \tag{2.3.6.9}$$

Smasht man für $s \in \mathbb{N}_0$ diese Kofasersequenz von rechts mit $\bar{E}^{\wedge s} \wedge X$, so erhält man Kofasersequenzen:

$$\bar{E}^{\wedge(s+1)} \wedge X \overset{i \wedge \bar{E}^{\wedge s} \wedge X}{\longrightarrow} \bar{E}^{\wedge s} \wedge X \overset{\eta \wedge \bar{E}^{\wedge s} \wedge X}{\longrightarrow} E \wedge \bar{E}^{\wedge s} \wedge X \overset{k \wedge \bar{E}^{\wedge s} \wedge X}{\longrightarrow} \Sigma(\bar{E}^{\wedge(s+1)} \wedge X) \tag{2.3.6.10}$$

Mit den Definitionen $X_s := \bar{E}^{\wedge s} \wedge X$ und $W_s := E \wedge \bar{E}^{\wedge s} \wedge X$ ergibt sich ein Turm der Form 2.3.5.8. Dieser Turm wird kanonische Adamsauflösung genannt.

2.3.7 Lemma: Die kanonische Adamsauflösung ist eine Adamsauflösung

Ist X E-gut, so sind alle Spektren in der kanonischen Adamsauflösung E-gut. Die kanonische Adamsauflösung erfüllt die Bedingungen (a)-(d) einer Adamsauflösung aus 2.3.5.
Beweis:
Da $X_0 = X$ nach Annahme E-gut ist, ist es auch $W_0 = E \wedge X_0$ und über die Kofaserung $X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow W_0$ auch X_1. Induktiv folgt, dass X_s und $W_s = E \wedge X_s$ E-gut sind.

Der Beweis der Bedingungen (a)-(c) erfolgt analog zum klassischen Fall:

(a) $X_{s+1} \xrightarrow{g_s} X_s \xrightarrow{f_s} W_s$ ist nach Definition eine Fasersequenz.

(b) Die Komposition der Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
S \wedge E \wedge \bar{E}^s \wedge X \arrow[r, "\eta \wedge id_{\bar{E}^s} \wedge id_X"] & E \wedge E \wedge \bar{E}^s \wedge X \arrow[r, "\mu \wedge id_{\bar{E}^s} \wedge id_X"] \arrow[d, equal] & E \wedge \bar{E}^s \wedge X \arrow[d, equal] \\
E \wedge X_s \arrow[u, "\simeq"] & E \wedge W_s & E \wedge X_s
\end{tikzcd}$$

ergibt die Identität auf $E \wedge X_s$, da E Ringspektrum ist.

(c) Wie in (b):

$$\begin{tikzcd}
S \wedge E \wedge \bar{E}^s \wedge X \arrow[r, "\eta \wedge id_{\bar{E}^s} \wedge id_X"] & E \wedge E \wedge \bar{E}^s \wedge X \arrow[r, "\mu \wedge id_{\bar{E}^s} \wedge id_X"] \arrow[d, equal] & E \wedge \bar{E}^s \wedge X \arrow[d, equal] \\
W_s \arrow[u, "\simeq"] & E \wedge W_s & W_s
\end{tikzcd}$$

(d) Es gilt $E_{**}(W_s) = E_{**}(E \wedge X_s) \cong E_{**}(E) \otimes_{\pi_{**}(E)} E_{**}(X_s)$.
Damit ist $E_{**}(W_s)$ isomorph zu einem ausgedehnten $E_{**}(E)$-Komodul(siehe 2.1.6 - insbesondere ist $E_{**}(W_s)$ auch relativ injektiv), und nach 2.1.7 folgt für $i > 0$:

$$\mathrm{Ext}^{i,t,u}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), E_{**}(W_s)) \cong \mathrm{Cotor}^{i,t,u}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), E_{**}(W_s)) = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^{0,t,u}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), E_{**}(W_s)) &\cong \mathrm{Cotor}^{0,t,u}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), E_{**}(W_s)) \\
&= \mathrm{Cotor}^{0,t,u}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), E_{**}(E) \otimes_{\pi_{**}(E)} E_{**}(X_s)) \\
&\cong E_{t,u}(X_s) \\
&= \pi_{t,u}(W_s)
\end{aligned}$$

□

2.3.8 Die homologisch konstruierte E-Adams-Spektralsequenz

Sei für ein motivisches Spektrum X eine E_{**}-Adamsauflösung der Form 2.3.5.8 gegeben. Die Fasersequenzen $X_{s+1} \longrightarrow X_s \longrightarrow W_s$ liefern uns für alle s eine lange exakte Sequenz der motivischen Homotopiegruppen:

$$... \longrightarrow \pi_{(*,*)}(X_{s+1}) \xrightarrow{\pi_{*,*}(g_s)} \pi_{(*,*)}(X_s) \xrightarrow{\pi_{*,*}(f_s)} \pi_{(*,*)}(W_s) \xrightarrow{\delta} \pi_{(*-1,*)}(X_{s+1}) \longrightarrow ... \tag{2.3.8.11}$$

Die Gesamtheit dieser langen exakten Sequenzen bildet ein trigraduiertes exaktes Paar

$$\begin{tikzcd} \pi_{*-s,*}(X_s)_{(s,*,*)} \arrow[rr, "\pi_{*-s,*}(g_s)"] & & \pi_{*-s,*}(X_s)_{(s,*,*)} \arrow[dl, "\pi_{*-s,*}(f_s)"] \\ & \pi_{*-s,*}(W_s)_{(s,*,*)} \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd} \tag{2.3.8.12}$$

Keine der obigen Abbildung verändert das motivische Gewicht, d.h. den dritten Bigrad. Das exakte Paar und seine derivierten Paare liefern uns eine Spektralsequenz, die wir (motivische) *homologisch konstruierte E-Adamsspektralsequenz* nennen. A priori ist die Spektralsequenz von der spezifischen Wahl unserer Adamsauflösung abhängig. Wir werden aber gleich sehen, dass zwei Adamsauflösungen desselben motivischem Spektrums X ab dem E_2-Term isomorphe Spektralsequenzen induzieren.
Der (von der spezifischen Wahl der Auflösung abhängige) E_1-Term ist

$$E_1^{s,m,n}(X) := \pi_{m-s,n}(W_s)$$

und das E_1-Differential

$$d_1 : E_1^{s,m,n}(X) = \pi_{m-s,n}(W_s) \xrightarrow{\delta} \pi_{m-s-1,n}(X_{s+1}) \xrightarrow{\pi_{m-s-1,n}(f_{s+1})} \pi_{m-s-1,n}(W_{s+1}) \tag{2.3.8.13}$$

2.3.9 Identifikation des E_2-Terms der homologisch konstruierten E-Adamsspektralsequenz

Sei (X_s, W_s) eine beliebige Adamsauflösung. Da nach 2.3.5.(b)

$$E \wedge X_s \xrightarrow{id_E \wedge f_s} E \wedge W_s$$

ein Linksinverses hat, folgt, dass die induzierte Abbildung in der Homologie $E_{**}(X_s) \longrightarrow E_{**}(W_s)$ ein Monomorphismus ist. Die langen exakten $E_{**}(-)$-Sequenzen der Kofasersequenzen $X_{s+1} \longrightarrow X_s \longrightarrow W_s \longrightarrow \Sigma^{1,0}X_{s+1}$ zerfallen deshalb in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_{**}(X_s) \arrow[r, shift right] & E_{**}(W_s) \arrow[l, shift right] \arrow[r] & E_{**}(\Sigma^{1,0}X_{s+1}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.3.9.14}$$

Diese Sequenzen fügen sich induktiv zu einer neuen exakten langen Sequenz zusammen:

$$0 \longrightarrow E_{**}(X) \longrightarrow E_{**}(W_0) \longrightarrow E_{**}(\Sigma^{1,0}W_1) \longrightarrow E_{**}(\Sigma^{2,0}W_2) \longrightarrow ... \qquad (2.3.9.15)$$

Die Abbildungen zwischen den einzelnen Termen sind durch die folgenden Kompositionen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_{**}(X) \arrow[r] & E_{**}(W_0) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & E_{**}(\Sigma^{1,0}W_1) \arrow[r] & ... \\
& & & E_{**}(\Sigma^{1,0}X_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd} \qquad (2.3.9.16)$$

bzw.

$$\begin{tikzcd}
E_{**}(\Sigma^{s-1,0}W_{s-1}) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & E_{**}(\Sigma^{s,0}W_s) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & E_{**}(\Sigma^{s+1,0}W_{s+1}) \\
& E_{**}(\Sigma^{s,0}X_s) \arrow[ur] \arrow[dr] & & E_{**}(\Sigma^{s+1,0}X_{s+1}) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd} \qquad (2.3.9.17)$$

gegeben. Die Exaktheit an $E_{**}(\Sigma^{s,0}W_s)$ folgt direkt aus dem Diagramm.
Jeder einzelne Term ist relativ injektiv (für die kanonische Adamsauflösung sogar ein ausgedehnter Komodul), und es folgt nach 2.1.8, dass wir mit der Auflösung 2.3.9.15 die derivierten Funktoren von $\mathrm{Hom}^{t,u}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), (-))$ berechnen können. Die Anwendung von $\mathrm{Hom}^{t,u}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), (-))$ auf $E_{**}(\Sigma^{s,0}W_s) \longrightarrow E_{**}(\Sigma^{s+1,0}W_{s+1})$ induziert aber nach 2.3.5.(d) und nach Konstruktion der langen exakten Sequenz gerade das Differential 2.3.8.13 $E_1^{s,*,*}(X) = \pi_{*-s,*}(W_s) \longrightarrow \pi_{*-s-1,*}(W_{s+1}) = E_1^{s+1,*,*}(X)$, die Anwendung auf die Auflösung 2.3.9.15 also den E_1-Term.
Dessen Kohomologie - nach Definition eines derivierten Paares gerade der E_2-Term - ist folglich isomorph zu den derivierten Funktoren des Hom-Funktors:

$$E_2^{s,t,u} = \mathrm{Ext}^{s,t,u}_{E_{**}(E)}(E_{**}(S), E_{**}(X)) \qquad (2.3.9.18)$$

Anmerkung: Für die kanonische Adamsauflösung ist die obige Sequenz sogar isomorph zum Kobarkomplex von $(\pi_{**}(E), E_{**}(E))$.

2.3.10 Lemma: Die Spektralsequenz ist unabhängig von der gewählten Adamsauflösung

Sei X ein motivisches Spektrum und (X'_s, W'_s), (X''_s, W''_s) zwei E_{**}-Adamsauflösungen von X. Dann sind die von ihnen induzierten Spektralsequenzen ab dem E_2-Term isomorph.
Beweis:
Es genügt zu zeigen, dass es für eine beliebige Adamsauflösung (X'_s, W'_s) einen Morphismus von Türmen über der Identität $X'_0 = X = X_0$ von der kanonischen in die gewählte Adamsauflösung gibt. Dies liefert uns einen Morphismus von exakten Paaren, der für $r \geq 2$ auf den E_r-Termen ein Isomorphismus ist:
Die exakten Sequenzen 2.3.9.15 sind für beide Türme Auflösungen von $H_{**}(X)$ durch relativ injektive Komoduln. Der Morphismus von Türmen liefert uns einen Morphismus der langen exakten Sequenzen Nach Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}^{t,u}_{E_{**}(E)}(\pi_{**}(E), (-))$ und Bildung der Kohomologiegruppen erhalten wir gerade den obigen Morphismus von exakten Paaren auf den E_2-Termen. Nach 2.1.8 handelt es sich aber um einen Isomorphismus.
Wir erhalten dann die allgemeine Aussage durch Verkettung der Isomorphismen.

Sei nun $(X_s, W_s = E \wedge X_s)$ die kanonische Adamsauflösung und (X'_s, W'_s) eine beliebige andere. Wir konstruieren die Abbildung von Türmen induktiv über der Identität $X_0 = X \overset{id_X}{\longrightarrow} X = X'_0$. Seien für $i \leq s$ bereits kompatible Morphismen $x_i : X_i \longrightarrow X'_i$ und für $i < s$ bereits $w_i : W_i = E \wedge X_i \longrightarrow W'_i$ definiert. Wir wollen w_s kompatibel definieren: Unter Verwendung der Eigenschaft (c) einer Adamsauflösung erhalten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_s \arrow[r] \arrow[d, "x_s"] & X'_s \arrow[r] \arrow[d] & W'_s \arrow[d] \\
E \wedge X_s \arrow[r, "id_E \wedge x_s"] & E \wedge X'_s \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "w_s"] & E \wedge W'_s \arrow[d, dotted] \\
 & & W'_s
\end{tikzcd} \tag{2.3.10.19}$$

Die Existenz des gepunkteten Pfeils folgt gerade aus (c). Wir definieren den gestrichelten Morphismus w_s als die Komposition der beiden anderen Morphismen im Dreieck. Die Komposition der beiden vertikalen Morphhismen ist nach (c) die Identität, so dass unsere Wahl kompatibel mit x_s ist. Aus den Kofaserungen in Eigenschaft (a) erhalten wir dann sofort ein kompatibles x_{s+1} und können die Induktion fortsetzen. $\square$

2.3.11 Natürlichkeit der E-Adamsspekralsequenz in X für beliebige Auflösungen

Seien (X_s, K_s) und (Y_s, W_s) zwei Adamsauflösungen von Spektren X und Y. Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ induziert eine Abbildung der zugehörigen Adamsspektralsequenzen

ab dem E_2-Term.
Beweis:
Die von den kanonischen Adamsauflösungen erzeugte Spektralsequenz ist nach Konstruktion natürlich in X, denn ein Morphismus von Spektren induziert sofort einen Morphismus von Türmen. Die Aussage folgt dann mit dem vorhergehenden Lemma. $\square$

2.4 Die Adamsspektralsequenz für den Fall des motivischen Eilenberg-MacLane-Spektrums

Wir wählen ab jetzt unser motivisches Ringspektrum fest als das motivische mod-2-Eilenberg-MacLane-Spektrum: E=H.
In diesem speziellen Fall haben wir eine spezielle Klasse von H-guten Spektren, die H-zellulären Spektren. Unter Annahme der Zellularität von H, die wir später in der Arbeit für den Beweis von Theorem 1 aus [HKO] auch treffen müssen, sind sogar alle motivischen Spektren H-gut. In diesem Abschnitt halte ich mich aber an die Arbeit von Dugger und Isaksen (siehe auch [DI, Anmerkungen zu Proposition 6.5]) und verzichte vorläufig auf diese Annahme.
Die Flachheit des zu H assozierten Hopf-Algebroids erhalten wir aus der Beschreibung der dualen motivischen Steenrod-Algebra.
Zusätzlich können wir für H die Adamsspektralsequenz kohomologisch bzw. "naiv" konstruieren, und erhalten so eine Beschreibung des E_2-Terms durch den Ext-Funktor in der Kategorie der Moduln der motivischen Steenrod-Algebra.

2.4.1 Identifikation von $H_{**}(H)$ als duale motivische Steenrod-Algebra

Definiere für ein beliebiges motivisches Spektrum X die Abbildung

$$\theta_X : H_{**}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{H^{**}(S)}(H^{**}(X), H^{**}(S)) \tag{2.4.1.20}$$

für $\alpha \in H_{p,q}(S)$ durch

$$\alpha \mapsto (\beta \in H^{s,t}(S) \mapsto (S^{p,q} \xrightarrow{\alpha} H \wedge X \xrightarrow{\beta} H \wedge S^{s,t} \wedge H \longrightarrow S^{s,t} \wedge H \wedge H \xrightarrow{id \wedge \mu} S^{s,t} \wedge H))$$

Dann ist θ_H ein Isomorphismus, d.h. $H_{**}(H)$ ist isomorph zu der dualen motivischen Steenrod-Algebra. Da diese nach 1.1.7 als $\pi_{**}(H) = \tilde{\mathbb{M}}_2$-Modul frei ist, folgt insbesondere, dass $H_{**}(H)$ frei und damit insbesondere flach über $\pi_{**}(H)$ ist.
Beweis: Der Beweis beruht auf der Konstruktion von H und der Tatsache, dass sich $H \wedge H$ in der Kategorie der H-Moduln als Wedgesumme von Einhängungen von H von motivisch endlichem Typ schreiben lässt. Siehe [DI, Proposition 6.2].

2.4.2 Definition: H-Zelluläre Spektren

Definiere die Kategorie der H-zellulären Spektren $\langle S \rangle_H$ als die kleinste Unterkategorie der stabilen motivischen Homotopiekategorie, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $S \in \langle S \rangle_H$

2. Ist $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ eine Kofasersequenz und mindestens zwei der drei Spektren in $\langle S \rangle_H$ enthalten, so auch das Dritte.

