

**Skript zur Vorlesung
Grundzüge der Mathematik
Wintersemester 2016/2017
(Bachelor Studiengang)**

© Prof. Dr. Margareta Heilmann

Bergische Universität Wuppertal

**Das Skript eignet sich zur Vor- und Nachbereitung der in der
Vorlesung Grundzüge der Mathematik vermittelten Inhalte.**

Das Skript ist kein Ersatz für die Vorlesung!

1. Lineare Gleichungssysteme

Zahlreiche Modelle in den Wirtschaftswissenschaften verwenden Systeme mit mehreren Gleichungen für mehrere Variablen. Sind diese Gleichungen linear, so werden Untersuchungs- und Lösungsmethoden im Bereich der Linearen Algebra zur Verfügung gestellt.

In diesem Kapitel erläutern wir zwei verschiedene Methoden, mit denen man systematisch lineare Gleichungssysteme lösen kann. Während sich die Cramersche Regel nur für Gleichungssysteme verwenden lässt, bei denen die Anzahl der Unbekannten mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmt, ist der Gauß-Algorithmus auch anwendbar, wenn es mehr oder weniger Gleichungen als Unbekannte gibt. Außerdem verwendet man die Cramersche Regel wegen des sonst zu hohen Rechenaufwandes meist nur zur Lösung kleiner linearer Gleichungssysteme.

Bevor wir uns mit den angegebenen Lösungsmethoden beschäftigen, legen wir zunächst fest, was unter einem linearen Gleichungssystem zu verstehen ist und geben ein Beispiel an, in dem lineare Gleichungssysteme in ökonomischen Zusammenhängen vorkommen.

Beispiel:
$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 9$$
$$x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 4$$

ist ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen für die 3 Unbekannten x_1 , x_2 und x_3 . Ein Zahlentripel (x_1^*, x_2^*, x_3^*) heißt Lösung des Gleichungssystems, wenn die Zahlen x_1^* , x_2^* und x_3^* beide Gleichungen erfüllen. Durch Einsetzen lässt sich leicht feststellen, dass z.B. $(5, 1, 2)$ aber auch $(\frac{49}{23}, -\frac{16}{23}, -1)$ Lösungen des Gleichungssystems sind.

Allgemein werden wir uns auch mit der Frage beschäftigen, ob ein vorgegebenes lineares Gleichungssystem überhaupt lösbar ist und wenn ja, ob es eindeutig lösbar ist oder unendlich viele Lösungen besitzt.

Allgemein lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen für n Unbekannte x_1, x_2, \dots, x_n in folgender Standardform angeben. Dabei setzen wir grundsätzlich voraus, dass nicht alle Koeffizienten einer Zeile 0 sind.



$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1k} x_k + \dots + a_{1n} x_n & = & b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2k} x_k + \dots + a_{2n} x_n & = & b_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ik} x_k + \dots + a_{in} x_n & = & b_i \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mk} x_k + \dots + a_{mn} x_n & = & b_m
 \end{array}$$

Die Faktoren $a_{ik} \in \mathbb{R}$ vor den Unbekannten x_k heißen Koeffizienten des linearen Gleichungssystems. Die reellen Zahlen b_i bilden die rechte Seite. In der i -ten Zeile gehört zur Unbekannten x_k der Koeffizient a_{ik} .

Determinanten und Cramersche Regel

In diesem Abschnitt behandeln wir den Fall, dass die Anzahl der Gleichungen in dem linearen Gleichungssystem mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt, d.h.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1k} x_k + \dots + a_{1n} x_n & = & b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2k} x_k + \dots + a_{2n} x_n & = & b_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ik} x_k + \dots + a_{in} x_n & = & b_i \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nk} x_k + \dots + a_{nn} x_n & = & b_n
 \end{array}$$

Zur Erläuterung des Begriffs "Determinante" und zur Herleitung der Cramerschen Regel betrachten wir zunächst den Spezialfall $n = 2$, d.h. 2 Gleichungen für 2 Unbekannte

$$1) a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$

$$2) a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

Geometrisch beschreiben die Gleichungen 2 Geraden im \mathbb{R}^2 .

Gesucht sind Wertepaare (x_1, x_2) , die beide Gleichungen erfüllen,

d.h. geometrisch gemeinsame Punkte der beiden Geraden.

Es gibt nun 3 verschiedene Möglichkeiten:

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung, d.h. es gibt genau ein Wertepaar (x_1^*, x_2^*) , das beide Gleichungen erfüllt.

Geometrisch bedeutet dies, dass sich die beiden, durch die Gleichungen beschriebenen Geraden in genau einem Punkt schneiden. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten (x_1^*, x_2^*) .

b) Es gibt unendlich viele Lösungen; die beiden Gleichungen sind zueinander proportional.

Geometrisch bedeutet dies, dass die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden übereinstimmen.

c) Es gibt keine Lösung. Geometrisch bedeutet dies, dass die beiden, durch die Gleichungen beschriebenen Geraden zueinander parallel verlaufen; sie haben keinen Schnittpunkt.

Wir lösen nun allgemein rechnerisch das Gleichungssystem 1) 2).

Dabei setzen wir (zunächst) der Einfachheit halber voraus, dass die auftretenden Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ alle von Null verschieden sein sollen. Ziel ist es, durch Addition eines geeigneten Vielfachen der 1. Gleichung zu einem entsprechenden Vielfachen der 2. Gleichung jeweils eine der beiden Unbekannten zu eliminieren, d.h.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \cdot a_{22} : a_{22} a_{11} x_1 + a_{22} a_{12} x_2 = a_{22} b_1 \\ 2) \cdot (-a_{12}) : -a_{12} a_{21} x_1 - a_{12} a_{22} x_2 = -a_{12} b_2 \end{array} \right\} +$$

$$\text{I)} \quad (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \cdot (-a_{21}) : -a_{21} a_{11} x_1 - a_{21} a_{12} x_2 = -a_{21} b_1 \\ 2) \cdot a_{11} : a_{11} a_{21} x_1 + a_{11} a_{22} x_2 = a_{11} b_2 \end{array} \right\} +$$

$$\text{II)} \quad (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_2 = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$

Das Gleichungssystem I), II) ist äquivalent zum Gleichungssystem 1), 2). Man kann nachrechnen, dass dies auch gilt, wenn Koeffizienten des Gleichungssystems Null sind.

Das Lösungsverhalten lässt sich nun an dem äquivalenten Gleichungssystem I), II) leicht untersuchen. Man sieht, dass die Lösungsmöglichkeit durch den Wert von

$$D = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

bestimmt (determiniert) wird. Genauer gilt:

a) Ist $D = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die **eindeutig bestimmte Lösung**

$$x_1^* = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2^* = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

b) Ist $D = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0$ und $b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = 0$ und $a_{11} b_2 - a_{21} b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem **unendlich viele Lösungen**.

c) Ist $D = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0$ und ($b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \neq 0$ oder $a_{11} b_2 - a_{21} b_1 \neq 0$), so hat das lineare Gleichungssystem **keine Lösung**.

Man kann den Sachverhalt nun wesentlich kürzer angeben, wenn man den Begriff der **Determinante** einführt.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ heißt Determinante zweiter Ordnung.}$$

$$\text{Ebenso sind } D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} \text{ und}$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \text{ Determinanten zweiter Ordnung.}$$

Formal erhält man D_{x_1} und D_{x_2} aus D , indem man die 1. bzw. 2. Spalte von D durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt.