3. $\langle S \rangle_H$ ist unter beliebigen Wedgesummen abgeschlossen

4. Wenn $A \in \langle S \rangle_H$, so ist auch $A \wedge H \in \langle S \rangle_H$

2.4.3 H-zelluläre Spektren sind H-gut

Für $A \in \langle S \rangle_H$ ist die Abbildung $H_{**}(A) \otimes_{\pi_{**}(H)} H_{**}(H^{\wedge s}) \longrightarrow H_{**}(A \wedge H^{\wedge s})$ ein Isomorphismus für alle s.
Insbesondere existiert ein Isomorphismus $H_{**}(H \wedge H) \cong H_{**}(H) \otimes_{\pi_{**}(H)} H_{**}(H)$. Mit anderen Worten, alle H-zellulären Spektren sind H-gut.
Beweis: Siehe [DI, Proposition 6.5], [DI2]

2.5 Kohomologische Konstruktion der motivischen Adams-Spektralsequenz

2.5.1 Kohomologische Adamsauflösung

Sei X ein motivisches Spektrum und (X'_s, K'_s) ein Turm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X = X'_0 \arrow[d, "f_0"] & X'_1 \arrow[l, "g_0"'] \arrow[d, "f_1"] & X'_2 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "f_2"] & \ldots \arrow[l, "g_2"'] \arrow[d] & X'_s \arrow[l, "g_{s-1}"'] \arrow[d, "f_s"] & \ldots \arrow[l] \arrow[d] \\ K'_0 & K'_1 & K'_2 & \ldots & K'_s & \ldots \end{tikzcd} \tag{2.5.1.21}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $X'_{s+1} \longrightarrow X'_s \longrightarrow K'_s$ ist eine Fasersequenz

(b) $H^{**}(K'_s) \longrightarrow H^{**}(X'_s)$ ist surjektiv

(c) K'_s ist eine Wedgesumme von Einhängungen des Eilenberg-MacLane-Spektrums H

Ein solcher Turm heißt *kohomologische Adamsauflösung.*

2.5.2 Die kohomologisch konstruierte Adamsspektralsequenz und ihr E_2-Term

Die langen exakten Sequenzen der Homotopiegruppen der Fasersequenzen (a) liefern wie zuvor ein exaktes Paar und damit eine Spektralsequenz, die wir (motivische) *kohomologisch konstruierte Adamsspektralsequenz* nennen.

Aus Bedingung (b) folgt, dass die langen exakten Sequenzen der Kohomologiegruppen für die Fasersequenzen aus (a) in kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow H^{**}(\Sigma^{s+1,0}X'_{s+1}) \longrightarrow H^{**}(\Sigma^{s,0}K'_s) \longrightarrow H^{**}(\Sigma^{s,0}X'_s) \longrightarrow 0$$

zerfallen, die sich zu der folgenden langen exakten Sequenz zusammenfügen:

$$... \longrightarrow H^{**}(\Sigma^{s,0}K'_s) \longrightarrow ... \longrightarrow H^{**}(\Sigma^{1,0}K'_1) \longrightarrow H^{**}(K'_0) \longrightarrow H^{**}(X) \longrightarrow 0 \tag{2.5.2.22}$$

Da die Spektren K_i Wedgesummen von Einhängungen des Eilenberg-MacLane-Spektrums sind, ist ihre Kohomologie als A-Modul frei, und 2.5.2.22 ist eine freie Auflösung von $H^{**}(X)$ als A-Modul.
Betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A^{**}(H^{**}(\Sigma^{s+1,0}K_{s+1}), H^{**}(S)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A^{**}(H^{**}(\Sigma^{s,0}X_s), H^{**}(S)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A^{**}(H^{**}(\Sigma^{s,0}K_s), H^{**}(S)) \\
\pi_{*-s-1,*}(K_{s+1}) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & \pi_{*-s,*}(X_s) \arrow[r] \arrow[u] & \pi_{*-s,*}(K_s) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd} \tag{2.5.2.23}$$

Wendet man den Funktor $\mathrm{Hom}_A(-, H^{**}(S))$ auf die entsprechende Abbildung in 2.5.2.22 an, so erhält man nach Konstruktion der langen exakten Sequenz gerade die obere Zeile. Die Komposition der unteren Zeile bildet das Differential im oben konstruierten exakten Paar. Die vertikalen Morphismen bilden ein Element der Homotopiegruppe auf die induzierte Abbildung in der Kohomologie ab und sind, wiederum nach (c), für die Spektren K_s Isomorphismen. Folglich stimmt die Kohomologie des E_1-Term bzgl. des Differentials (Nach Definition gerade der E_2-Term der Spektralsequenz) mit der Kohomologie der freien Auflösung von A-Moduln 2.5.2.22 nach Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}_A(-, H^{**}(S))$ überein, d.h.:

$$E_2^{s,t,u}(X) \cong \mathrm{Ext}_A^{s,t,u}(H^{**}(X), H^{**}(S)) \tag{2.5.2.24}$$

2.5.3 Vergleich von homologisch und kohomologisch konstruierter Adamsspektralsequenz

Sei $X \in \langle S \rangle_H$ ein H-zelluläres Spektrum, dessen Kohomologie $H^{**}(X)$ frei als $H^{**}(S)$-Modul und von motivisch endlichem Typ ist, und sei zusätzlich die natürliche Abbildung $\theta_X : H_{**}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}(H^{**}(X), H^{**}(S))$ (s. 2.4.1.20) ein Isomorphismus. Dann ist für eine kohomologische Adamsauflösung (X'_s, W'_s) von X, deren X'_s alle H-zellulär und deren W'_s alle Wedgesummen von Einhängungen von H von motivisch endlichem Typ sind, die von (X'_s, W'_s) induzierte Spektralsequenz vom E_2-Term an isomorph zu der von der kanonischen H_{**}-Adamsauflösung (X_s, W_s) (siehe 2.3.6) induzierten, d.h zu der homologisch konstruierten Spektralsequenz.
Beweis:

Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W_s = X_s \wedge H \arrow[r] & X'_s \wedge H \arrow[r] & W'_s \wedge H \arrow[d, bend left] \\ X_s \arrow[r] \arrow[u, "id_{X_s} \wedge \eta"] & X'_s \arrow[r] \arrow[u, "id_{X'_0} \wedge \eta"] & W'_s \arrow[u, "id_{W'_s} \wedge \eta"] \end{tikzcd} \tag{2.5.3.25}$$

Die Abbildung $W'_s \wedge H \longrightarrow W'_s$ ist durch die Multiplikation von H auf der Wedgesumme von Einhängungen von H gegeben, und die Verknüpfung mit $id_{W'_s} \wedge \eta$ liefert dementsprechend die Identität auf W'_s.

Wir wählen für $s = 0$ die Abbildung $X_0 = X \xrightarrow{id_X} X = X'_0$ und erhalten durch die Kommutativität des obenstehenden Diagramms einen Morphismus $W_s \longrightarrow W'_s$, s.d. beide Morphismen mit den Strukturabbildungen der Türme verträglich sind. Über die Kofaserungen

$$\begin{tikzcd} X_{s+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X_s \arrow[r] \arrow[d] & W_s \arrow[d] \\ X'_{s+1} \arrow[r] & X'_s \arrow[r] & W'_s \end{tikzcd}$$

erhalten wir eine mit den bisherigen Abbildungen verträgliche Abbildung $X_1 \longrightarrow X'_1$ und können den Vorgang induktiv fortsetzen, um einen Morphismus von Türmen zu erhalten.

Die Sequenz 2.5.2.22 war nach Definition eine Auflösung von $H^{**}(X)$ durch freie A-Moduln. Da A frei über $\mathbb{M}_2$ ist, folgt, dass es auch eine Auflösung durch freie $\mathbb{M}_2$-Moduln ist und, da wir $H^{**}(X)$ als frei über $\mathbb{M}_2$ angenommen haben, als solche spaltet. Definiere $H_{**}(\Sigma^{s,0}W'_s) \longrightarrow H_{**}(\Sigma^{s,0}W'_s)$ als Verkettung der von $\Sigma^{s,0}W'_s \longrightarrow \Sigma^{s+1,0}X'_{s+1}$ und $\Sigma^{s+1,0}X'_s \longrightarrow \Sigma^{s+1,0}K'_{s+1}$ induzierten Morphismen. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dashed] & H_{**}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{**}(W'_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{**}(\Sigma^{1,0}W'_1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & ... \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}(H^{**}(X), \mathbb{M}_2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}(H^{**}(W'_0), \mathbb{M}_2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}(H^{**}(\Sigma^{1,0}W'_1), \mathbb{M}_2) \arrow[r] & ... \end{tikzcd} \tag{2.5.3.26}$$

Die untere Zeile ist die Anwendung von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}((-), \mathbb{M}_2)$ auf 2.5.2.22 und darum eine spaltende Auflösung. Die vertikalen Abbildungen sind nach unseren Annahmen an X und die W'_s Isomorphismen (siehe 2.4.1) und die obere Zeile ist folglich eine spaltende Auflösung von $H_{**}(X)$ als $\mathbb{M}_2$-Modul. Da alle Objekte und Morphismen auch $H_{**}(H)$-Komoduln bzw. Komodulmorphismen sind, ist es auch eine Auflösung von $H^{**}(X)$ als $H_{**}(H)$-Komodul.

Die Homologie der W'_i $H_{**}(W'_i)$ ist als $\pi_{**}(H)$-Modul isomorph zu einer direkten Summe von (in den Graden verschobenen) Kopien von $H_{**}(H)$. Folglich ist sie als Komodul isomorph zum Tensorprodukt (über $\pi_{**}(H)$) von $H_{**}(H)$ mit einer direkten Summe von in den Graden verschobenen Kopien von $\pi_{**}(H)$. Also ist $H_{**}(W'_i)$ ein ausgedehnter und damit insbesondere ein relativ injektiver $H_{**}(H)$-Komodul.

Wir wissen aus 2.3.9, dass die entsprechende Sequenz für die kanonische homologische Adamsauflösung (X_s, W_s) ebenfalls eine Auflösung durch relativ injektive Komoduln ist. Die anfangs konstruierte Abbildung von Türmen liefert uns nun einen Morphismus von Auflösungen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_{**}(X) \arrow[r] \arrow[d, "id"] & H_{**}(W_0) \arrow[r] \arrow[d] & H_{**}(\Sigma^{1,0}W_1) \arrow[r] \arrow[d] & ... \\ 0 \arrow[r] & H_{**}(X) \arrow[r] & H_{**}(W_0') \arrow[r] & H_{**}(\Sigma^{1,0}W_1') \arrow[r] & ... \end{tikzcd} \tag{2.5.3.27}$$

Wendet man nun $\mathrm{Hom}_{H_{**}(H)}(\pi_{**}(H), (-))$ auf die Auflösung an, so erhält man für die kanonische Adamsauflösung den E_1-Term ihrer induzierten Spektralsequenz (Nach Definition einer homologischen Adamsauflösung) und für die kohomologische Auflösung ebenfalls, weil die natürliche Abbildung $\pi_{**}(W_s') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{H_{**}(H)}(\pi_{**}(H), H_{**}(K_s))$ nach unseren Annahmen an W_s' ein Isomorphismus ist. Da die Abbildung $H_{**}(X) \longrightarrow H_{**}(X)$ die Identität war, induziert die Abbildung von Auflösungen einen Isomorphismus auf den Kohomologiegruppen, d.h. zwischen den E_2-Termen der homologischen und kohomologisch konstruierten Adamsspektralsequenzen. D.h. inbesondere, dass die von der anfangs konstruierten Abbildung von Türmen induzierte Abbildung von exakten Paaren auf dem E_2-Teil der derivierten Paare einen Isomorphismus induziert (Nämlich gerade den eben untersuchten). Eine solche Abbildung von exakten Paaren induziert aber einen Isomorphismus auf den E_r-Teilen aller nachfolgenden derivierten Paare, und die Aussage folgt. $\square$

2.5.4 Anmerkung: Existenz einer kohomologischen Adamsauflösung

Sei $X \in \langle S \rangle_H$ ein Spektrum, dessen Kohomologie $H^{**}(X)$ frei als $H^{**}(S)$-Modul und von motivisch endlichem Typ ist. Für ein solches X existiert stets eine kohomologische Adamsauflösung (X_s', W_s'), s.d. X_s in $\langle S \rangle_H$ liegt und K_s' ein Wedge von Eilenberg-Maclane-Spektren von motivisch endlichem Typ ist.

Beweis:

Da $H^{**}(X)$ frei als $H^{**}(S) = \mathbb{M}_2$-Modul und von motivisch endlichem Typ ist, existiert eine Basis α_i, die eine Abbildung in $\bigvee_i \Sigma^{n_i,m_i} H =: K_0$ induziert, s.d. $H^{**}(K_0) \longrightarrow H^{**}(X)$ surjektiv ist und K_0 ein Wedge von Eilenberg-MacLane-Spektren von motivisch endlichem Typ ist. Definiere X_1 als die Faser von $X \longrightarrow K_0$. Man erhält eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{M}_2$-Moduln:

$$0 \longrightarrow H^{**}(\Sigma^{1,0}X_1) \longrightarrow H^{**}(K_0) \longrightarrow H^{**}(X) \longrightarrow 0$$

Diese Sequenz spaltet, weil $H^{**}(X)$ als $\mathbb{M}_2$-Modul frei ist. Da $\mathbb{M}_2 = \mathbb{F}[\tau]$ als Polynomring in einer Variablen über einem Körper ein Hauptidealring ist, folgt, dass $H^{**}(\Sigma^{1,0}X_1)$ frei (und von motivisch endlichem Typ, da $H^{**}(K_0)$ von motivisch endlichem Typ) ist, und folglich auch $H^{**}(X_1)$. Da $X = X_0$ und K_0 beide H-zellulär sind, ist es nach Punkt 2 von 2.4.2 auch X_1. Also können wir die Konstruktion induktiv fortsetzen. $\square$

3 Konvergenz der motivischen Adams-Spektralsequenz

Für die Diskussion der Konvergenzeigenschaften der (homologisch konstruierten) E-Adamsspektralsequenz benötigen wir ein angemessenes Ziel. Dieses ist die von Bousfield in [BOU] konstruierte E-nilpotente Vervollständigung von X bzw. eine Filtration ihrer Homotopiegruppen. Mit geringen Anforderungen an die Terme der Spektralsequenz erhalten wir so die von Bousfield definierte vollständige Konvergenz, die insbesondere starke Konvergenz im Sinne von Boardman([BOA]) impliziert, d.h. die Filtration ist ausschöpfend, vollständig und Hausdorff. Die erste Eigenschaft erhalten wir dabei aus dem Umstand, dass die Adamsspektralsequenz eine halbseitige Spektralsequenz ist, die nur für $s \geq 0$ von 0 verschiedene Terme hat. Die beiden letztgenannten Eigenschaften erhalten wir weitgehend automatisch analog zu Boardman [BOA, Lemma 5.4(b)] - mit der Einschränkung, dass erst vollständige Konvergenz sicherstellt, dass die Homotopiegruppen der E-nilpotenten Vervollständigung dem Objekt A^∞ von Boardman entsprechen. Die Schwierigkeit besteht dann darin, die E-nilpotente Vervollständigung in sinnvolle Relation zu dem ursprünglichen Spektrum X zu setzen.
In den folgenden Abschnitten erkläre ich die Konvergenzaussage für das motivische Sphärenspektrum [DI, Korollar 6.15], die unter unseren Anforderungen an den Grundkörper k durch die von Adams in [A2] bewiesene „vanishing line“ im klassischen Fall folgt, und skizzenhaft die in der Einleitung angesprochene Verfeinerung der allgemeinen Konvergenzaussagen durch Hu, Kriz und Ormsby [HKO, Theorem 1], die uns unter gewissen Endlichkeitseinschränkungen für motivische Zellenspektren Konvergenz gegen die 2-Vervollständigung von X garantiert.

3.1 Konvergenzbedingungen für allgemeines E

Im folgenden Abschnitt brauchen wir wiederholt bestimmte Aussagen über $\varprojlim$ und $\varprojlim^1$:

3.1.1 Mittag-Leffler-Bedingung

Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein inverses System abelscher Gruppen. $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die *Mittag-Leffler-Bedingung*/ist *Mittag-Leffler*, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $r(n)$ existiert, s.d.

$$\mathrm{Im}(G_{n+r'} \to G_n) = \mathrm{Im}(G_{n+r(n)} \to G_n)$$

für $r' \geq r(n)$.

Ist $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Mittag-Leffler, so ist $\varprojlim_n{}^1(G_n) = 0$.

$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere dann Mittag-Leffler, wenn eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

- Alle Morphismen $G_{n+1} \to G_n$ sind surjektiv.
- Die Gruppen G_n sind für hinreichend großes n gleich 0. (Dann auch $\varprojlim_n(G_n) = 0$)

Siehe [RAV2, A.5.11, A.5.12].

3.1.2 Lim^1 für Türme von Gruppen

Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein inverses System von abelschen Gruppen und $G_n^{(r)} := \text{Im}(G_{n+r} \to G_n)$. Für die Türme $(G_n)_n$, $(G_n^{(r)})_n$ und $(G_n^{(r)})_r$ gilt dann:

1.
$$\varprojlim_n G_n^{(r)} \cong \varprojlim_n G_n \text{ und } \varprojlim_n{}^1 G_n^{(r)} \cong \varprojlim_n{}^1 G_n \tag{3.1.2.1}$$

2. Es existiert ein natürlicher Isomorphismus
$$\varprojlim_n \varprojlim_r G_n^{(r)} \cong \varprojlim_n G_n \tag{3.1.2.2}$$
und eine natürliche exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow \varprojlim_n{}^1 \varprojlim_r G_n^{(r)} \longrightarrow \varprojlim_n{}^1 G_n \longrightarrow \varprojlim_n{}^1 \varprojlim_r{}^1 G_n^{(r)} \longrightarrow 0 \tag{3.1.2.3}$$

(Siehe [BK, IX.§3 Proposition 3.4] oder [GJ, Lemma 2.23], sowie [BOA, Theorem 3.4])

3.2 Die E-nilpotente Vervollständigung

In diesem Kapitel folge ich sehr eng der Vorgehensweise von Bousfield in [BOU], der die E-nilpotente Vervollständigung eines Spektrums X als inversen Homotopielimes eines Turms unter X definiert, den er aus der kanonischen E-Adams-Auflösung konstruiert. Dieser alternative Turm induziert die gleiche Spektralsequenz wie die kanonische Auflösung.

3.2.1 Definition des alternativen Turms C_s

Sei (E_s, W_s) die kanonische E_{**}-Adamsauflösung, induziert von der Fasersequenz
$\bar{E} \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\eta} E \xrightarrow{k} \Sigma\bar{E}$ (s. (2.3.6.9)).