Die Gleichungen I) und II) lassen sich nun kurz schreiben als

$$\text{I) } D \cdot x_1 = D_{x_1}$$

$$\text{II) } D \cdot x_2 = D_{x_2}$$

und es gilt:

a) Ist $D \neq 0$, dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$ und $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\}.$$

Die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

b) Ist $D = 0 \wedge D_{x_1} = 0 \wedge D_{x_2} = 0$, dann ist

$$\mathbb{L} = \{ (x_1, x_2) : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \} = \{ (x_1, x_2) : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \}.$$

Die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden sind gleich; alle Punkte der Geraden sind Lösungen.

c) Ist $D = 0 \wedge (D_{x_1} \neq 0 \vee D_{x_2} \neq 0)$, dann ist I) oder II) nicht erfüllbar, also

$$\mathbb{L} = \{ \}.$$

Die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden sind parallel, haben also keine gemeinsamen Punkte.

Beispiel: $2x_1 - 5x_2 = 1$
 $-x_1 + 3x_2 = -2$

Wir berechnen die zugehörigen Determinanten.

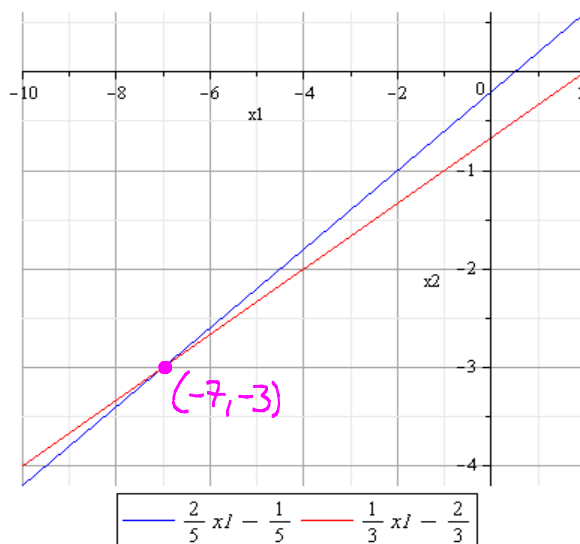
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7, D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = -7$ und $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = -3$,
 d.h. $\mathbb{L} = \{(-7, -3)\}$.

Für eine geometrische Betrachtung lösen wir die Gleichungen nach x_2 auf. An dieser Darstellung sieht man unmittelbar, dass die zugehörigen Geraden verschiedene Steigungen besitzen und sich somit in genau einem Punkt schneiden.

$$2x_1 - 5x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}$$

$$-x_1 + 3x_2 = -2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}$$



Beispiel: $-2x_1 + x_2 = -5$
 $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{2}$

Wir berechnen die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0, D_{x_1} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0, D_{x_2} = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, d.h.

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) : -2x_1 + x_2 = -5\} = \{(x_1, x_2) : x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{2}\}$$

Bei genauerem Hinschauen sieht man, dass sich die 1. von der 2. Gleichung nur um den Faktor $-\frac{1}{2}$ unterscheidet; die Gleichungen sind zueinander proportional.

Löst man die beiden Gleichungen nach x_2 auf, erhält man in beiden Fällen dasselbe Ergebnis.

$$-2x_1 + x_2 = -5 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - 5$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - 5$$

Die durch die Gleichungen dargestellten Geraden stimmen überein. Die Koordinaten aller Punkte der Geraden sind Lösungen des Gleichungssystems.

Beispiel: $-2x_1 + x_2 = -4$

$$4x_1 - 2x_2 = 2$$

Wir berechnen die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

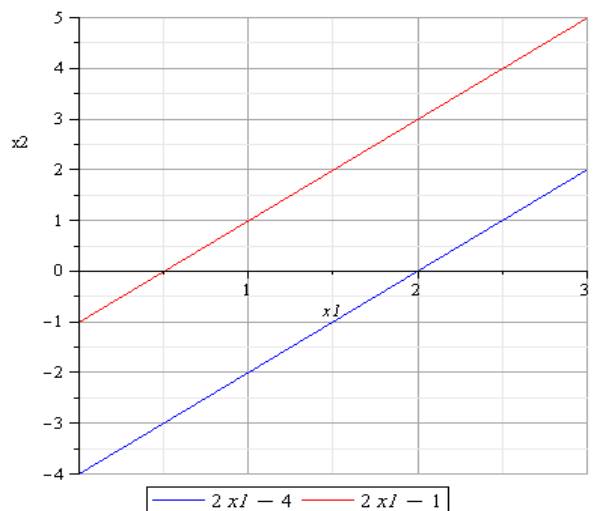
Somit ist das lineare Gleichungssystem nicht lösbar, d.h. $\mathbb{L} = \{ \}$.

Löst man die beiden Gleichungen nach x_2 auf, so erhält man:

$$-2x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - 4$$

$$4x_1 - 2x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - 1$$

Die beiden durch die Gleichungen beschriebenen Geraden besitzen zwar dieselbe Steigung 2, aber verschiedene Achsenabschnitte und sind somit parallel.



Die für den Spezialfall von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten erläuterte Lösungsmethode heißt **Cramersche Regel**.

Im folgenden soll die Cramersche Regel auch für die Lösung größerer quadratischer Gleichungssysteme hergeleitet werden. Dazu müssen die notwendigen Begriffe auf lineare Gleichungssysteme mit n Gleichungen

chungen für n Unbekannte, $n \in \mathbb{N}$, verallgemeinert werden, d.h. wir betrachten nun allgemein:

$$\begin{array}{r}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots \\
 a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k + \dots + a_{in}x_n = b_i \\
 \vdots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k + \dots + a_{nn}x_n = b_n
 \end{array}$$

Analog zum Spezialfall $n=2$ werden die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems in einem quadratischen Schema, der **Determinante n -ter Ordnung**, zusammengefasst.

$$D = \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & \boxed{a_{ik}} & \dots & a_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} i\text{-te Zeile} \\ \\ k\text{-te Spalte} \end{array}$$

Der Koeffizient a_{ik} steht im Kreuzungspunkt der i -ten Zeile und der k -ten Spalte.

Entsprechend zu dem Vorgehen im Spezialfall $n=2$ erhält man wieder weitere Determinanten, indem man jeweils die k -te Spalte von D durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt

$$D_{x_k} = \begin{vmatrix}
 a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Wie man solche Determinanten n -ter Ordnung allgemein berechnet, wird weiter unten behandelt. Vorher wollen wir die formale Aufstellung solcher Determinanten an einem Beispiel erläutern und die Cramersche Regel allgemein formulieren.

Beispiel: $1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = \frac{1}{2}$

$$2x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 1x_3 = 7$$

$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 5x_3 = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 5 \end{vmatrix}, D_{x_1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 3 \\ 7 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -3 & \frac{1}{4} & 5 \end{vmatrix}, D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -3 & 5 \end{vmatrix}, D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 7 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -3 \end{vmatrix}$$

Wir formulieren nun die Cramersche Regel für den allgemeinen Fall.

Satz: Cramersche Regel

a) Ist $D \neq 0$, so ist $\left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D}\right)$ die **eindeutig bestimmte Lösung** des linearen Gleichungssystems.

b) Ist $D = 0$ und mindestens ein $D_{x_k} \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem **keine Lösung**.

c) Ist $D = 0$ und $D_{x_k} = 0$ für alle $k=1, 2, \dots, n$, so kann man für $n > 2$ keine allgemeine Aussage machen. Den genauen Sachverhalt für den allgemeinen Fall werden wir im Zusammenhang mit dem Gauß-Algorithmus sehen.