(Im Interesse der Lesbarkeit schreibe ich hier und im Rest des Abschnitts kurz Σ für die

Suspension $\Sigma^{1,0}$, d.h. den Shift in der triangulierten Struktur der motivischen Homotopiekategorie.)
Die Komposition der Abbildungen $i \wedge \bar{E}^{\wedge s}$ liefert einen Morphismus $i_s : \bar{E}^{\wedge s} \longrightarrow S$. Sei für $s \in \mathbb{N}_0$ $\bar{E}_s$ die Homotopiekofaser dieser Abbildung(Insbesondere $\bar{E}_{-1} = 0$):

$$\bar{E}^{\wedge s} \xrightarrow{i_s} S \xrightarrow{b} \bar{E}_{s-1} \xrightarrow{c} \Sigma\bar{E}^{\wedge s} \tag{3.2.1.4}$$

Da (3.2.1.4) und $\bar{E}^{\wedge(s+1)} \overset{i\wedge\bar{E}^{\wedge s}}{\longrightarrow} \bar{E}^{\wedge s} \overset{\eta\wedge\bar{E}^{\wedge s}}{\longrightarrow} E \wedge \bar{E}^{\wedge s} \overset{k\wedge\bar{E}^{\wedge s}}{\longrightarrow} \Sigma(\bar{E}^{\wedge(s+1)})$ ausgezeichnete Dreiecke in der triangulierten Struktur von SHo^S sind und weiterhin $(i \wedge \bar{E}^{\wedge s}) \circ i_s = i_{s+1}$ bzw. $(\Sigma(\eta \wedge \bar{E}^{\wedge s}) \circ c) = (\Sigma(\eta \wedge \bar{E}^{\wedge s})) \circ (c)$ nach Definition gilt, gibt es nach dem Axiom von Verdier Abbildungen u, v, s.d. das folgende Diagramm kommutiert(d.h. in allen Teildreiecken bzw. Teilvierecken):

$$\begin{tikzcd}
\bar{E}^{\wedge(s+1)} \arrow[rr, "i_{s+1}"] \arrow[dr, "i\wedge\bar{E}^{\wedge s}"] & & S \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "b"] & & \bar{E}_{s-1} \arrow[rr, "\Sigma(\eta\wedge\bar{E}^{\wedge s})\circ c"] \arrow[dr, "c"] & & \Sigma(E \wedge \bar{E}^{\wedge s}) \\
& \bar{E}^{\wedge s} \arrow[ur, "i_s"] \arrow[dr, "\eta\wedge\bar{E}^{\wedge s}"] & & \bar{E}_s \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "c"] & & \Sigma\bar{E}^{\wedge s} \arrow[ur, "\Sigma(\eta\wedge\bar{E}^{\wedge s})"] & \\
& & E \wedge \bar{E}^{\wedge s} \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "k\wedge\bar{E}^{\wedge s}"] & & \Sigma\bar{E}^{\wedge(s+1)} \arrow[ur, "\Sigma(i\wedge\bar{E}^{\wedge s})"] & &
\end{tikzcd} \tag{3.2.1.5}$$

und so, dass

$$E \wedge \bar{E}^{\wedge s} \xrightarrow{u} \bar{E}_s \xrightarrow{v} \bar{E}_{s-1} \overset{\Sigma(\eta\wedge\bar{E}^{\wedge s})\circ c}{\longrightarrow} \Sigma(E \wedge \bar{E}^{\wedge s}) \tag{3.2.1.6}$$

ein ausgezeichnetes Dreieck in der triangulierten Struktur, dh. eine Kofasersequenz ist. Insbesondere kommutieren die folgenden beiden Teildiagramme:

$$\begin{tikzcd}
\bar{E}^{\wedge(s+1)} \arrow[r, "i^{s+1}"] \arrow[d, "i\wedge\bar{E}^{\wedge s}"] & S \arrow[r, "b"] \arrow[d, "id_S"] & \bar{E}_s \arrow[r, "c"] \arrow[d, "v"] & \Sigma(\bar{E}^{\wedge(s+1)}) \arrow[d, "\Sigma(i\wedge\bar{E}^{\wedge s})"] \\
\bar{E}^{\wedge s} \arrow[r, "i^s"] & S \arrow[r, "b"] & \bar{E}_{s-1} \arrow[r, "c"] & \Sigma(\bar{E}^{\wedge s})
\end{tikzcd} \tag{3.2.1.7}$$

und

$$\begin{tikzcd}
E \wedge \bar{E}^{\wedge s} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id_{E\wedge\bar{E}^{\wedge s}}"] & \bar{E}_s \arrow[r, "v"] \arrow[d, "c"] & \bar{E}_{s-1} \arrow[r, "\Sigma(\eta\wedge\bar{E}^{\wedge s})\circ c"] \arrow[d, "c"] & \Sigma(E \wedge \bar{E}^{\wedge s}) \arrow[d, "\Sigma id_{E\wedge\bar{E}^{\wedge s}}"] \\
E \wedge \bar{E}^{\wedge s} \arrow[r, "k\wedge\bar{E}^{\wedge s}"] & \Sigma\bar{E}^{\wedge(s+1)} \arrow[r, "\Sigma(i\wedge\bar{E}^{\wedge s})"] & \Sigma\bar{E}^{\wedge s} \arrow[r, "\Sigma(\eta\wedge\bar{E}^{\wedge s})"] & \Sigma(E \wedge \bar{E}^{\wedge s})
\end{tikzcd} \tag{3.2.1.8}$$

Smasht man die Kofasersequenz 3.2.1.6 von rechts mit X, so erhält man mit der Definition $C_s := \bar{E}_s \wedge X$ eine Kofasersequenz:

$$W_s \xrightarrow{u} C_s \xrightarrow{v} C_{s-1} \overset{(\Sigma(\eta\wedge\bar{E}^s)\circ c)\wedge id_X}{\longrightarrow} \Sigma(W_s) \tag{3.2.1.9}$$

bzw. einen Turm unter X ($X \overset{b\wedge id_X}{\longrightarrow} C_s$):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & ... \arrow[r] & C_s \arrow[r] \arrow[d] & C_{s-1} \arrow[r] \arrow[d] & ... \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_0 \arrow[d] \\ & & \Sigma W_{s+1} & \Sigma W_s & & \Sigma W_2 & \Sigma W_1 \end{tikzcd} \tag{3.2.1.10}$$

Die langen exakten $\pi_{**}(-)$-Sequenzen von 3.2.1.9 bilden wie zuvor ein exaktes Paar

$$\begin{tikzcd} \pi_{*-s,*}(C_s)_{(s,*,*)} \arrow[rr, "\pi_{**}(v\wedge id_X)"] & & \pi_{*-s,*}(C_s)_{(s,*,*)} \arrow[dl, "\pi_{*-s,*}(\Sigma(\eta\wedge\bar{E}^s)\circ c)\wedge id_X"] \\ & \pi_{*-s,*}(W_s)_{(s,*,*)} \arrow[ul, "\pi_{**}(u\wedge id_X)"] & \end{tikzcd} \tag{3.2.1.11}$$

Diese Spektralsequenz ist isomorph zu der von der kanonischen homologischen Adamsauflösung induzierten Spektralsequenz: Das Diagramm (3.2.1.8) liefert uns einen Morphismus von exakten Paaren zwischen dem exakten Paar des alternativen Turms und dem exakten Paar der kanonischen Adamsauflösung. Die E_1-Terme der Spektralsequenz sind offensichtlich isomorph, bzw. sogar identisch. Dann folgt, dass der Morphismus von exakten Paaren auch auf allen anderen E_r-Termen einen Isomorphismus induziert. Wir können also zur Diskussion der Konvergenzeigenschaften der Adamsspektralsequenz anstelle des kanonischen Turm (X_s, W_s) den alternativen Turm $(C_s, \Sigma W_s)$ heranziehen.

3.2.2 E-Nilpotenz

Sei C die kleinste Unterkategorie in SHo^s, s.d.

(a) $E \in C$

(b) Wenn $N \in C$ und $X \in Ho^s$ beliebig, dann ist das Smashprodukt $N \wedge X \in C$

(c) Ist $X \to Y \to Z \to \Sigma X$ eine Fasersequenz in Ho^s und zwei der Elemente X, Y, Z sind in C, so ist auch das dritte in C

(d) Ist $N \in C$ und $M \in Ho^s$ ein Retrakt von N, d.h. $\exists f : N \longrightarrow M$ und $\exists g : M \longrightarrow N$ mit $f \circ g = id_M$, so ist $M \in C$.

Die in C enthaltenen Spektren heißen E-nilpotent.

3.2.3 Definition: E-nilpotente Vervollständigung

Sei X ein beliebiges motivisches Spektrum. Seine *E-nilpotente Vervollständigung* $X_E^\wedge$ ist als inverser Homotopielimes über die Elemente C_s in dem so eben konstruierten alternativen Turm für X definiert:
$X_E^\wedge := \underset{\leftarrow s}{\mathrm{holim}}\, C_s$.
Die Abbildungen $X \overset{b\wedge id_X}{\longrightarrow} C_s$ induzieren einen Morphismus $X \longrightarrow X_E^\wedge$.

Die Spektren C_s sind induktiv alle E-nilpotent:
Nach Definition ist $\bar{E}_0$ als Kofaser von $\bar{E} \overset{i}{\longrightarrow} S$ äquivalent zu E, also E-nilpotent. Den Induktionsschritt erhalten wir aus der Sequenz 3.2.1.8.
Nach Bousfield [BOU, Lemma 5.7] gilt zusätzlich $\underset{s}{\underleftarrow{\lim}}[C_s, N]_{**} \overset{\cong}{\longrightarrow} [X, N]_{**}$ für jedes E-nilpotente Spektrum N. Beliebige Türme unter X, die diese beiden Eigenschaften erfüllen, nennt Bousfield E-nilpotente Auflösungen, und zeigt, dass ihr inverser Homotopielimes zu $X_E^\wedge$ äquivalent ist ([BOU, Lemma 5.8]. Siehe auch [DI, 6.8 und Seite 994], warum der Beweis auch im motivischen Kontext gültig ist). Diese alternative Konstruktionsmöglichkeit der E-nilpotenten Vervollständigung werden wir vorläufig noch nicht brauchen, aber in der Beweisskizze des Konvergenztheorems aus [HKO] verwenden.

3.2.4 Definition: Filtration auf der E-nilpotenten Vervollständigung

Der in 3.2.1 definierte Turm $(C_s, \Sigma K_{s+1})$ induziert auf den Homotopiegruppen $\pi_{**}(X_E^\wedge)$ eine Filtration $F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) := \mathrm{Kern}(\pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \pi_{**}(C_{s-1}))$. Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \pi_{**}(X_E^\wedge) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_{**}(C_s) \arrow[d] \\ & \pi_{**}(C_{s-1}) \end{tikzcd} \tag{3.2.4.12}$$

folgt $F^{s+1}(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \subset F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \subset F^0(\pi_{**}(X_E^\wedge)) = \pi_{**}(X_E^\wedge)$ (Wegen $C_{-1} = 0$).

3.2.5 Lemma

Die Projektionen $\pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \pi_{**}(X_E^\wedge)/F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge))$ induzieren einen surjektiven Morphismus

$$\pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \underset{s}{\underleftarrow{\lim}}(\pi_{**}(X_E^\wedge)/F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge))) \tag{3.2.5.13}$$

Dieser ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \underset{s}{\underleftarrow{\lim}}\pi_{**}(C_s)$ ein Isomorphismus ist, genau dann, wenn $\underset{s}{\underleftarrow{\lim}}^1\pi_{**}(C_s) = 0$ gilt.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim_s^1 \pi_{*+1,*}(C_s) \arrow[r] & \pi_{**}(X_E^\wedge) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_s \pi_{**}(C_s) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & \varprojlim_s \pi_{**}(X_E^\wedge)/F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \arrow[r] & \varprojlim_s \pi_{**}(C_s) &
\end{tikzcd} \tag{3.2.5.14}$$

Die erste Zeile des Diagramms ist die Milnor-Sequenz von $X_E^\wedge$, das als Homotopielimes der C_s definiert ist. Die vertikale Abbildung ist die Projektion 3.2.5.13. Die Abbildung in der zweiten Zeile wird durch die injektiven Morphismen $\pi_{**}(X_E^\wedge)/F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow \pi_{**}(C_{s-1})$ induziert und ist folglich injektiv, da $\varprojlim_s$ linksexakt ist. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt, dass sie auch surjektiv und damit ein Isomorphismus ist. Also ist auch die Projektion 3.2.5.13 surjektiv, und injektiv genau dann, wenn $\pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \varprojlim_s \pi_{**}(C_s)$ injektiv ist, genau dann, wenn $\varprojlim_s^1 \pi_{**}(C_s) = 0$. □

3.2.6 Lemma

Für $r > s$ gilt $d_r : E_r^{s,*,*} \longrightarrow E_r^{s-r,*+r-1,*} = 0$, d.h. $E_{r+1}^{s,*,*} \subset E_r^{s,*,*}$. Definiere $E_\infty^{s,*+s,*}(X) := \bigcap_{r>s} E_r^{s,*,*}(X) = \varprojlim_r E_r^{s,*,*}(X)$.
Das Bild der Verkettung $F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow \pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \pi_{**}(C_s)$ verschwindet nach Definition der Filtration unter $\pi_{**}(C_s) \longrightarrow \pi_{**}(C_{s-1})$, und ihr Kern ist gerade $F^{s+1}(\pi_{**}(X_E^\wedge))$.
Sei $x \in \pi_{*-s,*}(X_E^\wedge)$. In der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen der Kofaserung $K_s \longrightarrow C_s \longrightarrow C_{s-1}$ liftet das Bild von x in $\pi_{*-s,*}(C_s)$ zu einem Element $y \in \pi_{*-s,*}(K_s) = E_1^{s,*,*}(X)$.
Behauptung: Die Zuordnung $x \mapsto y$ definiert einen Morphismus $F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow E_\infty^{s,*+s,*}(X)$ mit Kern $F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge))$, d.h. einen injektiven Morphismus

$$F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge))/F^{s+1}(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow E_\infty^{s,*+s,*}(X) \tag{3.2.6.15}$$

Beweis
(y ist permanenter Zykel) Sei für $t \geq 0$ x_t das Bild von x unter $\pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \pi_{**}(C_t)$. Da x_{s+1} von $\pi_{*,*}(C_{s+1}) \longrightarrow \pi_{*,*}(C_s)$ auf x_s abgebildet wird, ist $x_s \in \mathrm{Im}(\pi_{*,*}(C_{s+1}) \longrightarrow \pi_{*,*}(C_s)) = \ker(\pi_{*,*}(C_s) \longrightarrow \pi_{*-1,*}(K_{s+1}))$. Nach Definition ist $d_1(y)$ gerade das Bild von x unter $\pi_{*,*}(C_s) \longrightarrow \pi_{*-1,*}(K_{s+1}))$, also 0.
Sei nun schon gezeigt, dass y unter den Differentialen d_1 bis d_{n-1} ein Zykel ist. Dann ist das Differential d_n auf der Restklasse von y durch die Restklasse des Bildes von x_{s+n-1} unter $\pi_{*,*}(C_{s+n-1}) \longrightarrow \pi_{*-1,*}(K_{s+n}))$ gegeben. Wiederum bildet aber $\pi_{*,*}(C_{s+n}) \longrightarrow \pi_{*,*}(C_{s+n-1})$ x_{s+n} auf x_{s+n-1} ab und das Differential verschwindet auf der Restklasse von y aus denselben Gründen wie für den Fall n=1.

(Wohldefiniertheit) Seien $y, \tilde{y}$ zwei verschiedene Lifts von x_s in $\pi_{**}K_s$. Dann liegt $y - \tilde{y}$

im Kern von $\pi_{**}(K_s) \longrightarrow \pi_{**}(C_s)$ und liftet dementsprechend zu einem Element $z \in \pi_{*+1,*}(C_{s-1})$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_{*+1,*}(K_0) \arrow[r] & \pi_{*+1,*}(C_0) \arrow[r] & 0 = \pi_{*+1,*}(C_{-1}) \\
& \cdots \arrow[u] & \\
& \pi_{*+1,*}(C_{s-2}) \arrow[u] & \\
& \pi_{*+1,*}(C_{s-1}) \arrow[u] \arrow[r] & \pi_{**}(K_s)
\end{tikzcd} \tag{3.2.6.16}$$

Das Bild von z unter der Verkettung $\pi_{*+1,*}(C_{s-1}) \longrightarrow \pi_{*+1,*}(C_0)$ verschwindet trivialerweise unter $\pi_{*+1,*}(C_0) \longrightarrow \pi_{*+1,*}(C_{-1}) = 0$ und liftet zu einem Element $\tilde{z} \in \pi_{*+1,*}(K_0)$. Dieses Element$\tilde{z}$ überlebt bis in den E_s-Term der Spektralsequenz: Sei für $0 \leq t < s-1$ z_t das Bild von z in $\pi_{*+1,*}(C_t)$. Das Differential $d_{t+1}(\tilde{z})$ ist durch die Restklasse des Bildes von z_t unter $\pi_{*+1,*}(C_t) \longrightarrow \pi_{**}(K_{t+1})$ gegeben. Da $z_t \in \mathrm{Im}(\pi_{*+1,*}(C_{t+1}) \longrightarrow \pi_{*+1,*}(C_t)) = \ker(\pi_{*+1,*}(C_t) \longrightarrow \pi_{**}(K_{t+1}))$ folgt $d_{t+1}(\tilde{z}) = 0$. Das Differential d_s bildet $\tilde{z}$ nach Definition auf $y - \tilde{y}$ ab, d.h. $y - \tilde{y} = 0$ in $E_{s+1}^{s,*+s,*}(X)$. Also definieren y und $\tilde{y}$ dasselbe Element in $E_\infty^{s,*+s,*}(X)$.

(Injektivität) Nach Definition der Filtration ist x_s genau dann gleich 0, wenn $x \in F^{s+1}(\pi_{**}(X_E^\wedge))$. In diesem Fall kann als Lift von x_s $y = 0$ gewählt werden, und x liegt im Kern der Abbildung nach $F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow E_\infty^{s,*+s,*}(X)$. Andernfalls liftet x_s zu einem Element $y \neq 0$. Da y ein Lift von $x_s \neq 0$ ist, kann es von der Abbildung $\pi_{*+1,*}(C_{s-1}) \longrightarrow \pi_{**}(K_s)$ nicht getroffen werden. Insbesondere wird die entsprechende Restklasse von y von keinem der Differentiale d_n getroffen werden und definiert ein von null verschiedenes Element in $E_\infty^{s,*+s,*}(X)$. $\square$

3.2.7 Definition: Vollständige Konvergenz

Die motivische Adamsspektralsequenz heißt *vollständig konvergent* (siehe [BOU, Kapitel 6]), wenn die Morphismen 3.2.5.13 und 3.2.6.15 Isomorphismen sind.
In der Sprache von Boardman [BOA] heißt sie *stark konvergent* gegen die Filtration $F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge))$, wenn $F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge))/F^{s+1}(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \cong E_\infty^{s,*+s,*}$ und die gegebene Filtration zusätzlich vollständig und Hausdorff ist, d.h:

$$\varprojlim_s F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) = \bigcap_s F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) = 0 \text{ und } \varprojlim_s{}^1 F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) = 0$$

In unserem Fall fallen beide Begriffe zusammmen, d.h. die Filtration $F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge))$ ist im Fall vollständiger Konvergenz vollständig und Hausdorff.
Beweis:

Wir haben nach Definition der Filtration eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow \pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \mathrm{Im}(\pi_{**}(X_E^\wedge) \to \pi_{**}(C_{s-1})) \longrightarrow 0$$

und $\mathrm{Im}(\pi_{**}(X_E^\wedge) \to \pi_{**}(C_{s-1})) \subset \pi_{**}(C_{s-1})$.
Dann liefert uns Anwendung von $\varprojlim_s$ auf diese Sequenz die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \varprojlim_s F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow \pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \varprojlim_s \mathrm{Im}(\pi_{**}(X_E^\wedge) \to \pi_{**}(C_{s-1})) \longrightarrow \varprojlim_s{}^1 F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow 0$$

Der mittlere Morphismus ist im Fall vollständiger Konvergenz aber gerade der Isomorphismus, zu dem die Milnorsequenz von $X_E^\wedge$ wegen $\varprojlim_s{}^1(\pi_{**}(C_s)) = 0$ degeneriert. Es folgt, dass die Filtration vollständig und Hausdorff ist. $\square$

3.2.8 Lemma von der vollständigen Konvergenz

Die Adamsspektralsequenz von X ist genau dann vollständig konvergent, wenn

$$\varprojlim_r{}^1 E_r^{*,*,*} = 0 \tag{3.2.8.17}$$

Das Lemma wurde von Bousfield und Kan in [BK, IX.5.4] bewiesen. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in [GJ, VI.2.20].
Beweis:
Definiere $\pi_{**}(X_s^{(r)}) = \mathrm{Im}(\pi_{**}(C_{s+r}) \longrightarrow \pi_{**}(C_s))$, d.h. die Menge aller Elemente in $\pi_{**}(C_s)$, die unter der r-fachen Verkettung von $\pi_{**}(C_{t+1}) \longrightarrow \pi_{**}(C_t)$ ein Urbild haben. $E_{r+1}^{***}(X)$ und $\pi_{**}(X_s^{(r)})$ bilden das r-te derivierte Paar.
Sei $s \geq 0$ fest gewählt. Durch Abwickeln des (r-1)-ten derivierten Paares erhalten wir für $r > s$ eine exakte Sequenz:

$$0 = \pi_{*+1,*}(C_{s-r}^{(r-1)}) \longrightarrow E_r^{s,*+s,*} \longrightarrow \pi_{*,*}(C_s^{(r-1)}) \longrightarrow \pi_{*,*}(C_{s-1}^{(r-1)}) \tag{3.2.8.18}$$

Das Bild von $\pi_{*,*}(C_s^{(r-1)}) \longrightarrow \pi_{*,*}(C_{s-1}^{(r-1)})$ ist nach Definition gerade $\pi_{*,*}(C_{s-1}^{(r)})$, d.h. wir erhalten aus der vorhergehenden die folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow E_r^{s,*+s,*} \longrightarrow \pi_{*,*}(C_s^{(r-1)}) \longrightarrow \pi_{*,*}(C_{s-1}^{(r)}) \longrightarrow 0 \tag{3.2.8.19}$$

Anwendung von $\varprojlim_r$ auf die kurze exakte Sequenz liefert dann die zweite Zeile in dem folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^s/F^{s+1}(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \arrow[r] \arrow[d] & (\pi_{**}(X_E^\wedge))/F^{s+1}(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \arrow[r] \arrow[d] & (\pi_{**}(X_E^\wedge))/F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_\infty^{s,*+s,*} \arrow[r] & \varprojlim_r \pi_{*,*}(C_s^{(r)}) \arrow[r] & \varprojlim_r \pi_{*,*}(C_{s-1}^{(r)}) \arrow[r] & \varprojlim_r{}^1 E_r^{s,*,*}
\end{tikzcd} \tag{3.2.8.20}$$

Der erste vertikale Morphismus ist 3.2.6.15. Das Bild von $\varprojlim_t \pi_{**}(C_t)$ in $\pi_{**}(C_s)$ liegt in $\varprojlim_r \pi_{**}(C_s^{(r)})$ für beliebig große r, und die beiden folgenden vertikalen Morphismen sind durch die Verkettung $\pi_{**}(X_E^\wedge) \longrightarrow \varprojlim_t \pi_{**}(C_t) \longrightarrow \varprojlim_r \pi_{**}(C_s^{(r)})$ definiert (Aus der Milnorsequenz von $X_E^\wedge$ folgt, dass der erste Morphismus der Komposition stets surjektiv ist) und nach Definition von $F^s(\pi_{**}(X_E^\wedge))$ injektiv. Das zweite Quadrat kommutiert offensichtlich, das erste nach Konstruktion von 3.2.6.15.

($\varprojlim_r{}^1 E_r^{*,*,*} = 0$ ist notwendige Bedingung für vollständige Konvergenz)
Da 3.2.5.13 ein Isomorphismus ist, folgt $\varprojlim_s{}^1 \pi_{**}(C_s) = 0$. Die kurze exakte Sequenz 3.1.2.3 liest sich in diesem Fall dann folgendermaßen:

$$0 \longrightarrow \varprojlim_s{}^1 \varprojlim_r \pi_{**}(C_s^{(r)}) \longrightarrow \varprojlim_s{}^1 \pi_{**}(C_s) \longrightarrow \varprojlim_s \varprojlim_r{}^1 \pi_{**}(C_s^{(r)}) \longrightarrow 0 \tag{3.2.8.21}$$

Das Verschwinden des mittleren Terms impliziert $\varprojlim_s \varprojlim_r{}^1 \pi_{**}(C_s^{(r)}) = 0$. Da die Abbildungen

$$\varprojlim_r{}^1 \pi_{*,*}(C_s^{(r)}) \longrightarrow \varprojlim_r{}^1 \pi_{*,*}(C_{s-1}^{(r)})$$

im (fortgesetzten) Diagramm 3.2.8.20 surjektiv sind, folgt $\varprojlim_r{}^1 \pi_{**}(C_s^{(r)}) = 0$.
Andererseits können wir, da 3.2.6.15 nach Annahme ein Isomorphismus ist, aus dem Diagramm 3.2.8.20 für s=0 schließen, dass

$$\pi_{**}(X_E^\wedge)/F^1(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow \varprojlim_r \pi_{**}(C_0^{(r)})$$

ein Isomorphismus ist.
Induktiv folgt dann aus demselben Diagramm, dass für beliebige s

$$\pi_{**}(X_E^\wedge)/F^{s+1}(\pi_{**}(X_E^\wedge)) \longrightarrow \varprojlim_r \pi_{**}(C_s^{(r)})$$

ein Isomorphismus ist, und folglich, dass die Abbildungen $\varprojlim_r \pi_{*,*}(C_s^{(r)}) \longrightarrow \varprojlim_r \pi_{*,*}(C_{s-1}^{(r)})$ alle surjektiv sind.
Mit diesen beiden Informationen erhalten wir aus der (fortgesetzten) unteren Zeile von 3.2.8.20, dass $\varprojlim_r{}^1 E_r^{s,*,*} = 0$.
($\varprojlim_r{}^1 E_r^{*,*,*} = 0$ ist hinreichende Bedingung für vollständige Konvergenz)
Die Vorraussetzung $\varprojlim_r{}^1 E_r^{s,*,*} = 0$ impliziert die Surjektivität von $\varprojlim_r \pi_{*-s,*}(C_s^{(r-1)}) \longrightarrow$

$\varprojlim_r \pi_{*-s,*}(C_{s-1}^{(r-1)})$ im Diagramm 3.2.8.20, aber auch die Surjektivität von $\varprojlim_t \pi_{**}(C_t) \longrightarrow \varprojlim_r \pi_{**}(C_s^{(r)})$. Nach Definition der hinteren beiden vertikalen Morphismen sind diese also surjektiv und damit Isomorphismen. Nach dem Fünferlemma ist dann auch 3.2.6.15 ein Isomorphismus.
Ebenso impliziert die Surjektivität, dass $(\varprojlim_r \pi_{*,*}(C_s^{(r-1)}))_s$ Mittag-Leffler ist, und wir erhalten $\varprojlim_s{}^1 \varprojlim_r \pi_{*,*}(C_s^{(r-1)}) = 0$.
Aus den kurzen exakten Sequenzen 3.2.8.19 folgt für s=0:

$$\pi_{**}(C_0^{(r)}) \cong E_{r+1}^{0,*+s,*} \text{ und } \varprojlim_r{}^1 \pi_{**}(C_0^{(r)}) \cong \varprojlim_r{}^1 E_{r+1}^{0,*+s,*} = 0$$

und für $s > 0$:

$$\varprojlim_r{}^1 \pi_{**}(C_s^{(r)}) \cong \varprojlim_r{}^1 \pi_{**}(C_{s-1}^{(r)})$$

Induktiv folgt also für alle s: $\varprojlim_r{}^1 \pi_{**}(C_s^{(r)}) = 0$. Mit der kurzen exakten Sequenz 3.2.8.21 folgt dann $\varprojlim_s{}^1 \pi_{**}(C_s) = 0$, d.h. 3.2.5.13 ist ein Isomorphismus. □

3.3 Konvergenz für H und S

3.3.1 Theorem(Adams): Vanishing line

Sei k ein kommutativer Hauptidealring und A eine graduierte k-Algebra mit den folgenden Eigenschaften:

1. A enthält eine äußere k-Algebra, erzeugt von einem homogenen Generator e, dessen Dimension mit ϵ bezeichnet wird.
2. Es existiert eine Menge homogener Elemente $\{a_i\}$ von Grad q_i in A, s.d. A als K-Modul von den Elementen 1, e, a_i, $a_i e$, ea_i, $ea_i e$ frei erzeugt ist.
3. Sei $q := \min(q_i)$: Dann gelte $0 < \epsilon < q$.

Unter diesen Bedingungen gilt $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(k,k) = 0$ für $s\epsilon < t < sq$, wobei k mit der trivialen A-Modulstruktur versehen ist.
Das Theorem wurde von John Frank Adams in [A2] bewiesen. Für die Anwendung in der klassischen Adamsspektralsequenz ist im Laufe der Zeit die „Steigung“ der Begrenzungslinie schärfer eingegrenzt worden.
(Anmerkung: Das Theorem wird in Adams Artikel für den Fall formuliert, dass k ein Körper ist. Der Beweis gilt aber auch unter unseren Vorraussetzungen)

3.3.2 Korollar: „Vanishing line“ in der motivischen Adamsspektralsequenz des Sphärenspektrums

Der E_2-Term der kohomologisch konstruierten Adamsspektralsequenz des motivischen Sphärenspektrums

$$E_2^{s,t,u}(S) = \mathrm{Ext}_A^{s,t,u}(H^{**}(S), H^{**}(S))$$

ist, unabhängig von u, für alle Koordinatenpaare (s,t,u) mit $s < t < 2s$ (bzw. äquivalent $0 < t - s < s$) gleich 0.
Beweis:
Dies folgt aus 3.3.1 mit $k = H^{**}(S) = \mathbb{M}_2$ und $A = H^{**}(H)$, graduiert durch den ersten (topologischen) Eintrag. Die Anforderung an A wird durch die Wahl von e als dem motivischen Bockstein-Homomorphismus Sq_1 und $a_i = Sq^{2i}$ (dann $q_i = 2k$, und $q = 2$) erfüllt. □

3.3.3 Konvergenz im Fall des motivischen Sphärenspektrums

Die (homologisch oder kohomologisch konstruierte) Adamsspektralsequenz für das motivische Sphärenspektrum konvergiert stark gegen die Homotopiegruppen der H-nilpotenten Vervollständigung $S_H^\wedge$, versehen mit der Filtration 3.2.4. Siehe [DI, Korollar 6.15]
Beweis: Nach 2.5.4 gibt es eine kohomologische Adamsauflösung von S (das alle Bedingungen des Lemmas auf triviale Weise erfüllt). Nach dem Korollar 3.3.2 und der in 2.5.1 vorgenommenen Identifizierung des E_2-Terms der kohomologisch konstruierten Adamsspektralsequenz sind die E_r-Terme der kohomologischen Spektralsequenz Mittag-Leffler: Für jede gegebene Trigraduierung (s, t, u) können nur endlich viele Differentiale d_r von 0 verschieden sein, d.h die Terme stabilisieren sich für $r > r_0 \in \mathbb{N}$.
Nach 2.5.3 ist die kohomologisch konstruierte Spektralsequenz aber ab dem E_2-Term isomorph zu der homologisch konstruierten. Diese konvergiert dann nach dem Lemma von der vollständigen Konvergenz 3.2.8 vollständig (und damit insbesondere stark) und nach 3.2.7 gerade gegen die angegebenen Gruppen. □

3.3.4 Beweismethode und Gültigkeit der Konvergenzaussage

[DI, Korollar 6.15] folgt aus der Übertragung der Konvergenzdiskussion von Bousfield und Kan in das motivische Setting. Die tatsächliche Konvergenzaussage in dem Korollar folgt nach Identifizierung des E_2-Terms der Spektralsequenz aus dem rein algebraischen Theorem 3.3.1 von Adams.

3.4 Konvergenz der Adamsspektralsequenz für Zellenspektren von endlichem Typ

In diesem Abschnitt skizziere ich die angesprochene Konvergenzaussage für motivische Zellenspektren von endlichem Typ aus der Arbeit [HKO] von Hu, Kriz und Ormsby. Sei k ein Körper von Charakteristik 0 und p eine beliebige Primzahl. Insbesondere sei k in diesem Abschnitt nur noch dann algebraisch abgeschlossen, wenn dies explizit so

genannt wird. Ich werde mich in der Beweisskizze jedoch immer, wenn sich der Beweis dadurch vereinfacht, auf die Situation in dem älteren Artikel [HKO2] beschränken, d.h. annehmen, dass der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen und $p = 2$ ist.
H_p bezeichne das mod-p-Eilenberg-MacLane-Spektrum und $H\mathbb{Z}$ das Eilenberg-MacLane-Spektrum mit ganzzahligen Koeffizienten. Für H_2 schreibe ich auch weiterhin H. Da wir in diesem Abschnitt nur mit der homologisch konstruierten Adamsspektralsequenz arbeiten, schreibe ich kurz Adamsspektralsequenz.

3.4.1 Alternative Darstellung der H_p-nilpotenten Vervollständigung

Für ein assoziatives Ringspektrum, dessen Multiplikation strikt unitär ist (d.h. die entsprechenden Diagramme kommutieren direkt und nicht nur bis auf Äquivalenzen), ist der Homotopielimes über das kosimpliziale Spektrum $(X_E^\wedge)_n := (X \wedge E^{\wedge n})$, dessen Koränder durch entsprechende Einfügung der Einsabbildung des Ringspektrums und dessen Ko-Degenerationsabbildungen durch die Multiplikation gegeben sind, die E-nilpotente Vervollständigung $X_E^\wedge$.
Dies gilt insbesondere für H_p. Im Fall $X = H_p$ (bzw. allgemeiner für Modulspektren über H_p) induziert die Multiplikation einen Retrakt der Abbildung von X in seine H_p-nilpotente Vervollständigung und damit eine Äquivalenz $H_p \simeq (H_p)_{H_p}^\wedge$.
(Siehe die Anmerkung bei der Definition der E-nilpotenten Vervollständigung 3.2.3 und [DI, 6.8].)
Wir werden in diesem Teil der Arbeit nur diese Konstruktion der H_p-nilpotenten Vervollständigung benutzen.

3.4.2 Definition: Zellenspektren und Zellenspektren von endlichem Typ

Ein Spektrum X heißt *zellulär* bzw. *Zellenspektrum*, wenn es in der kleinsten Unterkategorie der motivischen T-Spektren liegt, die unter beliebigen Wedgesummen und Kofasersequenzen abgeschlossen ist und das motivische Sphärenspektrum enthält, d.h. die Bedingungen (1) bis (3) aus 2.4.2 erfüllt.