Um die Cramersche Regel anwenden zu können, muss man nun wissen, wie man allgemein Determinanten n -ter Ordnung berechnen kann. Der im weiteren erläuterte Entwicklungssatz von Laplace gibt ein Verfahren an, wie man eine Determinante n -ter Ord-

nung als eine Summe von n Determinanten $(n-1)$ -ter Ordnung berechnen kann. Jede Determinante $(n-1)$ -ter Ordnung wird dann als eine Summe von $(n-1)$ Determinanten $(n-2)$ -ter Ordnung berechnet. Dies setzt man fort, bis man nur noch Determinanten 2-ter Ordnung zu berechnen hat.

Will man z.B. eine Determinante 4-ter Ordnung berechnen, so ist dafür die Berechnung von 4 Determinanten 3-ter Ordnung erforderlich. Für jede Determinante 3-ter Ordnung müssen 3 Determinanten 2-ter Ordnung berechnet werden. Insgesamt sind also für die Berechnung einer Determinante 4-ter Ordnung $4 \cdot 3 = 12$ Determinanten 2-ter Ordnung zu bestimmen. Für eine Determinante 5-ter Ordnung sind es bereits $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ u.s.w.

Um den Entwicklungssatz von Laplace erläutern zu können, benötigen wir zunächst einige weitere Begriffe.

Streicht man in einer Determinante n -ter Ordnung die i -te Zeile und die k -te Spalte, so erhält man eine Determinante M_{ik} $(n-1)$ -ter Ordnung, die ein **Minor** genannt wird. Multipliziert man den Minor M_{ik} mit dem **Vorzeichenfaktor** $(-1)^{i+k}$, so erhält man den sogenannten **Co-Faktor** C_{ik} .

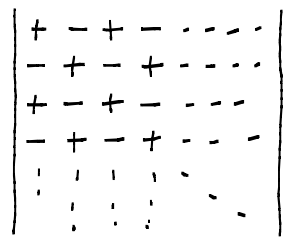
Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 7 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}, \quad C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$$

Der Vorzeichenfaktor lässt sich auch einfach dem Schachbrettmuster entnehmen.



Mit Hilfe der Co-Faktoren lässt sich nun angeben, wie man Determinanten n-ter Ordnung als Summe von Determinanten (n-1)-ter Ordnung darstellen kann.

Satz: Entwicklungssatz von Laplace

a) Entwicklung nach der i-ten Zeile:

Für jeden festen Zeilenindex $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{ik}$$

b) Entwicklung nach der k-ten Spalte.

Für jeden festen Spaltenindex $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1k} C_{1k} + a_{2k} C_{2k} + \dots + a_{nk} C_{nk} = \sum_{i=1}^n a_{ik} C_{ik}$$

Es ist tatsächlich egal, nach welcher Zeile oder Spalte man entwickelt. Man erhält immer dasselbe Ergebnis.

Beispiel:

Wir berechnen die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Schachbrettmuster für die Vorzeichenfaktoren $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

a) Entwickeln nach der 3-ten Zeile:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-5) - 3 \cdot (-4) + (-3) = 14$$

b) Entwickeln nach der 2-ten Spalte

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) = 14$$

Beispiel: Wir berechnen den Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Wir entwickeln zunächst nach der 1. Zeile:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

↑
Entwickeln
nach 1. Spalte
↑
Entwickeln
nach 2. Zeile
= 0

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + (-1) + 3 = -6$$

Nachdem wir wissen, wie man auch Determinanten höherer als zweiter Ordnung ausrechnet, können wir die Cramersche Regel auch auf Gleichungssysteme mit n Gleichungen für n Unbekannte anwenden, wenn $n > 2$ ist.

Beispiel 1: $3x_1 + x_2 = 1$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = -2$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3$$

Wir berechnen zunächst die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -10 \quad (\text{Also ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.})$$

↑
Entwickeln nach 1. Zeile

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

↑
Entwickeln nach 1. Zeile

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

↑
Entwickeln nach 3. Spalte

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

Nach der Cramerschen Regel ist die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems gegeben durch:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{1}{10}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{7}{10}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = -\frac{7}{10}$$

Somit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10}, -\frac{7}{10} \right) \right\}$$

Beispiel 1: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2$$

$$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 3$$

Es gilt:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot (-3) - 8 \cdot (-6) + 9 \cdot (-3) = 0$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-3) - 8 \cdot 0 + 9 \cdot 1 = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot 0 - 3 \cdot (-6) + 9 \cdot (-2) = 0$$

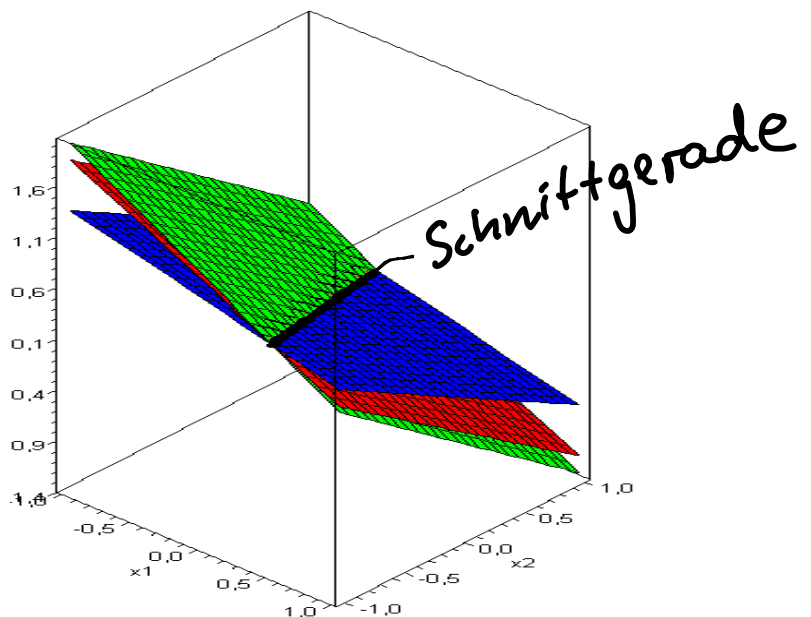
$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot (-1) - 8 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = 0$$

Da alle Determinanten gleich Null sind und $n = 3 > 2$, können wir nach unserem Satz S. 11 keine Aussage machen.

Geometrisch beschreiben 3 Gleichungen für 3 Unbekannte 3 Ebenen in \mathbb{R}^3 . Bei unendlich vielen Lösungen können sich z. B. die drei Ebenen in einer Geraden schneiden oder übereinstimmen. Im ersten Fall sind alle Punkte der Schnittgeraden Lösungen des linearen Gleichungssystems, im zweiten Fall alle Punkte der Ebene.

In diesem Beispiel gibt es tatsächlich unendlich viele Lösungen, die Ebenen schneiden sich in einer Geraden, wie die folgende Graphik veranschaulicht.



Bei den betrachteten Beispielen haben wir gesehen, dass beim Berechnen von Determinanten vorzugsweise nach einer Zeile oder Spalte entwickelt werden sollte, die möglichst viele Nullen enthält. Es gibt nun einige Rechenregeln für Determinanten, die u.a. verwendet werden können, um "zusätzliche Nullen" zu bekommen bzw. die Berechnung von Determinanten zu vereinfachen.

Rechenregeln für Determinanten

- a) Sind alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) einer Determinante gleich Null, dann hat die Determinante den Wert Null.
- b) Schreibt man in einer Determinanten die Zeilen in entsprechender Reihenfolge als Spalten auf, so bleibt der Wert gleich, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- c) Eine Determinante wird mit einer reellen Zahl α multipliziert, indem alle Elemente einer Zeile (Spalte) mit α multipliziert werden.
- d) Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen (Spalten), so wechselt die Determinante ihr Vorzeichen.
- e) Sind zwei Zeilen (Spalten) einer Determinante zueinander proportional, so hat sie den Wert Null.
- f) Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn das Vielfache einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) addiert wird.
- g) Hat eine Determinante "Dreiecksgestalt", d. h. sind alle Einträge ober- oder unterhalb der Diagonalen Null, so ist der Wert der Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Wir illustrieren die Regeln am Spezialfall der Determinanten 2-ter Ordnung.

$$a) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - 0 \cdot a_{12} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$c) \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}); \quad \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha a_{11} a_{22} - a_{21} \alpha a_{12}$$

$$d) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11} = -(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} a_{11} & c \cdot a_{11} \\ a_{21} & c \cdot a_{21} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot c \cdot a_{21} - a_{21} \cdot c \cdot a_{11} = 0$$

$$f) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + c \cdot a_{11} & a_{22} + c \cdot a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} (a_{22} + c a_{12}) - (a_{21} + c \cdot a_{11}) \cdot a_{12} \\ = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$g) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22}$$

Beispiel:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & \pi \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$c) \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 1 \\ -2 & -8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \\ -2 & -8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & 9 \end{vmatrix} \quad g) \begin{vmatrix} 1 & e & \pi \\ 0 & 2 & 10^{1000} \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

(-2)

Gaußsches Eliminationsverfahren

Für größere lineare Gleichungssysteme ist die Cramersche Regel nicht besonders effektiv. Außerdem ist sie nur auf Gleichungssysteme mit n Gleichungen für n Unbekannte anwendbar. Im folgenden stellen wir daher ein allgemein anwendbares Verfahren vor, in dem **systematisch** Unbekannte aus bestimmten Gleichungen eliminiert werden.

Ziel ist es, das vorgegebene lineare Gleichungssystem in ein äquivalentes Gleichungssystem umzuformen, das eine sogenannte Zeilenstufenform besitzt. Daran kann dann einerseits das Lösungsverhalten (eindeutig lösbar, unlösbar, unendlich viele Lösungen) abgelesen werden, andererseits im Falle der Lösbarkeit die Lösungsmenge einfach bestimmt werden.

Wir behandeln nun allgemein lineare Gleichungssysteme mit m Gleichungen für n Unbekannte, d.h.

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1k} x_k + \dots + a_{1n} x_n & = & b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2k} x_k + \dots + a_{2n} x_n & = & b_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ik} x_k + \dots + a_{in} x_n & = & b_i \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mk} x_k + \dots + a_{mn} x_n & = & b_m
 \end{array}$$

Das Lösungsverfahren beruht auf folgenden Äquivalenzumformungen:

- 1) Gleichungen dürfen in der Reihenfolge miteinander vertauscht werden.
- 2) Gleichungen dürfen mit einem beliebigen, von Null verschiedenen Faktor multipliziert werden.
- 3) Zu jeder Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung addiert werden.

Bevor wir das Gaußsche Eliminationsverfahren weiter erläutern, betrachten wir ein Beispiel, das auf ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen für 3 Unbekannte führt.

Beispiel: Ein Unternehmen produziert 2 Güter A und B. Das Unternehmen hat 3 Fabriken, in denen die beiden Güter nach den in der folgenden Tabelle gegebenen Mengen pro Stunde produziert werden.

Fabrik Gut	1	2	3
A	10	20	20
B	20	10	20

Das Unternehmen erhält einen Auftrag über 400 Einheiten von Gut A und 500 Einheiten von Gut B.

Wir bezeichnen mit x_1, x_2, x_3 die Anzahl der Stunden, in denen die 3 Fabriken zur Produktion des Auftrags genutzt werden.

Wie können / müssen x_1, x_2, x_3 gewählt werden, um die Einheiten für den Auftrag zu produzieren.

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$10x_1 + 20x_2 + 20x_3 = 400$$

$$20x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 500$$

Durch Einsetzen stellt man leicht fest, dass z.B.

$$x_1 = 12, x_2 = 2, x_3 = 12 \text{ aber auch } x_1 = 14, x_2 = 4, x_3 = 9$$

Lösungen sind. (Tatsächlich besitzt das Gleichungssystem sogar unendlich viele Lösungen.)

Wie wir bereits gesehen haben, gibt es für lineare Gleichungssysteme strukturell unterschiedliche Ergebnismöglichkeiten: eindeutig lösbar, unlösbar, unendlich viele Lösungen. Wir erläutern die Vorgehensweise zunächst an Beispielen.

Um den Schreibaufwand später reduzieren zu können, schreiben wir parallel ein Rechenschema auf. Wir werden sehen, dass man sich auf dieses Rechenschema beschränken kann.

Beispiel: Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13$$

Rechenschema

Koeffizienten	rechte Seite	Rechenanw.
1 1 1	2	
2 3 1	-1	
3 1 4	13	

Ziel: Elimination von x_1 aus der 2. und 3. Gleichung mit Hilfe der 1. Gleichung. Dazu:

- Addition des (-2) -fachen der 1. Gleichung zur 2. Gleichung
- Addition des (-3) -fachen der 1. Gleichung zur 3. Gleichung

Die 1. Gleichung bleibt unverändert.

Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_2 - x_3 = -5$$

$$-2x_2 + x_3 = 7$$

Rechenschema

1 1 1	2	
1 -1	-5	
-2 1	7	

Ziel: Elimination von x_2 aus der 3. Gleichung mit Hilfe der 2. Gleichung. Dazu:

- Addition des 2-fachen der 2. Gleichung zur 3. Gleichung.
- Die 1. und 2. Gleichung bleiben unverändert.

Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_2 - x_3 = -5$$

$$-x_3 = -3$$

Rechenschema

1 1 1	2	
1 -1	-5	
-1	-3	

Wir multiplizieren nun noch die letzte Gleichung mit (-1) , damit die Koeffizienten in der Diagonalen alle 1 werden.

Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_2 - x_3 = -5$$

$$x_3 = 3$$

Rechenschema

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} & 1 & -1 & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} & & 1 & 3 \end{array}$$

Wir haben nun ein zum Ausgangssystem äquivalentes, "gestaffeltes" Gleichungssystem, d.h. ein Gleichungssystem in "zeilenstufenform", das sich nun einfach "rückwärts", d.h. von unten nach oben auflösen lässt.

Die 3. Gleichung liefert unmittelbar $x_3 = 3$.

Einsetzen von x_3 in die 2. Gleichung liefert: $x_2 = -2$.

Einsetzen von x_2 und x_3 in die 1. Gleichung liefert: $x_1 = 1$.

Somit: $\mathcal{L} = \{(1, -2, 3)\}$.

Beispiel: Gleichungssystem

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1$$

Rechenschema

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (-\frac{2}{3}) \\ (-1) \end{array} \right] \end{array}$$

- Addition des $(-\frac{2}{3})$ -fachen der 1. Gleichung zur 2. Gleichung
- Addition des (-1) -fachen der 1. Gleichung zur 3. Gleichung

Gleichungssystem

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$-3x_2 + 3x_3 = -3$$

Rechenschema

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} \\ -3 & 3 & & -3 \end{array} \left[\begin{array}{l} \\ (9) \end{array} \right]$$

- Addition des 9-fachen der 2. Gleichung zur 3. Gleichung

Gleichungssystem

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$0 \cdot x_3 = -6$$

Rechenschema

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} \\ 0 & & & -6 \end{array}$$

Offenbar gibt es kein $x_3 \in \mathbb{R}$, das die letzte Gleichung $0 \cdot x_3 = -6$ erfüllt. Daraus schließt man unmittelbar, dass das lineare Gleichungssystem nicht lösbar ist, d.h. $\mathbb{L} = \{ \}$.