Ein motivisches Zellenspektrum X heißt k-zusammenhängend, wenn seine Homotopiegruppen $\pi_{(m+n,n)}(X)$ für $m < k$ verschwinden. Das motivische Sphärenspektrum ist nach dieser Definition und dem in der Einleitung zitierten Ergebnis von Morel 0-zusammenhängend.
Eine Abbildung zwischen motivischen Zellenspektren heißt k-Äquivalenz, wenn ihre Kofaser (nach Definition erneut ein Zellenspektrum) (k+1)-zusammenhängend ist. Wir nennen die Abbildung eine sehr schwache Äquivalenz, wenn sie Isomorphismen zwischen allen motivischen Homotopiegruppen $\pi_{(m,n)}$ induziert. Eine der für die Zwecke des Beweises wichtigsten Eigenschaften von motivischen Zellenspektren ist, dass eine sehr schwache Äquivalenz von motivischen Zellenspektren bereits eine schwache Äquivalenz ist ([DI2, Korollar 7.2]).
In der motivischen Homotopiekategorie sagen wir, dass X aus Y durch Ankleben einer Zelle von Dimension (m+1,n) entsteht, wenn es eine Kofasersequenz $X \longrightarrow S^{m,n} \longrightarrow Y$ gibt.

X heißt *Zellenspektrum von endlichem Typ*, wenn es sich als Homotopielimes von Zellenspektren X_n schreiben lässt, die induktiv aus dem Punkt bzw. Sphärenspektrum durch Ankleben von Zellen entstehen, s.d. $\forall m \in \mathbb{Z}$ nur endlich viele Zellen in den Dimensionen $(m+l, l)$ existieren, und es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass für $m < k$ in den Dimensionen $(m+l, l)$ überhaupt keine Zellen existieren. Insbesondere sind Zellenspektren von endlichem Typ k-zusammenhängend für ein $k \in \mathbb{Z}$.

3.4.3 H_p ist zellulär

Behauptung(HKO): Die motivischen mod-p-Eilenberg-MacLane-Spektren H_p sind äquivalent zu motivischen Zellenspektren von endlichem Typ.
Die Aussage ist einer der Grundbausteine des Beweises, ich werde aber nicht näher auf sie eingehen. In [HKO2, Korollar 22, Proposition 15 und Lemma 21]] zeigen Hu, Kriz und Ormsby, dass das motivische mod-2-Eilenberg-MacLane-Spektrum H ein Zellenspektrum von *schwach endlichem Typ* ist, und behaupten in [HKO, Lemma 6], dass sich der Beweis auf die allgemeineren Umstände der Arbeit überträgt.

3.4.4 Definition: Vervollständigung an p,η

Sei $p : S \longrightarrow S$ der durch p-fache Addition der Identität definierte Homomorphismus. Für ein beliebiges motivisches Spektrum X ergibt sich durch smashen mit X ein Morphismus $p : X \longrightarrow X$, dessen Kofaser mit X/p bezeichnet wird. Wir erhalten Abbildungen $X/p^{n+1} \longrightarrow X/p^n$ aus dem folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
.. \arrow[r] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p^{n+1}"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p^n"] & ... \arrow[r, "p"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p^2"] & X \arrow[d, "p"] \\
.. \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & ... \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
.. \arrow[r] & X/p^{n+1} \arrow[r] & X/p^n \arrow[r] & ... \arrow[r] & X/p^2 \arrow[r] & X/p
\end{tikzcd}$$

Der inverse Homotopielimes über die dritte Zeile heißt (Bousfield-) *Vervollständigung von X an p*: $X_p^\wedge := \underset{\leftarrow n}{\mathrm{holim}}\, X/(p^n)$. Tatsächlich ist $X_p^\wedge$ die Bousfieldlokalisierung von X an dem motivischen Moore-Spektrum S/p. (s.[OR, Kapitel 3]) Die Abbildungen zwischen zweiter und dritter Zeile induzieren einen Morphismus $X \longrightarrow X_p^\wedge$.

Das Element $\eta \in \pi_{1,1}(S)$ induziert auf die gleiche Weise einen Morphismus $\Sigma^{(1,1)}X \longrightarrow X$, Morphismen $X/\eta^{n+1} \longrightarrow X/\eta^n$ und eine *Vervollständigung an* η: $X_\eta^\wedge := \underset{\leftarrow n}{\mathrm{holim}}(X/\eta^n)$ zusammen mit einer kanonischen Abbildung $X \longrightarrow X_\eta^\wedge$.

Sei $X_{p,\eta}^\wedge$ die η-Vervollständigung der p-Vervollständigung von X. Dies ist äquivalent zur p-Vervollständigung der η-Vervollständigung von X, weil inverse Homotopiekolimiten kommutieren. Wir werden die folgenden Eigenschaften der Vervollständigungen nutzen:

1. $(X_p^\wedge)_p^\wedge = (X_p^\wedge)$, $(X_\eta^\wedge)_\eta^\wedge = X_\eta^\wedge$ und $(X_{p,\eta}^\wedge)_{p,\eta}^\wedge = X_{p,\eta}^\wedge$
   Die Idempotenz der p-Vervollständigung ist bekannt und folgt für η analog. Die Idempotenz der (p,η)-Vervollständigung folgt aus den ersten beiden Aussagen.

2. $(H\mathbb{Z})/p = H\mathbb{Z} \wedge S/p = H_p$
   Dies ist eine der Möglichkeiten, das Spektrum H_p zu konstruieren.

3. $(H_p)_{p,\eta}^\wedge = H_p$
   Die durch η induzierte Abbildung auf den Homotopiegruppen des Eilenberg-MacLane-Spektrums (d.h. den Homologiegruppen des Sphärenspektrums, s. 1.1.5) ist aus Gradgründen 0. Dann folgt die Aussage mit den vorherigen beiden Punkten.

4. $H_p^{**}(X) \cong H_p^{**}(X_{p,\eta}^\wedge)$
   Dies ist wahr für die p-Vervollständigung und folgt dann mit dem vorhergehenden Punkt.

3.4.5 Vervollständigungen der H_p-nilpotenten Vervollständigung

Sei X ein motivisches Spektrum.

1. Die H_p-nilpotente Vervollständigung der Vervollständigung von X an p und η ist die H_p-nilpotente Vervollständigung von X: $(X_{p,\eta}^\wedge)_{H_p}^\wedge \simeq X_{H_p}^\wedge$

2. Die Adamsspektralsequenzen für X und $X_{p,\eta}^\wedge$ sind isomorph.

Beweis:
(1) Wir haben ein Diagramm von Modellen von H_p-nilpotenten Vervollständigungen:

$$\begin{tikzcd}
X \wedge H_p \arrow[r] \arrow[d] & X \wedge H_p^{\wedge 2} \arrow[r] \arrow[d] & X \wedge H_p^{\wedge 3} \arrow[r] \arrow[d] & ... \\
(X \wedge S/p) \wedge H_p \arrow[r] \arrow[d] & (X \wedge S/p) \wedge H_p^{\wedge 2} \arrow[r] \arrow[d] & (X \wedge S/p) \wedge H_p^{\wedge 3} \arrow[r] \arrow[d] & ... \\
(X \wedge S/p^2) \wedge H_p \arrow[r] \arrow[d] & (X \wedge S/p^2) \wedge H_p^{\wedge 2} \arrow[r] \arrow[d] & (X \wedge S/p^2) \wedge H_p^{\wedge 3} \arrow[r] \arrow[d] & ... \\
... & ... & ... &
\end{tikzcd}$$

Wenn wir spaltenweise den Homotopiekolimes bilden, erhalten wir ein Modell für $(X_p^\wedge)_{H_p}^\wedge$:

$$X_p^\wedge \wedge H_p \longrightarrow X_p^\wedge \wedge H_p^{\wedge 2} \longrightarrow X_p^\wedge \wedge H_p^{\wedge 3} \longrightarrow ... \qquad (3.4.5.22)$$

Aber wegen $(X \wedge S/p) \wedge H_p \simeq X \wedge (S/p \wedge H_p) \simeq X \wedge H_p$ sind die vertikalen Abbildungen alle Äquivalenzen:

$$X \wedge H_p^{\wedge k} \simeq X_p^\wedge \wedge H_p^{\wedge k} \qquad (3.4.5.23)$$

Es folgt $(X_p^\wedge)_{H_p}^\wedge \simeq X_{H_p}^\wedge$. Durch Wiederholen der Prozedur für η erhalten wir (E-nilpotente Vervollständigung und η-Vervollständigung vertauschen als inverse Homotopielimiten) das gewünschte Ergebnis.
(2) Die Faser von $X \longrightarrow X \wedge H^{\wedge s}$ ist $X_s = X \wedge \bar{H}^{\wedge s}$. Über die Äquivalenzen 3.4.5.23 erhalten wir Abbildungen $X_p^\wedge \longrightarrow X \wedge H_p^{\wedge k}$, deren Faser die Räume $(X_p^\wedge)_s = X_p^\wedge \wedge \bar{H}_p^{\wedge k}$ aus der kanonischen Adamsauflösung von $X_p^\wedge$ sind. Die Abbildung $X \longrightarrow X_p^\wedge$ induziert einen Morphismus der kanonischen Adamsauflösungen und damit einen Morphismus von Adamsspektralsequenzen. Dieser ist sogar ein Isomorphismus, weil der E_1-Term der Spektralsequenzen von den Homotopiegruppen der Räume $H_p \wedge X_s$ bzw. $H_p \wedge (X_p^\wedge)_s$ und damit von den motivischen mod-p-Homologiegruppen der Räume X_s bzw. $(X_p^\wedge)_s$ gebildet wird, auf denen die Vervollständigung an p einen Isomorphismus induziert.

3.4.6 Theorem HKO.1 (Hu, Kriz, Ormsby)

Sei k ein Körper von Charakteristik 0.
Sei X ein Zellenspektrum von endlichem Typ. Dann ist in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[d] & & X_{H_p}^\wedge \arrow[d, "\simeq"] \\ X_{p,\eta}^\wedge \arrow[r] & (X_{p,\eta}^\wedge)_{H_p}^\wedge = (X_{H_p}^\wedge)_{p,\eta}^\wedge & \end{tikzcd} \tag{3.4.6.24}$$

die untere horizontale Abbildung eine Äquivalenz. Mit anderen Worten, die Abbildung $X \longrightarrow X_{H_p}^\wedge$ ist eine Vervollständigung an p und η, $X_{H_p}^\wedge \cong X_{p,\eta}^\wedge$.
Wenn entweder $p > 2$ und $cd_p(k) < \infty$ oder p=2 und $cd_2(F[i]) < \infty$ gilt, ist $X \longrightarrow X_{H_p}^\wedge$ sogar eine Vervollständigung an p.

Dies ist das zentrale Theorem aus [HKO]. Der Ausdruck $cd_p(k)$ ist eine algebraische Invariante des Körpers. Da wir uns bei dem Nachweis, dass die Vervollständigung an p und η die Vervollständigung an p ist, auf den algebraisch abgeschlossenen Fall beschränken werden, und die Bedingung nur in den wesentlich komplexeren Beweis der entsprechenden Aussage in [HKO] für den nicht algebraisch abgeschlossenen Fall eingeht, ist die Bedingung für uns nicht von großem Interesse. Für eine genaue Definition siehe [SER].

3.4.7 Korollar HKO.3

Wenn k die Anforderungen aus dem Theorem HKO.1 erfüllt, so konvergiert die Adamsspektralsequenz für motivisch endliche Zellenspektren X stark gegen die Homotopiegruppen von $X_{p,\eta}^\wedge$ bzw. $X_p^\wedge$.
Beweis:
Da $X_{p,\eta}^\wedge \simeq (X_{p,\eta}^\wedge)_{H_p}^\wedge \simeq X_{H_p}^\wedge$, folgt durch Bilden des inversen Homotopielimes über die Kofasersequenzen $(X_{p,\eta}^\wedge)_s \longrightarrow X_{p,\eta}^\wedge \longrightarrow X_{p,\eta}^\wedge \wedge H_p^{\wedge s}$:

$$\underset{\leftarrow s}{\mathrm{holim}} (X_{p,\eta}^\wedge)_s = 0$$

Aus der Milnorsequenz

$$0 \longrightarrow \varprojlim_s{}^1 \pi_{*+1,*}((X^\wedge_{p,\eta})_s) \longrightarrow \pi_{**}(\operatorname{holim}_{\leftarrow s}(X^\wedge_{p,\eta})_s) \longrightarrow \varprojlim_s \pi_{**}((X^\wedge_{p,\eta})_s) \longrightarrow 0$$

folgt $\varprojlim_s{}^1 \pi_{*,*}((X^\wedge_{p,\eta})_s) = \varprojlim_s \pi_{**}((X^\wedge_{p,\eta})_s) = 0$. Dass der gesamte Turm Mittag-Leffler ist, impliziert, dass $(E_r^{s,*+s,*}(X^\wedge_{p,\eta}))$ die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt, d.h. dass die Adamsspektralsequenz vollständig konvergiert. (Siehe auch das von Hu, Kriz und Ormsby selbst zitierte Mittag-Leffler-Konvergenz-Lemma in [BK, IX.5.6]). Die in Theorem 1 bewiesenen Äquivalenzen liefern die Aussage über das Ziel.

3.4.8 Spezialfall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers von Charakteristik 0

Sei k nun algebraisch abgeschlossen. In diesem Fall ist die Abbildung $X \longrightarrow X^\wedge_H$ für endliche Zellenspektren X eine Vervollständigung an p. Insbesondere konvergiert in der Situation 3.3.3 die Adamsspektralsequenz für das motivische Sphärenspektrum S vollständig gegen die Homotopiegruppen von $S^\wedge_2$, der 2-Vervollständigung von S.

3.5 Beweisskizze

Ich beschränke mich, wie eingangs angesprochen, in dieser Skizze fast überall auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers k und p=2, d.h. auf die Situation in der älteren Arbeit [HKO2]. Insbesondere gilt dies für die Aussage, dass die Vervollständigung an p bereits eine Vervollständigung an η und p ist, mit der ich beginne.

3.5.1 Lemma HKO2.23: Im algebraisch abgeschlossenen Fall ist η,p-Vervollständigung eine p-Vervollständigung

Sei X Zellenspektrum von endlichem Typ. Dann ist für alle k: $X/2^k \longrightarrow \operatorname{holim}_{\leftarrow n} X/(2^k, \eta^n)$ eine sehr schwache (und folglich schwache) Äquivalenz.
Beweis:
Wir beginnen mit dem motivischen Moore-Spektrum $S/2$:
Behauptung: $S/2 \longrightarrow (S/2)^\wedge_\eta = \operatorname{holim}_{\leftarrow k} (S/(2, \eta^k))$ ist eine sehr schwache Äquivalenz (und damit auch eine schwache Äquivalenz).
Wir wollen zeigen, dass die Homotopiegruppen der Faser der obigen Abbildung verschwinden. Diese ist der inverse Homotopielimes über die Sequenz

$$... \longrightarrow \Sigma^{k+1,k+1} S/2 \xrightarrow{eta} \Sigma^{k,k} S/2 \longrightarrow ...$$

und es genügt nach der Milnorsequenz dieses Homotopielimes, das Verschwinden von $\varprojlim_k$ und $\varprojlim_k{}^1$ der Homotopiegruppen $\pi_{m,n}$ der Terme der obigen Sequenz zu zeigen.

Tatsächlich verschwinden die Homotopiegruppen schon für hinreichend großes k(abhängig von n):
Da die Sequenz unter Suspensionen $\Sigma^{n,n}$ auf sich selber abbildet, können wir uns durch passende Anwendung einer solchen Einhängung auf den Fall n=0 beschränken und müssen dann zeigen: $\pi_{(m,0)}(\Sigma^{k,k}S/2) = 0$ für hinreichend großes k. Hierzu bedienen sich Hu, Kriz und Ormsby eines nur in der Kategorie der S^1-Spektren zur Verfügung stehenden Hurewicz-Theorems von Morel. Wir können das Moore-Spektrum $S/2$ in der Kategorie der T-Spektren als das Pushforward des Moore-Spektrums in der Kategorie der S^1-Spektren (wiederum definiert als Kofaser der Abbildung $S \xrightarrow{2} S$, wobei S hier das Sphärenspektrum der S^1-Spektren bezeichnet) unter dem Stabilisierungsfunktor betrachten. Dank des Theorems von Voevodsky 1.1.5 kennen wir die Homologiegruppen mit ganzzahligen Koeffizienten des Moorespektrums, $H\mathbb{Z}_{**}(S/2) = H_{**}(S) = \mathbb{F}_2[\tilde{\tau}]$. Die algebraische Abgeschlossenheit des Grundkörpers geht hier in die letzte Gleichung ein.
Mit diesem Wissen und unter Verwendung des angesprochenen Hurewicz-Theorems für S^1-Spektren ([MOR2, 4.3.2]) können wir auf die Homotopiegruppen des Moore-Spektrums in der Kategorie der S_1-Spektren schließen und erhalten damit Informationen ([MOR2, Bemerkung 5.3.2]) über die Homotopiegruppen des Moore-Spektrums in der Kategorie der T-Spektren, namentlich: $\pi_{(m,0)}(\Sigma^{k,k}S/2) = 0$ für $k > m$.
(Inhalt und Beweis stammen aus [HKO2, Lemma 23].)