Beispiel: Gleichungssystem

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 = -1$$

Rechenchema

$$\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 4 & 2 & 1 & 0 & \\ 2 & 1 & 0 & -1 & \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \downarrow (-2) \\ \leftarrow \\ \downarrow (-1) \end{array} \right\} \end{array}$$

- Addition des (-2) fachen der 1. Gleichung zur 2. Gleichung
- Addition des (-1) fachen der 1. Gleichung zur 3. Gleichung

Gleichungssystem

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_3 = -2$$

$$-x_3 = -2$$

Rechenchema

$$\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 1 & 1 & 1 & \\ & & -1 & -2 & \\ & & -1 & -2 & \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow (-1) \end{array} \right\}$$

Gleichungssystem

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_3 = -2$$

$$(0 = 0)$$

Rechenchema

$$\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 1 & 1 & 1 & \cdot \frac{1}{2} \\ & & -1 & -2 & \cdot (-1) \\ (0 & & 0 & 0) & \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

Wir sehen, dass die letzte Gleichung überflüssig ist, da sie keine Bedingungen und Informationen liefert. Generell werden alle Gleichungen der Form " $0 = 0$ " gestrichen.

Wir multiplizieren nun noch die 1. Gleichung mit $\frac{1}{2}$ und die 2. Gleichung mit (-1) .

Gleichungssystem

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = 2$$

Rechenchema

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & 1 & 2 & \end{array}$$

Rückwärtsauflösen: $x_3 = 2$ ist durch die 2. Gleichung eindeutig festgelegt. An der 1. Gleichung sehen wir, dass x_2 frei

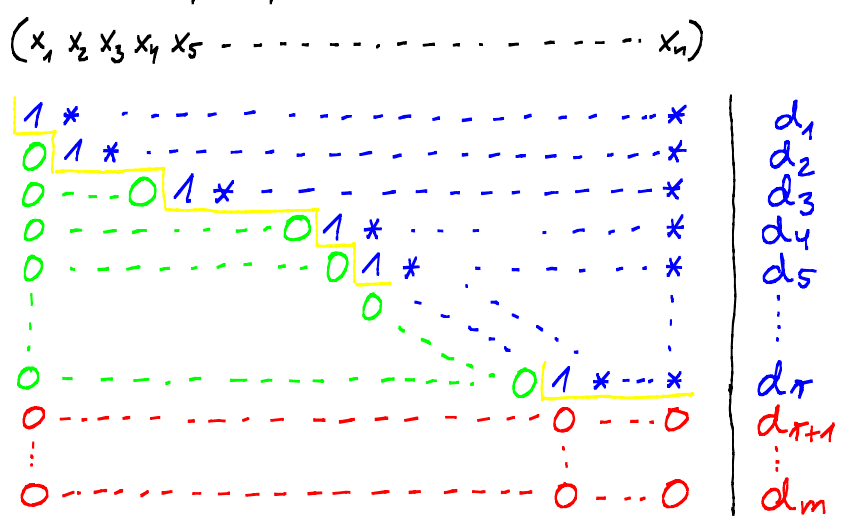
gewählt werden kann. Indem wir $x_2 = t$ setzen, liefert Einsetzen von $x_3 = 2$ und $x_2 = t$ in die 1. Gleichung $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$.

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, 2 \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es gibt unendlich viele Lösungen; für jede spezielle Wahl von $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine spezielle Lösung. t heißt Parameter. Geometrisch bilden alle Punkte der Lösungsmenge die Schnittgerade der durch die Gleichungen des linearen Gleichungssystems beschriebenen Ebenen in \mathbb{R}^3 .

Nachdem wir an 3 typischen Beispiel das Lösungsverfahren erläutert haben, geben wir nun eine allgemeine Beschreibung des Verfahrens an. Mit Hilfe der erlaubten elementaren Zeilenumformungen (Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen, Multiplikation einer Gleichung mit beliebigem Faktor ungleich Null, Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung) erfolgt im Rechenschema die Umformung zu Zeilenstufenform, die sich schematisch wie folgt darstellen lässt:



Ist eine der Zahlen d_{r+1}, \dots, d_m ungleich Null, so gibt es keine Lösung.

Ist $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0$, so werden die $(r+1)$ -te bis m -te Zeile

gestrichen und man bestimmt die Lösungsmenge aus der 1. bis n -ten Gleichung durch "Rückwärtsauflösen". Die in der Zeilenstufenform zu den Spalten ohne "Treppenstufe" gehörenden Unbekannten (in obigem Schema z.B. x_3 und x_4) sind frei wählbar und werden gleich den Parametern t_1, t_2, \dots, t_{n-n} gesetzt. Die Anzahl der Unbekannten, die frei gewählt werden können, nennt man auch die Anzahl der **Freiheitsgrade** des linearen Gleichungssystems. Im Fall der eindeutigen Lösbarkeit ist die Anzahl der Freiheitsgrade Null; alle Variablen sind durch die Gleichungen eindeutig bestimmt.

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch einige Beispiele. Dabei beschränken wir uns auf das Rechenschema. Weiter verringern wir den Schreibaufwand, indem wir Zeilen, die nicht weiter verändert werden nur markieren. Die markierten Zeilen ergeben am Ende das Schema in Zeilenstufenform

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

1)

P	1	3	-1	4
	3	4	0	11
	2	1	1	7
	2	-4	4	6

2)

P	-5	3	-1	
	-5	3	-1	
	-10	6	-2	
	0	0	0	
	0	0	0	

Red arrows and labels indicate row operations: (-3), (-2), (-2) for the first example and (-1), (-2) for the second example.

Zusammenstellung der markierten Zeilen, wobei 2) noch durch (-5) dividiert wird.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

Rückwärtsauflösen: $x_3 = t$ frei wählbar.

$$x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t$$

$$x_1 = \frac{17}{5} - \frac{4}{5}t$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{17}{5} - \frac{4}{5}t, \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt 1.

Beispiel: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$u - 2v + w + 2z = a$$

$$u + v - w + z = b$$

$$u + 7v - 5w - z = c$$

für die Unbekannten u, v, w, z . Für welche Werte von a, b, c besitzt das Gleichungssystem Lösungen? Wie sehen die Lösungen im Falle der Lösbarkeit aus?

$$1) \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 7 & -5 & -1 & c \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \downarrow (-1) \\ \downarrow (-1) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \end{array}$$

$$2) \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -1 & b-a \\ 9 & -6 & -3 & c-a \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \downarrow (-3) \\ \leftarrow \end{array} \right\} \\ 0 \quad 2a-3b+c \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $2a - 3b + c = 0$ gilt.

Für $2a - 3b + c = 0$ stellen wir die Zeilenstufenform noch einmal zusammen, wobei wir Gleichung 2) noch durch 3 dividieren.

$$1) \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & a \end{array}$$

$$2) \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & & \frac{b-a}{3} \end{array}$$

Rückwärtsauflösen:

Aus 2): $z = t$, $w = s$ sind frei wählbar.

$$\text{Damit } v = \frac{b-a}{3} + \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t$$

$$\text{Aus 1): } u = a + 2 \cdot \frac{b-a}{3} + \frac{4}{3}s + \frac{2}{3}t - s - 2t = \frac{a+2b}{3} + \frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{ \}, & \text{falls } 2a - 3b + c \neq 0 \\ \left\{ \left(\frac{a+2b}{3} + \frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t, \frac{b-a}{3} + \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t, s, t \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}, & \text{falls } 2a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

2. Matrizen - Teil 1

In diesem Kapitel werden wir zunächst festlegen, was unter einer Matrix zu verstehen ist und wie Rechenoperationen für Matrizen definiert sind. Darüberhinaus beschäftigen wir uns mit einigen Interpretationen in wirtschaftswissenschaftlichen Zusammenhängen.

Definition: Ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ Elementen aus \mathbb{R} mit m Zeilen und n Spalten heißt $(m \times n)$ -Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} i\text{-te Zeile} \\ \uparrow \\ k\text{-te Spalte} \end{array}$$

Mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnen wir die Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen.

Die a_{ik} , $i=1, \dots, m$, $k=1, \dots, n$ heißen **Elemente** der Matrix. Dabei ist der 1. Index immer der **Zeilenindex**, der 2. Index immer der **Spaltenindex**. Das Element a_{ik} steht also im Kreuzungspunkt der i -ten Zeile mit der k -ten Spalte.

Andere gängige Bezeichnungen sind auch $(a_{ik})_{\substack{i=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}$, $(a_{ik})_{m \times n}$ oder auch einfach (a_{ik}) , wenn die Zeilen- und Spaltenzahl aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Ist A eine $(n \times n)$ -Matrix, so heißt A auch **quadratische Matrix**.

Beispiel: In einer Matrix können z.B. die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems stehen. Die zugehörige Matrix heißt dann **Koeffizientenmatrix** des linearen Gleichungssystems. Die zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

zugehörige Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Ein Unternehmen habe 4 Filialen F_1, F_2, F_3 und F_4 , von denen jede 9 verschiedene Güter G_1, G_2, \dots, G_9 verkauft. Die Anzahlen a_{ik} verkaufter Güter G_i in Filiale F_k in einer festgelegten Zeitperiode lassen sich z.B. in einer Tabelle angeben.

	F_1	F_2	F_3	F_4
G_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
G_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
G_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
G_9	a_{91}	a_{92}	a_{93}	a_{94}

a_{23} gibt an, wie viel von G_2 in F_3 verkauft wurden. Dagegen gibt a_{32} an, wie viel von G_3 in F_2 verkauft wurden.

Statt in einer Tabelle kann man die Anzahlen a_{ik} auch in Form einer Matrix angeben.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} \end{pmatrix}$$

Der Zeilenindex gibt hier das Gut, der Spaltenindex die Filiale an. $a_{72} = 125$ würde z.B. bedeuten, dass von Gut 7 in Filiale 2 in der

Zeitperiode 125 Stück verkauft wurden.

Wir haben bisher nur gesehen, dass man Matrizen benutzen kann, um in ihr z.B. Informationen statt in einer Tabelle anzugeben.

Der tatsächliche Nutzen besteht jedoch darin, dass es Regeln für das Rechnen und den Umgang mit Matrizen gibt.

Wir legen zunächst fest, wann zwei Matrizen gleich sein sollen. Dies ist nur sinnvoll, wenn die Matrizen gleiche Zeilen- und Spaltenzahl haben.

Definition: Seien $A = (a_{ik})_{m \times n}$ und $B = (b_{ik})_{m \times n}$. Dann ist

$$A = B \Leftrightarrow a_{ik} = b_{ik} \text{ für jedes } i \in \{1, \dots, m\} \text{ und } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Die Gleichheit von Matrizen ist also elementweise definiert.

Beispiel: Gibt es $t, u, v, w \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 3t - 4v & 9u + 3v + w \\ 3t - v + w & u + 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + 3v + 2w & -t - 2u + w \\ u - v & -6t - v \end{pmatrix} \text{ gilt?}$$

Wenn ja, was ist (sind) die Lösung(en)?

Die Gleichheit der beiden Matrizen ist äquivalent dazu, dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$3t - 4v = u + 3v + 2w$$

$$9u + 3v + w = -t - 2u + w$$

$$3t - v + w = u - v$$

$$u + 2w = -6t - v$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten t, u, v, w . Wir bringen dies zunächst in die standardisierte

$$\text{Form: } 3t - u - 7v - 2w = 0$$

$$t + 11u + 3v = 0$$

$$3t - u + w = 0$$

$$6t + u + v + 2w = 0$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus. Nach Vertauschen der ersten beiden Gleichungen erhalten wir das folgende Rechenschema:

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{array}{c|ccc} \hline 1 & 11 & 3 & 0 \\ \hline 3 & -1 & -7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow (-3) \\ \leftarrow (-3) \\ \leftarrow (-6) \end{array} \\
 2) \begin{array}{c|ccc} \hline -34 & -16 & -2 \\ \hline -34 & -9 & 1 \\ -65 & -17 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow (-1) \\ \leftarrow (-\frac{65}{34}) \end{array} \\
 3) \begin{array}{c|cc} \hline 7 & 3 \\ \hline \frac{231}{17} & \frac{99}{17} & \cdot \frac{17}{33} \\ \hline 7 & 3 \\ 7 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow (-1) \\ \leftarrow (-1) \end{array} \\
 4) \begin{array}{c|c} \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Rückwärtsauflösen:

Aus 4) folgt $w = s \in \mathbb{R}$ frei wählbarer Parameter.

Einsetzen in 3) liefert

$$v = -\frac{3}{7}s$$

Einsetzen in 2) liefert

$$u = \frac{1}{7}s$$

Einsetzen in 1) liefert

$$t = -\frac{2}{7}s$$

Für jedes $s \in \mathbb{R}$ sind die beiden Matrizen für $t = -\frac{2}{7}s$, $u = \frac{1}{7}s$, $v = -\frac{3}{7}s$ und $w = s$ gleich.

$$\begin{aligned}
 \text{Probe: } \begin{pmatrix} 3t - 4v & 9u + 3v + w \\ 3t - v + w & u + 2w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7}s & s \\ \frac{4}{7}s & \frac{15}{7}s \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} u + 3v + 2w & -t - 2u + w \\ u - v & -6t - v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7}s & s \\ \frac{4}{7}s & \frac{15}{7}s \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu den Rechenoperationen für Matrizen.

Definition: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A = (a_{ik})_{m \times n}$. Dann ist die **Multiplikation der Matrix A mit dem Skalar α** definiert durch

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ik})_{m \times n}.$$

Jedes Matrixelement wird also mit α multipliziert.

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 3 & 11 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 & -12 \\ 9 & 33 & 3 \\ -6 & 3 & 15 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{16} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ -6 & -8 & 12 \\ 5 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

Definition: Seien $A = (a_{ik})_{m \times n}$ und $B = (b_{ik})_{m \times n}$. Dann ist die **Addition bzw. Subtraktion** der Matrizen erklärt durch:

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik})_{m \times n}, \quad A - B = (a_{ik} - b_{ik})_{m \times n}.$$

Es werden also jeweils die Elemente mit gleichem Zeilen- und Spaltenindex addiert bzw. subtrahiert.

Wichtig! Addition und Subtraktion sind nur für Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl definiert!

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 9 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+(-2) & 7+3 & -3+4 \\ 9+6 & 5+(-2) & -1+(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 15 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-(-2) & 7-3 & -3-4 \\ 9-6 & 5-(-2) & -1-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Welchen Sinn solche Rechenoperationen in Sachzusammenhängen machen können, erschließen wir uns an einem Beispiel.

Beispiel: Das Zentrallager einer Firma liefert an seine vier Filialen in Wuppertal, Remscheid, Solingen und Schwelm jeweils fünf verschiedene Modelle von Computern. Der Lieferumfang für den Monat Januar wird durch folgende Tabelle gegeben.