Damit ist die Aussage auch für endliche Zellenspektren bewiesen. Sei nun X ein motivisches Zellenspektrum von endlichem Typ und X_n das Spektrum, das durch Ankleben der n niedrigstdimensionalen Zellen in X (d.h. für Bigrade (p,p+q) für niedrigstes p) entsteht. Wir erhalten ein Diagramm von Kofaserungen (in Zeilen und Spalten)

$$\begin{tikzcd}
 & X_n/2^k \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \operatorname{holim}_{\leftarrow n} X_n/(2^k, \eta^n) \arrow[d] \\
F \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & X/2^k \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{holim}_{\leftarrow n} X/(2^k, \eta^n) \arrow[d] \\
F^n \arrow[r] & X^n/2^k \arrow[r] & \operatorname{holim}_{\leftarrow n} X^n/(2^k, \eta^n)
\end{tikzcd} \tag{3.5.1.25}$$

Die oberste horizontale Abbildung ist nach dem gerade Gesagten eine Äquivalenz und impliziert die zweite eingezeichnete Äquivalenz. Das Spektrum X^n entsteht aus X durch "Weglassen" der ersten n Zellen, und sein Zusammenhang wird mit steigendem n beliebig groß. Dasselbe gilt für seine η-Vervollständigung, s.d. der Zusammenhang von F mit steigendem n beliebig groß wird. Folglich $F \simeq *$.

(Die Aussage ist gerade [HKO, Lemma 21]. In den Beweisen taucht diese spezielle Art der Argumentation mehrmals auf. Ich werde sie ab jetzt kurz fassen.)

3.5.2 Lemma HKO.10

1. $S \xrightarrow{\eta_H} H_p$ ist eine 0-Äquivalenz.

2. $S/(2,\eta) \longrightarrow H/(2,\eta) \simeq H$ ist eine 1-Äquivalenz

Beweis: Der Beweis funktioniert über explizite Berechnung der Abbildungen und greift auf die Resultate von Morel über die motivischen Homotopiegruppen zurück.

1. Zu zeigen ist, dass die Kofaser der Abbildung, $\Sigma^{1,0}\bar{H}_p$, 0-zusammenhängend ist. Sowohl das motivische Sphärenspektrum als auch das mod-p-Eilenberg-MacLane-Spektrum sind 0-zusammenhängend, und es genügt wegen der zu der Kofaserung assoziierten langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen zu zeigen, dass die Homotopiegruppen der Kofaser in den Bigraden (n,n) (im Folgenden unter *=* zusammengefasst) verschwinden. Aus derselben langen exakten Sequenz erhalten wir
$$\pi_{*=*}(S) = K_{MW}(k) \longrightarrow \pi_{*=*}(H_p) = K_M(k)/p \longrightarrow \pi_{*=*}(\Sigma^{1,0}\bar{H}_p) \longrightarrow 0 \tag{3.5.2.26}$$
Da die erste Abbildung surjektiv ist, folgt die Behauptung.

2. Der 0-Zusammenhang der Kofaser folgt aus denselben Gründen wie zuvor. Die lange exakte Sequenz der Homotopiegruppen in den relevanten Graden ist dann: $\pi_{n+1,n}(S/(2,\eta) \longrightarrow \pi_{n+1,n}(H) \longrightarrow \pi_{n+1,n}(\Sigma\bar{H}/(2,\eta)) \longrightarrow \pi_{n,n}(S/(2,\eta)) \longrightarrow$
$\longrightarrow \pi_{n,n}(H) \longrightarrow \pi_{n,n}(\Sigma\bar{H}/(2,\eta)) \longrightarrow 0$

   Die Abbildung $\pi_{*=*}(S/(2,\eta)) \longrightarrow \pi_{**}(H)$ induziert die Abbildung $K_{MW}(k)/(2,\eta) \cong K_M(k)/2$, ist also ein Isomorphismus. Es folgt, dass $S/(2,\eta) \longrightarrow H$ eine 0-Äquivalenz ist und es für die 1-Äquivalenz genügt, zu zeigen, dass $\pi_{n+1,n}(S/2) \longrightarrow \pi_{n+1,n}(H)$ surjektiv ist. Da letzteres multiplikativ von $\tau \in H(0,-1)$ erzeugt ist, genügt es, ein Urbild für τ zu finden. Haben wir ein solches für $k = \mathbb{Q}$ gefunden, so induziert $\mathbb{Q} \longrightarrow k$ uns einen Morphismus der zugrundeliegenden Kategorien und ein Urbild für jeden beliebigen der von uns betrachteten Körper. Wir haben die Bocksteinkofasersequenz $H\mathbb{Z} \xrightarrow{2} H\mathbb{Z} \longrightarrow H$, und eine exakte Sequenz von Homotopiegruppen $\pi_{(0,-1)}(H) \xrightarrow{\beta} \pi_{(-1,-1)}(H\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot 2} \pi_{-1,-1}(H\mathbb{Z})$. Da die Klasse von -1 in $K_M(\mathbb{Q}) = \pi_{(-1,-1)}(H\mathbb{Z})$ von 0 verschieden ist, aber von $\cdot 2$ annihiliert wird, hat es unter β ein von 0 verschiedenes Urbild, d.h. gerade τ: $\beta\tau = [-1]$.
   Im Milnor-Witt-Ring $K_{MW}(\mathbb{Q}) = \pi_{(-1,-1)}(S)$ hält die Relation $[-1](2{+}[-1]\eta) = 0$, die 2[-1]=0 in $K_{MW}(\mathbb{Q})/\eta = \pi_{-1,-1}(S/\eta)$ impliziert. Über die Sequenz $S/\eta \xrightarrow{2} S/\eta \longrightarrow S/(2,\eta)$ erhalten wir auf demselben Weg ein Element $\tau' \in \pi_{0,-1}(S/(2,\eta))$. Dieses τ' bildet auf τ (und nicht auf 0) ab, weil ihr Bild unter dem Bockstein (und der Identifizierung unter dem obigen Isomorphismus) übereinstimmt.

3.5.3 Lemma HKO.11

Sei X ein k-zusammenhängendes motivisches Zellenspektrum. Dann ist $X^{\wedge}_{H_p}$ k-zusammenhängend.
Beweis:

Da X k-zusammenhängend und die Abbildung $\Sigma^{0,1}\bar{H}_p$ von $S \xrightarrow{\eta} H_p$ nach Lemma 10 eine 0-Äquivalenz ist, ist die Kofaser $\Sigma^{1,0}\bar{H}_p \wedge X$ von $X \longrightarrow X \wedge H$ (k+1)-zusammenhängend und die Faser $X_1 = X \wedge \bar{H}_p$ k-zusammenhängend.
Induktiv erhalten wir ein Diagramm von gebogenen Kofasersequenzen

$$\begin{tikzcd}
X = X_0 \arrow[r] & X_0 \wedge H_p \\
X_1 = X_0 \wedge \bar{H}_p \arrow[u] \arrow[r] & X_1 \wedge H_p \\
X_2 = X_1 \wedge \bar{H}_p \arrow[u] \arrow[r] & X_2 \wedge H_p \\
\dots \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{3.5.3.27}$$

In diesem Diagramm sind induktiv alle X_s k-zusammenhängend, und folglich auch ihr Homotopiekolimes, der aber gerade die Faser von $X \longrightarrow X^{\wedge}_{H_p}$ bildet. Es folgt aus der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen für Kofaserungen, dass $X^{\wedge}_{H_p}$ k-zusammenhängend ist.

3.5.4 Lemma HKO.12

Sei X ein Zellenspektrum von motivisch endlichem Typ. Dann ist $(X \wedge H_p)^{\wedge}_{H_p} \simeq X \wedge H_p$.
Beweis:
Die Aussage folgt für das motivische Sphärenspektrum S und seine Einhängungen über die Kontraktionsabbildung in 3.4.1. Induktiv erhalten wir die Aussage dann über die definierenden Kofasersequenzen der angeklebten Zellen für aus endlich vielen Zellen erzeugte Zellenspektren. Der Beweis folgt dann über eine analoge Argumentation zum Beweis von HKO.21.

3.5.5 Lemma HKO.13

$(S/(p,\eta))^{\wedge}_{H_p}$ ist schwach äquivalent zu einem Zellenspektrum von endlichem Typ.

Der Beweis dieser Aussage beruht auf einer weiteren, speziellen Konstruktion der H_p-nilpotenten Auflösung durch eine Filtrierung des Hopfalgebroiden $(\pi_{**}(H_p), H_p{**}(H_p)$.
Ich werde den Beweis hier weglassen.

3.5.6 Lemma HKO.14

Sei X ein 0-zusammenhängendes motivisches Zellenspektrum

1. $X/(p,\eta) \longrightarrow (X/(p,\eta))^{\wedge}_{H_p}$ ist eine 1-Äquivalenz.
2. $(X/(p,\eta))^{\wedge}_{H_p}$ ist sehr schwach äquivalent zu einem Zellenspektrum von endlichem Typ.

3. $(X/(p,\eta))^{\wedge}_{H_p} \longrightarrow ((X/(p,\eta))^{\wedge}_{H_p})^{\wedge}_{H_p}$ ist eine sehr schwache Äquivalenz.

Der erste und dritte Punkt beruhen auf dem im vorhergehenden Lemma HKO.13 konstruierten Modell für die H_p-nilpotente Vervollständigung. Der zweite Punkt beruht auf der Aussage von Lemma HKO.13 und einem weiteren Beweis nach der Art von HKO.21.

3.5.7 Lemma HKO.15

Sei X ein Zellenspektrum von endlichem Typ, und es existiere ein $N \in \mathbb{N}$, s.d. $0 = p^N : X \longrightarrow X$ und $0 = \eta^N : \Sigma^{N,N} X \longrightarrow X$.
Dann ist die kanonische Abbildung $X \longrightarrow X^{\wedge}_{H}$ eine Äquivalenz.
Beweis
Da X Zellenspektrum von endlichem Typ, wissen wir, dass X l-zusammenhängend für ein $l \in \mathbb{Z}$ ist. Durch Bilden einer entsprechenden Einhängung können wir o.B.d.A. annehmen, dass X 0-zusammenhängend ist.

Dann ist $X/(p^N) \simeq X \vee \Sigma^{1,0} X$, und es existiert ein $M \in \mathbb{N}$, s.d.:

$$0 = \eta^M : \Sigma^{M,M} X/(p^N) \simeq \Sigma^{M,M} X \vee \Sigma^{M+1,M} X \longrightarrow X/(p^N) \qquad (3.5.7.28)$$

Folglich $X/(p^N, \eta^M) \simeq X \vee \Sigma^{1,0} X \vee \Sigma^{M+1,M} X \vee \Sigma^{M+2,M}$. Nach Lemma HKO.14.2 ist der rechte Ausdruck schwach äquivalent zu einem motivischen Zellenspektrum von endlichem Typ und nach Lemma HKO14.1 eine 1-Äquivalenz, d.h. die Faser ist 1-zusammenhängend, und geeignete Potenzen von p und η verschwinden auf ihr. Wir können dann induktiv $X \longrightarrow X^{\wedge}_{H_p}$ als Wedgesummanden in eine k-Äquivalenz $X_k \longrightarrow (X_k)^{\wedge}_{H_p}$ einbauen. Da Wedgesummanden von k-Äquivalenen k-Äquivalenzen sind, ist dann die kanonische Abbildung von X in seine H_p-nilpotente Vervollständigung eine k-Äquivalenz für alle k, damit eine sehr schwache und somit eine schwache Äquivalenz.

Lemma 15 impliziert die Aussage von Theorem HKO.1:
Die Abbildung $X/(p^n, \eta^m) \longrightarrow (X/(p^n, \eta^m))^{\wedge}_{H_p}$ ist eine sehr schwache und darum eine schwache Äquivalenz, denn p^{2n} und η^{2m} verschwinden auf $X/(p^n, \eta^m)$. Durch Bildung des inversen Homotopielimes folgt $X^{\wedge}_{p,\eta} \xrightarrow{\simeq} (X^{\wedge}_{p,\eta})^{\wedge}_{H_p}$.

3.5.8 Vergleich der beiden Konvergenzaussagen

Beide Konvergenzaussagen beruhen letztendlich auf der Konvergenzdiskussion der homologischen Adamsspektralsequenz durch Bousfield: Beide zeigen, dass die Mittag-Leffler-Bedingung für die Terme der Spektralsequenz gilt und somit vollständige Konvergenz vorliegt. Sie unterscheiden sich in der Herleitung der Mittag-Leffler-Bedingung. In Korollar 6.15[DI] folgt diese aus der rein algebraischen Betrachtung des E_2-Terms der isomorphen kohomologisch konstruierten Adamsspektralsequenz anhand des klassischen Theorems von Adams. Hu, Kriz und Ormsby zeigen sie über das "Mittag-Leffler-Konvergenz-Lemma" von Bousfield-Kan und damit über den gesamten kanonischen Turm.

Betreffs Gültigkeit ist klar, dass das Theorem von Hu, Kriz und Ormsby das Korollar in [DI] umfasst. Zusätzlich bestimmen sie das Ziel der Konvergenz. Neben der in beiden Sätzen notwendigen Kenntnis der motivischen Steenrod-Algebra müssen sie deshalb auch mehr Informationen über die motivische stabile Homotopiekategorie (Namentlich das Hurewicz-Theorem für S^1-Spektren, die Zellularität der motivischen Eilenberg-MacLane-Räume und die expliziten Berechnungen in den Homotopiegruppen) verwenden, während das Ergebnis in [DI] fast direkt folgt, wenn man die Theorie von Bousfield in den motivischen Kontext übertragen hat.

4 Vergleich von motivischer und klassischer Adamsspektralsequenz

Die topologische Realisierung wurde zuerst von Morel und Voevodsky in [MV, 3.3] auf der Ebene der (unstabilen) motivischen Homotopiekategorie untersucht. Anbetrachts der Anforderungen, die wir an den Grundkörper k gestellt haben, beschränke ich mich in diesem Kapitel auf $k = \mathbb{C}$. Die topologische Realisierung steht aber allgemeiner über Grundkörpern, die sich in die komplexen Zahlen einbetten lassen, und inbesondere über den reellen Zahlen zur Verfügung.

4.1 Die topologische Realisierung über $\mathbb{C}$

Sei im Folgenden stets $k = \mathbb{C}$. In Übereinstimmung mit der Notation in [DI] verwende ich den Index „cl“, um die topologische Steenrodalgebra A_{cl} und das topologische Eilenberg-MacLane-Spektrum H_{cl} zu bezeichnen.

4.1.1 Der topologische Realisierungsfunktor $SHo^s \longrightarrow Ho^s$

Es existiert ein Funktor $(-)(\mathbb{C}) : Spt_T(\mathbb{C}) \longrightarrow Spt$ in die Kategorie der topologischen Spektren, der durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

(a) $(-)(\mathbb{C})$ erhält Homotopiekolimiten und schwache Äquivalenzen.

(b) Ist X ein durch ein glattes Schema bestimmtes Element der Kategorie $\Delta^{op}PreShv_{Nis}(Sm/k)$ und (SX) sein Einhängungsspektrum in $Spt_T(k)$, so wird (SX) durch $(-)(\mathbb{C})$ auf das Einhängungspektrum des Raums der komplexwertigen Punkte von X abgebildet.

Weiterhin ist $(-)(\mathbb{C})$ ein Funktor von triangulierten Kategorien und erhält Smashprodukte. Über die Eigenschaft (a) induziert $(-)(\mathbb{C})$ einen Funktor $SHo^s \longrightarrow Ho^s$ der Homotopiekategorien.

4.1.2 Topologische Realisierung der Sphären und des Mod-2-Eilenberg-MacLane-Spektrums H

1. Die topologische Realisierung der Sphären S_s und S_t ist der Kreis S^1. Insbesondere ist die topologische Realisierung von $S^{(p,q)}$ die Sphäre S^p.

2. Die topologische Realisierung des Mod-2-Eilenberg-MacLane-Spektrums $H(\mathbb{C})$ ist das klassische Mod-2-Eilenberg-MacLane-Spektrum H_{cl}.

Die erste Aussage wurde bereits in der ersten Arbeit von Morel und Voevodsky gezeigt [MV, Abschnitt 3.3.2], die zweite folgt aus einem Beweis in Voevodskys neuerer Arbeit [VOE3, Lemma 4.43].

4.1.3 Funktor auf Homotopie, Homologie- und Kohomologiegruppen

Aus den Realisierungen der motivischen Sphären und des motivischen Eilenberg-MacLane-Spektrums folgt: Die topologische Realisierung in der Kategorie SHo^s induziert natürliche Transformationen $\pi_{p,q}(-) \longrightarrow \pi_p(-(\mathbb{C}))$, $H^{p,q}(-) \longrightarrow H^p(-(\mathbb{C}))$ und $H_{p,q}(-) \longrightarrow H_p(-(\mathbb{C}))$ zwischen motivischen und klassischen Homotopiegruppen sowie zwischen der motivischen Homologie bzw. Kohomologie eines Spektrums und der singulären (Ko-)Homologie seiner topologischen Realisierung. Das Bild eines Elements α unter diesen Transformationen bezeichne ich in Übereinstimmung mit [DI] ebenfalls mit $\alpha(\mathbb{C})$.

4.1.4 Induzierte Abbildung der homologisch konstruierten Spektralsequenzen

Sei (X_s, W_s) die kanonische E_{**}-Adamsauflösung 2.3.6 eines motivischen Spektrums X. Dann ist $(X_s(\mathbb{C}), W_s(\mathbb{C}))$ die klassische kanonische $E(\mathbb{C})_*$-Adamsauflösung von $X(\mathbb{C})$. Die natürlichen Transformationen zwischen motivischen und klassischen Homotopiegruppen induzieren einen Morphismus der exakten Paare der beiden Türme und damit einen Morphimus der homologisch konstruierten Spektralsequenzen $E_r^{s,t,u}(X) \longrightarrow E_r^{s,t}(X(\mathbb{C}))$.

4.1.5 Die topologische Realisierung auf der Kohomologie des Punktes

Unter der Abbildung $\mathbb{F}^2[\tau] = H^{**}((Spec\mathbb{C})) \longrightarrow H^*(pt) = \mathbb{F}^2$ wird das Element τ auf 1 abgebildet. Die Aussage folgt über die Definition der Realisierungsabbildung, siehe [DI, Definition 2.7].