Filiale \ Typ	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
Wuppertal	20	30	30	10	10
Remscheid	20	25	30	15	10
Solingen	15	20	25	10	10
Schwelm	20	20	30	15	15

Zunächst schreiben wir die gegebenen Informationen in Form einer Matrix $A = (a_{ik})_{4 \times 5}$ auf, wobei a_{ik} die Anzahl der zur Filiale F_i , $i = 1, \dots, 4$ gelieferten Computer des Modells k , $k = 1, \dots, 5$ bedeutet. Dabei legen wir

fest, dass F_1 -Wuppertal, F_2 -Remscheid, F_3 -Solingen, F_4 -Schwelm sein soll. - 6 -

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 30 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 30 & 15 & 10 \\ 15 & 20 & 25 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 30 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

In den Monaten Februar bis November werden die Filialen jeweils mit den gleichen Stückzahlen beliefert wie im Januar, im Dezember erhalten die Filialen Lieferungen gemäß der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 35 & 20 & 15 \\ 25 & 35 & 40 & 20 & 20 \\ 25 & 30 & 30 & 25 & 15 \\ 30 & 25 & 35 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen diejenige Matrix, die die Lieferumfänge der verschiedenen Modelle für die fünf Filialen für das gesamte Jahr beschreibt: $11 \cdot A + B$

$$\begin{aligned} &= 11 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 30 & 30 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 30 & 15 & 10 \\ 15 & 20 & 25 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 30 & 15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 40 & 35 & 20 & 15 \\ 25 & 35 & 40 & 20 & 20 \\ 25 & 30 & 30 & 25 & 15 \\ 30 & 25 & 35 & 20 & 25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 220 & 330 & 330 & 110 & 110 \\ 220 & 275 & 330 & 165 & 110 \\ 165 & 220 & 275 & 110 & 110 \\ 220 & 220 & 330 & 165 & 165 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 40 & 35 & 20 & 15 \\ 25 & 35 & 40 & 20 & 20 \\ 25 & 30 & 30 & 25 & 15 \\ 30 & 25 & 35 & 20 & 25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 250 & 370 & 365 & 130 & 125 \\ 245 & 310 & 370 & 185 & 130 \\ 190 & 250 & 305 & 135 & 125 \\ 250 & 245 & 365 & 185 & 190 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

z.B. erhält Solingen von Modell 4 im ganzen Jahr 135 Stück.

Wir stellen nun einige Rechenregeln für die Addition von Matrizen und die Multiplikation mit Skalaren zusammen. Die Gültigkeit der Regeln ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen und den entsprechenden Regeln für reelle Zahlen.

Regeln für die Addition von Matrizen

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $O \in \mathbb{R}^{m \times n}$ diejenige $(m \times n)$ -Matrix, deren Einträge alle Null sind. Dann gilt:

$$A + B = B + A \quad (\text{Kommutativgesetz der Addition})$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{Assoziativgesetz der Addition})$$

$$A + O = A \quad (\text{Nullelement der Addition})$$

$$A + (-A) = O \quad (\text{Inverses Element der Addition})$$

Regeln für die Multiplikation mit Skalaren

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

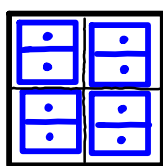
$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

Während die bisher behandelten Rechenoperationen recht einfach sind, ist die Multiplikation von Matrizen komplizierter. Bevor wir eine exakte Definition angeben, betrachten wir zunächst ein einführendes Beispiel.

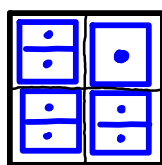
Beispiel: Ein Baumarkt bietet für Kleinteile wie Nägel, Schrauben etc. ein Ordnungssystem an, das aus den Bestandteilen B_1 -Korpus, B_2 -Schubfächer klein, B_3 -Schubfächer groß zu 5 verschiedenen Modellen M_k , $k=1, 2, \dots, 5$ zusammengestellt werden kann.

Modell 1



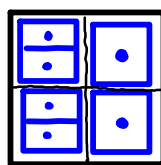
$1 \times B_1$
 $4 \times B_2$

Modell 2



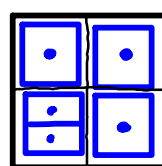
$1 \times B_1$
 $3 \times B_2$
 $1 \times B_3$

Modell 3



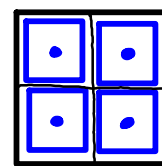
$1 \times B_1$
 $2 \times B_2$
 $2 \times B_3$

Modell 4



$1 \times B_1$
 $1 \times B_2$
 $3 \times B_2$

Modell 5



$1 \times B_1$
 $4 \times B_3$

Wir stellen den Bedarf b_{ik} an den Bestandteilen B_i , $i=1,2,3$, für die Modelle M_k , $k=1, \dots, 5$, in einer Matrix B zusammen:

Modellmatrix:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ein erster Kunde möchte die Modelle in folgenden Stückzahlen kaufen:

$$M_1: 20, M_2: 15, M_3: 10, M_4 = 8, M_5 = 12$$

Wir können dies auch in einer (5×1) -Matrix (Spaltenvektor)

Zusammenstellen:

Auftragsmatrix (Vektor):
$$A = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen, wie viele der jeweiligen Bestandteile er jeweils kaufen muss:

$$P_{11}: 1 \cdot 20 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 12 = 65$$

$$P_{21}: 4 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 12 = 153$$

$$P_{31}: 0 \cdot 20 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 12 = 107$$

Das Ergebnis stellen wir in einer (3×1) -Matrix (Spaltenvektor)

zusammen: Produktionsmatrix (Vektor):
$$P = \begin{pmatrix} 65 \\ 153 \\ 107 \end{pmatrix}$$

Man sieht, wie sich die Elemente der Produktionsmatrix als Summen der Produkte von Elementen einer Zeile der Modellmatrix B mit den Elementen der Auftragsmatrix A ergeben.

Wir erweitern das Beispiel, indem wir einen zweiten Kunden betrachten, der die Modelle in den Stückzahlen

$$M_1: 14, M_2: 9, M_3: 11, M_4 = 13, M_5 = 7 \text{ bestellt.}$$

Wir ergänzen die Auftragsmatrix um eine zweite Spalte zu:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 15 & 9 \\ 10 & 11 \\ 8 & 13 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$$

Analog berechnen wir für den zweiten Kunden

$$P_{12}: 1 \cdot 14 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 7 = 54$$

$$P_{22}: 4 \cdot 14 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 13 + 0 \cdot 7 = 118$$

$$P_{32}: 0 \cdot 14 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 7 = 98$$

Für den zweiten Kunden wird somit die Produktionsmatrix

erweitert zu:

$$P = \begin{pmatrix} 65 & 54 \\ 153 & 118 \\ 107 & 98 \end{pmatrix}$$

Die zweite Spalte ergibt sich analog zur ersten Spalte durch Verwendung der zweiten Spalte der Auftragsmatrix.

Man kann sich nun leicht vorstellen, wie man das Beispiel um weitere Kunden ergänzen kann.

Prinzipiell haben wir im letzten Beispiel bereits eine Multiplikation von Matrizen durchgeführt, die nun exakt definiert wird.