4.1.6 Die topologische Realisierung der motivischen Steenrod-Algebra

Die topologische Realisierung $A = H^{**}(H) \longrightarrow H^*(H(\mathbb{C}) = A_{cl}$ bildet die motivischen Steenrodquadrate Sq^i auf die klassischen Steenrodquadrate Sq^i ab.
Diese Aussage ist der Kernpunkt für die Untersuchung der Vergleichsabbildung auf der motivischen Adamsspektralsequenz und erneut Voevodsky ([VOE3]) zu verdanken. Die Beweisidee ist, dass die topologischen Realisierungen der motivischen Steenrodquadrate über die in der motivischen Steenrod-Algebra bekannten Eigenschaften die die klassischen Steenrod-Quadrate charakterisierenden Eigenschaften erfüllen.
Unter anderem können wir nun mit gewissen Einschränkungen sicherstellen, dass auch kohomologische Adamsauflösungen auf kohomologische Adamsauflösungen abgebildet werden.

4.1.7 Proposition

Sei für ein gegebenes motivisches Spektrum X der Morphismus

$$\theta_X : H^{**}(X) \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}] \longrightarrow H^*(X(\mathbb{C})) \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}] \tag{4.1.7.1}$$

für $\alpha \otimes m \in H^{*u}(X) \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}]$ definiert durch $\alpha \otimes m \mapsto \alpha(\mathbb{C}) \otimes m\tau^u$.

$\theta_{(-)}$ ist natürlich in X. Ist X in der kleinsten Unterkategorie der motivischen Spektren, die das motivische Sphärenspektrum und motivisch endliche Wedgesummen von Einhängungen des motivischen mod-2-Eilenberg-MacLane-Spektrums H enthält sowie abgeschlossen unter Kofaserungen und Einhängungen ist, so ist θ_X ein Isomorphismus.
Beweis:
θ bleibt offensichtlich unter Einhängungen ein Isomorphismus, da diese nur die Graduierung ändern. Die Abgeschlossenheit unter Kofaserungen folgt aus dem Fünferlemma. θ_S ist trivialerweise ein Isomorphismus. Für H bildet θ Basis auf Basis ab. Die Aussage für Wedgesummen von Einhängungen von H von motivisch endlichem Typ folgt, weil die Wedgesumme von Räumen ein Produkt der Kohomologiegruppen induziert, das wegen der Forderung nach motivisch endlichem Typ sogar eine direkte Summe ist, die mit dem Tensorprodukt distributiert. □

4.1.8 Korollar

Die Abbildung $\theta_H : A = H^{**}(H) \longrightarrow H^*(H(\mathbb{C})) \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}] = A_{cl} \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}]$, die $Sq^{2k} \otimes 1$ auf $Sq^{2k} \otimes \tau^k$ bzw. $Sq^{2k+1} \otimes 1$ auf $Sq^{2k} \otimes \tau^k$ abbildet, ist ein Isomorphismus.

4.1.9 Topologische Realisierung von kohomologischen Adamsauflösungen

Sei X ein Spektrum, für das θ_X ein Isomorphismus ist, und sei (X'_s, K'_s) eine kohomologische Adamsauflösungvon X, wie in 2.5.1, d.h. die Abbildungen $H^{**}(K'_s) \longrightarrow H^{**}(X'_s)$ sind surjektiv, und die Spektren K'_s sind Wedgesummen von Einhängungen von H. Wenn K_s zusätzlich eine Wedgesumme von Einhängungen von H von motivisch endlichem Typ ist, so ist $(X'_s(\mathbb{C}), K'_s\mathbb{C}))$ eine klassische kohomologische Adamsauflösung von $X(\mathbb{C})$.
Beweis: Es ist klar, dass $K'_i(\mathbb{C})$ ein Wedge von Einhängungen des klassischen Eilenberg-MacLane-Spektrums H_{cl} ist und dass $X'_{s+1}(\mathbb{C}) \longrightarrow X'_s(\mathbb{C}) \longrightarrow K'_s(\mathbb{C})$ eine Kofasersequenz ist. Es genügt also zu zeigen, dass $H^*(K'_s(\mathbb{C})) \longrightarrow H^*(X'_s(\mathbb{C}))$ surjektiv ist. Aus der Natürlichkeit von θ folgt die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
H^{**}(K'_s) \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}] \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{K'_s}"] & H^{**}(X'_s) \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}] \arrow[d, "\theta_{X'_s}"] \\
H^*(K'_s(\mathbb{C})) \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}] \arrow[r] & H^*(X'_s(\mathbb{C})) \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Beide vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen: Für K'_s folgt dies nach Definition, für X'_s induktiv, da θ_X Isomorphismus ist, über die Kofaserungen $X'_{s+1} \longrightarrow X'_s \longrightarrow K'_s$. Aus der Surjektivität von $H^{**}(K_s) \longrightarrow H^{**}(X_s)$ folgt die Surjektivität der oberen Zeile und damit die der unteren. Durch Einschränkung auf die Bigrade (*, 0) erhalten wir die gewünschte Aussage. $\square$

4.1.10 Korollar: Induzierte Abbildung von exakten Paaren

Sei X wie zuvor. Die Abbildung von Türmen $(X'_s, K'_s) \longrightarrow (X'_s(\mathbb{C}), K'_s\mathbb{C}))$ induziert einen Morphismus von exakten Paaren, den ich auf dem (r-1)-ten derivierten Paar mit Φ_r bezeichne. Die topologische Realisierung bildet die Auflösung 2.5.2.22 auf die entsprechende Auflösung von $H^*(X(\mathbb{C}))$ durch freie A_{cl}-Moduln ab, und Φ_1 ist die induzierte Abbildung nach Anwendung der jeweiligen Hom-Funktoren auf die Auflösung. Es folgt, dass Φ_2 gerade die von dem Abbildungstripel

$$(A \longrightarrow A_{cl}, H^{**}(X) \longrightarrow H^*(X(\mathbb{C})), H^{**}(S) \longrightarrow H^*(S(\mathbb{C})))$$

induzierte Transformation des Ext-Funktors ist.

4.1.11 Produktstruktur auf der (motivischen) Adamsspektralsequenz

Sei $r \geq 2$ und seien $E_r^{s,t,u}$ die Terme der kohomologisch konstruierten Adamsspektralsequenz des Sphärenspektrums, und d_r ihre Differentiale. Es existiert auf E_r eine Produktstruktur $X_r : E_r^{s,t,u} \otimes E_r^{s',t',u'} \longrightarrow E_r^{s+s',t+t',u+u'}$, die die folgenden Eigenschaften hat:

- Die Differentiale d_r sind in Bezug auf die obige Produktstruktur Derivationen.
- Die Produktstruktur auf E_{r+1} wird durch die Produktstruktur auf E_r definiert.
- Auf $E_2^{s,t,u} = \mathrm{Ext}_A^{s,t,u}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2)$ stimmt die Produktstruktur mit derjenigen überein, die auf $\mathrm{Ext}_A^{s,t,u}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2)$ durch das klassische Yoneda-Produkt gegeben ist.

Diese Produktstruktur, gegeben durch das Kompositionsprodukt auf den Homotopiegruppen der Sphären, geht im klassischen Fall auf Moss [MOS] zurück und verallgemeinert sich auf die motivische Adamsspektralsequenz. Es ist aufgrund unserer Beschreibung von Φ_2 als Transformation des Ext-Funktors und der Identifizierung mit dem Yoneda-Produkt klar, dass die topologische Realisierung die Produktstruktur erhält.

4.1.12 $\tilde{\tau}$-Torsion auf der motivischen Adamsspektralsequenz und ihr Verschwinden unter der topologischen Realisierung

Die Produktstruktur verleiht für festes s und t jedem Objekt $E_2^{s,t,*}$ eine $E_2^{0,0.*}$-Modulstruktur. Wir haben

$$E_2^{0,0,*} = \mathrm{Ext}_A^{0,0,*}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) = \mathrm{Hom}_A^{0,*}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}^{0,*}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) = \tilde{\mathbb{M}}_2 = \mathbb{Z}_2[\tilde{\tau}]$$

Das Element $\tilde{\tau}$ bildet 1 auf τ ab und hat dementsprechend Grad (0, -1). Nach 4.1.5 wird es unter

$$E_2^{0,0,-1}\mathrm{Hom}_A(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_{cl}}(\mathbb{F}^2, \mathbb{F}^2) = E_{cl,2}^{0,0} \cong \mathbb{F}^2$$

gerade auf die Identität bzw. 1 abgebildet.

Aus der $\tilde{\mathbb{M}}_2$-Modulstruktur für $E_2^{s,t,*}$ folgt, dass $E_2^{s,t,*}$ in freie Moduln isomorph zu $\tilde{\mathbb{M}}_2$ und in $\tilde{\tau}$-Torsionsmoduln $\tilde{\mathbb{M}}_2/\tilde{\tau}^k$ zerfällt. Da $E_r^{0,0.*}$ wegen seiner Position in der Spektralsequenz für alle r konstant bleibt, gilt dies auch für $r > 2$.
Wegen der Realisierung von $\tilde{\tau}$ auf 1 ist klar, dass der Torsionsanteil unter der Vergleichsabbildung Φ_r verschwinden muss: Sei x ein Torsionselement in $E_r^{s,t,u}$, d.h. $\exists k \in \mathbb{N}$, s.d. $\tau^k x = 0$. Dann $0 = \Phi_r(\tau^k x) = \Phi_r(\tau^k)\Phi_r(x) = \Phi_r(x)$.

4.1.13 Natürliche Isomorphismen für Ext und Tensorprodukte

Sei $\mathrm{Hom}_R(M, N) \underset{\mathrm{Hom}_R(R,R)}{\otimes} \mathrm{Hom}_R(R, S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(M \underset{R}{\otimes} S, N \underset{R}{\otimes} S)$ durch

$$(f \otimes g) \mapsto (h : M \underset{R}{\otimes} S \overset{f\otimes id_S}{\longrightarrow} N \underset{R}{\otimes} S \cong N \underset{R}{\otimes} R \underset{R}{\otimes} S \overset{id_N\otimes g\otimes id_S}{\longrightarrow} N \underset{R}{\otimes} S \underset{R}{\otimes} S \overset{id_N\otimes\mu}{\longrightarrow} N \underset{R}{\otimes} S) \quad (4.1.13.2)$$

gegeben, wobei μ die Multiplikation von S, aufgefasst als Morphismus $S \underset{R}{\otimes} R \longrightarrow S$, bezeichnet. Die Abbildung ist ein Morphismus von $\mathrm{Hom}_R(R, S)$-Moduln und natürlich in konsistenten Abbildungen von allen vier Variablen.
Für den Fall $M = R$ kann man eine explizite Umkehrabbildung abgeben:
Sei $h \in \mathrm{Hom}_S(R \underset{R}{\otimes} S, N \underset{R}{\otimes} S)$ und $g(1 \otimes 1) = \sum_i n_i \otimes s_i$. Definiere $f_i \in \mathrm{Hom}_R(R, N)$ durch $f_i(1) = n_i$ und $g_i \in \mathrm{Hom}_R(R, S)$ durch $g_i(1) = s_i$, dann definiert $h \mapsto \sum_i f_i \otimes g_i$ gerade die inverse Abbildung.
Für den Fall $R = M = H^{**}(S) = \mathbb{M}_2$, $S = \mathbb{M}_2[\tau^{-1}]$ bildet die Abbildung für Wahlen von N, die zusätzlich eine A-Modulstruktur besitzen, A-lineare Morphismen in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}(\mathbb{M}_2, N)$ auf $A \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tilde{\tau}^{-1}]$-lineare Morphismen in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2[\tau^{-1}]}(\mathbb{M}_2[\tau^{-1}], N \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}])$ ab, und die Umkehrung gilt für die Umkehrabbildung. Das Gleiche gilt für den Fall $R = N = H^*(S) = \mathbb{F}_2$, $S = \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}]$ und die klassische Steenrod-Algebra A_{cl} sowie A_{cl}-Moduln N.
Damit erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_A(\mathbb{M}_2, -) \underset{\tilde{\mathbb{M}}_2}{\otimes} \tilde{\mathbb{M}}_2[\tilde{\tau}^{-1}] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}]}(\mathbb{M}_2[\tau^{-1}], - \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}]) \quad (4.1.13.3)$$

(Hier verwenden wir, dass $\tilde{\mathbb{M}}_2[\tilde{\tau}^{-1}] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2[\tau^{-1}])$ durch
$\sum_n f_n \tilde{\tau}^{-n} \mapsto (x \mapsto \sum_n f_n(x)\tau^{-n})$)

und

$$\mathrm{Hom}_{A_{cl}}(\mathbb{F}_2, -) \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_{cl} \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau,\tau^{-1}]}(\mathbb{M}_2[\tau^{-1}], - \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}]) \quad (4.1.13.4)$$

(Die $\mathbb{M}_2$-Einträge im zweiten natürlichen Isomorphismus sind nur als Abkürzung für $\mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}]$ zu verstehen und beabsichtigt keine Assoziation mit $H^{**}(S)$.)
Da beide Ringerweiterungen $R \longrightarrow S$ flach sind, induzieren uns die natürlichen Isomorphismen sogar natürliche Isomorphismen der derivierten Funktoren.

4.1.14 Bestimmung des Urbilds der topologischen Realisierung auf der kohomologisch konstruierten Adamsspektralsequenz des Sphärenspektrums

Wir haben das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_A(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) \arrow[rr, "\Phi_2"] \arrow[d] & & \mathrm{Ext}_{A_{cl}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \arrow[d, shift right] \\
\mathrm{Ext}_A(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) \underset{\tilde{\mathbb{M}}_2}{\otimes} \tilde{\mathbb{M}}_2[\tilde{\tau}^{-1}] \arrow[rru, dashed, "\Phi'"] \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[d, "\cong"] & & \mathrm{Ext}_{A_{cl}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}] \arrow[u, bend right, shift right] \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Ext}_{A \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}]}(\mathbb{M}_2 \underset{\mathbb{M}_2}{\otimes} \mathbb{M}_2[\tau^{-1}], \mathbb{M}_2[\tau^{-1}]) \arrow[rr, "\cong"] & & \mathrm{Ext}_{A_{cl} \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}]}(\mathbb{F}_2 \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}], \mathbb{F}_2[\tau, \tau^{-1}])
\end{tikzcd} \tag{4.1.14.5}$$

Die oberste Zeile ist durch die topologische Realisierung auf der Spektralsequenz, d. h. durch Φ_2 gegeben und ist somit die von dem Abbildungstripel

$$(A \longrightarrow A_{cl}, H^{**}(S) \longrightarrow H^*(S), H^{**}(S) \longrightarrow H^*(S))$$

induzierte Transformation des Ext-Funktors. Die Abbildungen von der ersten in die zweite Zeile bilden ein Element auf seinen Tensor mit 1 ab, die rückläufige Abbildung auf der rechten Seite bildet τ^k und τ^{-k} auf 1 ab. Die Komposition der vertikalen Pfeile ergibt also auf $\mathrm{Ext}_{A_{cl}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ die Identität. Die Abbildung Ψ in der zweiten Zeile sei für $x \in E^{s,t,u}$ durch $x \otimes m \mapsto \Phi_2(x) \otimes m\tau^u$ definiert. Aus 4.1.12 folgt, dass Φ_2 auf dem Torsionsanteil der Spektralsequenz verschwindet, und dass folglich der gestrichelte Morphismus Φ' existiert, s.d. Φ_2 die Komposition von $\mathrm{Ext}_A(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) \underset{\tilde{\mathbb{M}}_2}{\otimes} \tilde{\mathbb{M}}_2[\tilde{\tau}^{-1}]$ mit Φ' ist. Dann kommutiert auch das untere rechte Dreieck. Die unterste Zeile ist der von θ_H erzeugte Isomorphismus von Ext-Gruppen, die unteren beiden vertikalen Isomorphismen werden von den in 4.1.13 definierten natürlichen Isomorphismen geliefert. Die Kommutativität des unteren Quadrats folgt direkt aus den Definitionen von θ und Ψ, und alle Morphismen im unteren Quadrat erhalten die Trigraduierungen. Aus der Kommutativität folgt, dass Ψ ein Isomorphismus ist.
Für jedes $x \in E_2^{s,t}$ im E_2-Term der klassischen Spektralsequenz existiert dann ein eindeutig bestimmtes Urbild von $x \otimes 1$, $\Psi^{-1}(x \otimes 1) = \sum_i x_i \otimes \tilde{\tau}^{-n_i}$. Sei $N = \max_i(n_i)$, dann ist das Urbild von $x \otimes \tau^N$ unter Ψ gerade $\tilde{x} := \sum_i x_i \otimes \tilde{\tau}^{N-n_i \geq 0}$ und liegt bereits in $E_2^{s,t,N}$. $\tilde{x}$ ist eindeutig bestimmt als das homogene, freie Element von höchstem Gewicht, das von Φ_2 auf x abgebildet wird. Alle Produkte von x mit Monomen von τ werden

ebenfalls auf x abgebildet, und sind eindeutig bestimmt als das einzige freie Element in ihrem Gewicht, das auf x abgebildet wird.

4.1.15 Zusammenfassung

Die Realisierungsabbildungen Φ_r bilden alle $\tilde{\tau}$-Torsionselemente aus der motivischen Adamsspektralsequenz auf 0 ab. Jedes freie Element in der motivischen Adamsspektralsequenz korrespondiert mit seinem Bild, das nach der vorhergehenden Aussage für nichttriviale Elemente nicht verschwindet, da die mittlere horizontale Abbildung im Diagramm ein Isomorphismus ist.
Umgekehrt hat jedes klassische Element x unter Φ_2 genau ein wohlbestimmtes Urbild von höchstem Gewicht, das ebenso wie seine Vielfachen mit $\tilde{\tau}$ auf x abgebildet wird. Es ist klar, dass die Differentiale aus dem Torsionsteil der Spektralsequenz die freien Elemente nicht treffen können. Umgekehrt können aber die freien Elemente in die Torsion abgebildet werden. In diesem Fall überlebt ein Vielfaches des Elements mit einem Monom in $\tilde{\tau}$ auf die nächste Ebene der Spektralsequenz. Da jeder Term $E_r^{s,t,*}$ sich nach den Konvergenzaussagen für endliches r stabilisiert, gibt es also zu jedem klassischen Element x auf jeder Ebene der Spektralsequenz ein Urbild im freien Teil, allerdings möglicherweise von niedrigerem Gewicht im Vergleich zu dem wohlbestimmten Urbild von höchstem Gewicht auf dem E_2-Term.

4.2 Konsequenzen der topologischen Realisierung

Dugger und Isaksen haben die motivischen Ext-Gruppen $\mathrm{Ext}_A^{s,t,u}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2)$ d.h. den E_2-Term der Adamsspektralsequenz für das motivische Sphärenspektrum, explizit berechnet. (Siehe [DI], Kapitel 5, und Anhang). Die Ergebnisse dieser Berechnungen werden hier als gegeben vorausgesetzt, und ebenso die entsprechenden Berechnungen im klassischen Fall(siehe z.b. [RAV, Anhang A3] für eine Zusammenstellung). Ziel dieses Kapitels ist es, einige der von diesen Berechnungen ausgehenden Lemmata aus Kapitel 8 von [DI] zu vervollständigen, die die soeben untersuchte Vergleichsabbildung Φ_r nutzen, um von klassisch bekannten Differentialen auf motivische zu schließen und umgekehrt. In Übereinstimmung mit der Notation in [DI] lasse ich ab jetzt die Tilde über dem Element $\tilde{\tau}$ weg, da keine Verwechslungsgefahr mehr besteht.

4.2.1 Bestimmung von $\mathrm{Ext}_A^{1,*,*}(\pi_{**}(H)), \pi_{**}(H))$

Für $t = 2^i$: $\mathrm{Ext}_A^{1,2^i,*}(\pi_{**}(H)), \pi_{**}(H)) = \tilde{\mathbb{M}}_2 h_i$ mit $h_i \in \mathrm{Ext}_A^{1,2^i,2^{i-1}}(\pi_{**}(H)), \pi_{**}(H))$ und $\mathrm{Ext}_A^{1,t,*}(\pi_{**}(H)), \pi_{**}(H)) = 0$ sonst.
Beweis:
Sei $\bar{A}$ der Kern der durch η induzierten Abbildung $A = H^{**}(H) \longrightarrow H^{**}(S) = \mathbb{M}_2$. Zu der kurzen exakten Sequenz von A-Moduln $0 \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{M}_2 \longrightarrow 0$ und dem Funktor $\mathrm{Hom}_A^{t,u}((-), \mathbb{M}_2)$ haben wir die assoziierte lange exakte Sequenz von derivierten

Funktoren

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A^{t,u}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A^{t,u}(A, \mathbb{M}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A^{t,u}(\bar{A}, \mathbb{M}_2)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{1,t,u}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{1,t,u}(A, \mathbb{M}_2) = 0$$

Die Elemente in $\mathrm{Hom}_A^{t,u}(A, \mathbb{M}_2)$ sind durch das Bild von $1 \in H^{0,0}(H)$ bestimmt. Es folgt aus Gradgründen für $t \neq 0$: $\mathrm{Hom}_A^{t,u}(A, \mathbb{M}_2) = 0$.
In diesem Fall erhalten wir aus der Sequenz einen Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}_A^{1,t,u}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) \cong \mathrm{Hom}_A^{t,u}(\bar{A}, \mathbb{M}_2) \tag{4.2.1.6}$$

Mit dem Ringwechsel $\mathbb{M}_2 \longrightarrow A$ erhalten wir

$$\mathrm{Hom}_A^{t,u}(\bar{A}, \mathbb{M}_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}^{t,u}(\mathbb{M}_2 \underset{A}{\otimes} \bar{A}, \mathbb{M}_2) \tag{4.2.1.7}$$

Der Kern von $\bar{A} \longrightarrow \mathbb{M}_2 \underset{A}{\otimes} \bar{A}$, $x \mapsto 1 \otimes x$, ist $\bar{A}^2$ (Für $a \in A$ und $0 \neq x \in \mathbb{M}_2$: $ax = 0 \Longleftrightarrow a \in \bar{A}$) und der Isomorphismus $\bar{A}/\bar{A}^2 \cong \mathbb{M}_2 \underset{A}{\otimes} \bar{A}$ liefert uns

$$\mathrm{Ext}_A^{1,t,u}(\mathbb{M}_2, \mathbb{M}_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}^{t,u}(\bar{A}/\bar{A}^2, \mathbb{M}_2) \tag{4.2.1.8}$$

Da $\bar{A}$ als $\mathbb{M}_2$-Modul frei von den zulässigen Monomen der Steenrodquadrate mit Ausnahme von $Sq^0 = Id_A$ erzeugt wird, wird $\bar{A}/\bar{A}^2$ als $\mathbb{M}_2$-Modul von den unzerlegbaren Steenrodquadraten Sq^k erzeugt(Alle anderen Basiselemente bilden nach $\bar{A}^2$ ab). Wir wissen nach 1.1.6, dass für $k \neq 2^i$ $Sq^k \in \bar{A}^2$. Für $k = 2^i$ folgt die Unzerlegbarkeit von Sq^{2^i} aus der Unzerlegbarkeit von Sq^{2^i} in der klassischen Steenrod-Algebra. Jede motivische Zerlegung würde, da die $\mathbb{M}_2$-Koeffizienten der Zerlegung aus Homogenitätsgründen Potenzen von τ sein müssen und dementsprechend unter der topologischen Realisierung auf 1 abbilden, eine klassische Zerlegung von Sq^{2^i} induzieren.
Es folgt, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}^{t,*}(\bar{A}/\bar{A}^2, \mathbb{M}_2) = 0$ für $t \neq 2^i$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{M}_2}^{2^i,*}(\bar{A}/\bar{A}^2, \mathbb{M}_2) = \tilde{\mathbb{M}}_2 h_i$. Das Element h_i ist durch die Abbildung gegeben, die die Restklasse von Sq^{2^i} auf 1 abbildet, und hat somit Gewicht 2^{i-1}. □

4.2.2 Lemma: Berechnung einiger Werte von Φ

Die Werte von Φ_r sind nach Definition schon durch die Werte von Φ_2 festgelegt. Es gilt

1. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : \phi_2(h_i) = h_i$
2. $\phi_2(r) = r$
3. $\phi_2(d_0) = d_0$
4. $\phi_2(e_0) = e_0$

Beweis:

1. Die klassischen Elemente h_i haben nach 4.1.14 ein wohlbestimmtes Urbild von höchstem Gewicht. Aus 4.2.1 folgt, dass dieses Urbild nur das motivische Element h_i sein kann.
2. Das Urbild von r unter Φ ist ebenfalls eindeutig durch seine Position bestimmt.
3. Ebenso.
4. Ebenso.

4.2.3 Vervollständigung von Lemma 8.2

Die Elemente $h_0h_4, r, h_0^3h_5, h_2h_5$ und τd_0e_0 überleben in den E_3-Term der motivischen Adamsspektralsequenz.
Für ihre motivische d_3-Differential folgen die nachstehenden Werte durch Vergleich mit der klassischen Adamsspektralsequenz:

1. $d_3(h_0h_4) = h_0d_0$
2. $d_3(r) = \tau h_1d_0^2$
3. $d_3(h_0^3h_5) = h_0r$
4. $d_3(h_2h_5) = \tau h_1d_1$
5. $d_3(\tau d_0e_0) = c_0Pd_0$

Beweis:
Der Beweis erfolgt stets nach demselben Prinzip: Das Differential ist für jedes der Elemente durch Position in der Spektralsequenz und Gewicht darauf festgelegt, entweder das angegebene Element oder 0 zu sein. Den zweiten Fall können wir aber ausschließen, da wir wissen, dass die Anwendung von Φ_3 auf die obenstehenden Gleichungen gerade das klassische Differential ergeben muss.

1. h_0h_4 überlebt den E_2-Term, da es von keinem Differential getroffen werden kann, und $d_2(h_0h_4) = h_0^2h_3^2 = 0$. Die klassische Relation für $\Phi_3(h_0h_4) = h_0h_4$ lautet $d_3(h_0h_4) = h_0d_0 \neq 0$
2. Auch r überlebt den E_2-Term: Das einzige Element, das in der richtigen Position und im richtigen Gewicht liegt, um r zu treffen, ist $h_0^3h_5$, aber $d_2(h_0^3h_5) = h_0^4h_4^2 = 0$. Nach Lemma 8.1 gilt weiterhin $d_2(r) = 0$. Das klassische Bild von r, $\Phi_3(r) = r$ unterliegt der klassischen Relation $d_3(r) = h_1d_0^2 \neq 0$
3. $h_0^3h_5$ könnte nur von dem Differential von τh_1h_5 getroffen werden, aber $d_2(\tau h_1h_5) = \tau h_1d_2(h_5) = \tau h_1h_0h_4^2 = 0$. Für das klassische Bild $\Phi_3(h_0^3h_5) = h_0^3h_5$ gilt die Relation $d_3(h_0^3h_5) = h_0r \neq 0$
4. h_2h_5 kann von keinem Element getroffen werden und überlebt, da $d_2(h_2h_5) = h_2d_2(h_5) = h_2h_0h_4^2 = 0$.Für $\Phi_3(h_2h_5) = h_2h_5$ gilt die klassische Beziehung $d_3(h_2h_5) = h_1d_1 \neq 0$

5. Auch τd_0e_0 überlebt den E_2-Term: $d_2(\tau d_0e_0) = \tau d_2(d_0e_0) = \tau h_1^2 d_0^2 = 0$, und da $d_2(q) = 0$ nach Lemma 8.1, wird τd_0e_0 nicht getroffen. Dann ist $\Phi_3(\tau d_0e_0) = d_0e_0$, und es gilt die klassische Relation $d_3(d_0e_0) = c_0Pd_0$

□

4.2.4 Vervollständigung von Lemma 8.4

$\tau^2 d_0e_0 + h_0^7h_5$ überlebt nach E_4, und $d_4(\tau^2 d_0e_0 + h_0^7h_5) = P^2d_0$.
Beweis:
Der Beweis verläuft nach genau der gleichen Methode wie der Beweis von 8.2:
$\tau^2 d_0e_0$ und $h_0^7h_5$ überleben nach E_3: Da $d_2(q) = 0$ werden beide Elemente nicht getroffen, und wegen $d_2(h_0^7h_5) = h_0^8h_4 = 0$ (nach Lemma 8.1 und Derivationseigenschaft) sowie $d_3(\tau^2 d_0e_0) = \tau^2 d_2(d_0e_0) = \tau^2 h_1^2 d_0^2 = 0$ sind beide E_2-Zykel.
$\tau^2 d_0e_0 + h_0^7h_5$ überlebt auch nach E_4: Es gilt $d_3(\tau^2 d_0e_0) = \tau c_0Pd_0$ und $d_2(h_0^7r) = h_0^4(d_2(h_0^3r) = h_0^5r = \tau c_0Pd_0$, d.h. $d_3(\tau^2 d_0e_0 + h_0^7h_5) = \tau c_0Pd_0 + \tau c_0Pd_0 = 0$.
Position und Gewicht legen fest, dass $d_4(\tau^2 d_0e_0 + h_0^7h_5)$ entweder P^2d_0 oder 0 ist. $\Phi_4(\tau^2 d_0e_0 + h_0^7h_5)$ ist durch das Bild von $\Phi_3(\tau^2 d_0e_0 + h_0^7h_5)$ auf dem E_4-Term bestimmt. Da beide Summanden E_2-Zykel sind und auf den E_3-Term überleben, können wir Φ_3 über der Summe aufteilen und erhalten $\Phi_3(\tau^2 d_0e_0 + h_0^7h_5) = \Phi_3(d_0e_0) + \Phi_3(h_0^7h_5) = d_0e_0 + h_0^7h_5$.
Für das Bild auf dem E_4-Term gilt aber klassisch gerade $d_4(d_0e_0 + h_0^7h_5) = P^2d_0 \neq 0$. □

4.2.5 Vervollständigung von Lemma 8.8

In der klassischen Adamsspektralsequenz hält für kein $r \geq 2$ und kein $j \in \mathbb{N}$ die Relation $d_r(h_1h_j) = h_0^{r+1}h_j$.
Beweis:
Sei für $r \geq 2$ und $j \in \mathbb{N}$ $d_r(h_1h_j) = h_0^{r+1}h_j$. (Insbesondere überlebt h_1h_j in der klassischen Spektralsequenz bis in den E_r-Term)
Angenommen, wir wissen, dass h_1h_j motivisch bis auf den E_r-Term überlebt. Dann hat sein motivische Differential $d_r(h_1h_j)$ nach 4.2.1 das Gewicht $2^{j-1} + 1$. Das klassische Element $h_0^{r+1}h_j$ hat unter Φ_2 im freien Teil der Spektralsequenz ein wohlbestimmtes Urbild von höchstem Gewicht, nämlich (ebenfalls nach 4.2.1) das motivische Element $h_0^{r+1}h_j$ mit Gewicht 2^{j-1}. Alle anderen homogenen Elemente, die auf $h_0^{r+1}h_j$ abgebildet werden, haben niedrigeres Gewicht. Nach Definition der Φ_r kann dann auch für $r > 2$ das Urbild von Φ_r kein Element von größerem Gewicht enthalten. Folglich kann das motivische Element $d_r(h_1h_j)$ nicht klassisch auf $h_0^{r+1}h_j$ abbilden. Dies ist ein Widerspruch zur Kommutativität der Vergleichsabbildungen Φ_r mit Differentialen. Dann ist das Lemma für $r = 2$ bewiesen. □

4.2.6 Anmerkung

Für $r > 2$ ist das Lemma bewiesen, wenn h_1h_j auf den E_r-Term überlebt. Es folgt aus seiner Position in der Spektralsequenz, dass das Element von keinem Differential getroffen werden kann, und es folgt aus dem Überleben seines klassischen Bildes, dass es von keinem Differential in den freien Teil der Spektralsequenz abgebildet werden kann. Leider habe ich aber den Fall nicht ausschließen können, dass $h_1 h_j$ auf ein $\tilde{\tau}$-Torsionselement abgebildet wird. Dies steht nicht im Widerspruch zu seinem klassischen Überleben, und es würde nur ein Produkt von $h_1 h_j$ mit einer $\tilde{\tau}$-Potenz auf den E_r-Term überleben, das nicht mehr dem Gewichtsargument genügt.

Literaturverzeichnis

[A] John Frank Adams, Stable homotopy and generalised homology, University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1974, Chicago Lectures in Mathematics.

[A2] John Frank Adams, A finiteness theorem in homological algebra, Proc. Cambridge Philos. Soc. 57 (1961), 31–36.

[BOA] John M. Boardman, Conditionally convergent spectral sequences, Contemporary Mathematics 239: 49–84.

[BK] Aldridge K. Bousfield and Dan Kan, Homotopy limits, completions and localizations, Springer-Verlag Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304.

[BOU] Aldridge K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology, Topology 18 (1979), no. 4, 257-281.

[DI] Daniel Dugger und Daniel C. Isaksen, The motivic Adams spectral sequence, Geometry & Topology 14 (2010), 967–1014.

[DI2] Daniel Dugger and Daniel C. Isaksen, Motivic cell structures, Algebr. Geom. Topol.5(2005), 615-652.

[GJ] Paul Gregory Goerss, John F. Jardine, Simplicial Homotopy Theory, Progress in Math., Vol. 174, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 1999.

[HKO] Hu, Kriz, Ormsby: Convergence of the Adams spectral sequence

[HKO2] Hu, Kriz, Ormsby: Remarks on motivic homotopy theory over algebraically closed fields, J. K-Theory 7 (2011), 55–89

[JAR] John F. Jardine, Motivic symmetric spectra, Doc. Math. 5 (2000), 445-553

[MOS] Robert M.F. Moss, The composition pairing of Adams spectral sequences, proc. London Philos. Soc. (3)18 (1968), 179-192.

[MOR] F. Morel. Suite spectrale d'Adams et invariants cohomologiques des formes quadratiques. C. R. Acad. Sci. Paris t. 328, Série I (1999), 963–968.

[MOR2] Fabien Morel, On the motivic π_0 of the sphere spectrum, Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 131, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, pp. 219-260.

[MOR3] Fabien Morel, The stable $\mathbb{A}1$-connectivity theorems, K-Theory 35 (2005), no. 1-2, 1-68.

[MV] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky, $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1999), no. 90, 45-143 (2001).

[OR] Paul Arne Østvær, Oliver Röndigs, Rigidity in motivic homotopy theory, Math. Ann. 341(2008), 651-675

[RAV] Douglas C. Ravenel, Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres, Pure and Applied Mathematics, vol. 121, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.

[RAV2] Douglas C. Ravenel, Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory, Annals of Math Studies 128. Princeton University Press, 1992.

[SER] J.P. Serre, Galois Cohomology, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002

[VOE] Vladimir Voevodsky, Motivic cohomology with $\mathbb{Z}_2$-coefficients, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2003), no. 98, 59-104.

[VOE2] Vladimir Voevodsky, Reduced power operations in motivic cohomology, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2003), no. 98, 1-57.

[VOE3] Vladimir Voevodsky, Motivic Eilenberg-MacLane spaces, arXiv:0805.4432.