Definition: Seien $A = (a_{ik})_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = (b_{ik})_{n \times p} \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Dann ist das **Produkt**

$$C = (c_{ik})_{m \times p} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

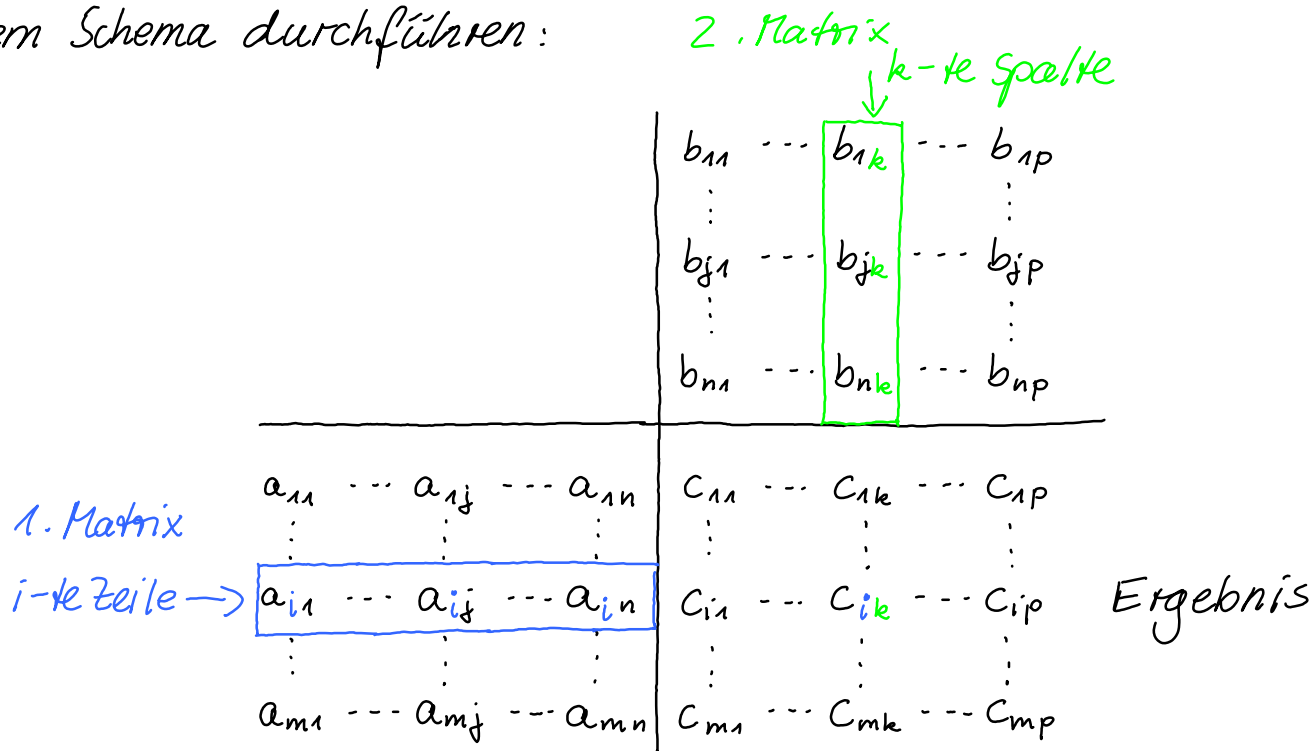
diejenige Matrix, deren Element c_{ik} in der i -ten Zeile und k -ten Spalte das sogenannte innere Produkt (Skalarprodukt) der i -ten Zeile von A mit der k -ten Spalte von B ist, d.h.

$$\begin{aligned} c_{ik} &= a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{ij} b_{jk} + \dots + a_{in} b_{nk} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \end{aligned}$$

Um c_{ik} zu erhalten, muss jede Komponente a_{ij} in der i -ten Zeile von A mit der entsprechenden Komponente b_{jk} in der k -ten Spalte von B multipliziert werden; diese Produkte müssen dann addiert werden.

Achtung! Bei der Multiplikation von Matrizen muss die Anzahl der Spalten der 1. Matrix mit der Anzahl der Zeilen der 2. Matrix übereinstimmen! Sonst ist die Multiplikation nicht definiert.

Die Multiplikation $A \cdot B$ zweier Matrizen lässt sich einfacher in einem Schema durchführen:



Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + (-5) \cdot 5 & 0 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + (-5) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 45 \\ -31 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot 3 + 6 \cdot 0 & (-2) \cdot 4 + 6 \cdot 2 & (-2) \cdot (-1) + 6 \cdot (-5) \\ (-3) \cdot 3 + 7 \cdot 0 & (-3) \cdot 4 + 7 \cdot 2 & (-3) \cdot (-1) + 7 \cdot (-5) \\ 5 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -28 \\ -9 & 2 & -32 \\ 15 & 22 & -10 \end{pmatrix}$$

Achtung! Wie das Beispiel zeigt, sind $A \cdot B$ und $B \cdot A$ (wenn überhaupt definiert) im Allgemeinen verschieden!

Die Multiplikation von Matrizen ist nicht kommutativ!

Im Folgenden wollen wir weitere allgemeingültige Rechenregeln für Matrizen zusammenstellen. Dabei ist jeweils zu beachten, dass die Ordnungen der Matrizen so gewählt werden, dass die angegebenen Rechenoperationen definiert sind, d.h. bei der Addition müssen Zeilen- und Spaltenzahl beider Matrizen übereinstimmen, bei der Multiplikation muss die Spaltenzahl der 1. Matrix mit der Zeilenzahl der 2. Matrix übereinstimmen.

Weitere Rechenregeln für Matrizen

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Dann gilt:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Dann gilt:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{linksseitiges Distributivgesetz})$$

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Dann gilt:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad (\text{rechtsseitiges Distributivgesetz})$$

Beispiel: Ein Unternehmen benötigt für die Herstellung dreier Güter G_1, G_2, G_3 vier verschiedene Rohstoffe R_1, R_2, R_3, R_4 . Bezeichnen wir mit τ_{ik} die Menge an Einheiten des Rohstoffes R_i , der zur Herstellung von G_k benötigt wird, so sei die Matrix $R = (\tau_{ik})_{4 \times 3}$ gegeben durch:

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Die Planung für die nächsten beiden Zeitperioden sei gegeben durch die Produktionsmatrix $P = (p_{ik})_{3 \times 2}$, wobei p_{ik} die zu produzierende Menge in der k -ten Zeitperiode bezeichnet.

$$P = \begin{pmatrix} 27 & 21 \\ 15 & 24 \\ 23 & 19 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Bedarfsmatrix $B = (b_{ik})_{5 \times 2}$, wobei b_{ik} den Bedarf an Einheiten des Rohstoffes R_i in der k -ten Planungsperiode bezeichnet.

$$B = R \cdot P = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & 21 \\ 15 & 24 \\ 23 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 407 & 358 \\ 229 & 242 \\ 463 & 452 \\ 376 & 437 \end{pmatrix}$$

Weiter nehmen wir an, dass die Preise \tilde{p}_k für die Rohmaterialien durch die (1×4) -Matrix (Zeilenvektor)

$$\tilde{P} = (20, 15, 10, 25)$$

gegeben ist und berechnen die Kosten, die in den beiden Planungsperioden für die Rohstoffe anfallen durch

$$K = \tilde{P} \cdot B = (20, 15, 10, 25) \cdot \begin{pmatrix} 407 & 358 \\ 229 & 242 \\ 463 & 452 \\ 376 & 437 \end{pmatrix} = (25605, 26235)$$

In der 1. Planungsperiode fallen somit 25605, in der 2. Planungsperiode 26235 Geldeinheiten für die Rohstoffe an.

Insgesamt haben wir zur Ermittlung der Kosten $K = \tilde{P} \cdot (R \cdot P)$ berechnet. Wegen der Gültigkeit des Assoziativgesetzes hätten wir auch $K = (\tilde{P} \cdot R) \cdot P$ rechnen können.

Im Zusammenhang mit der Multiplikation wollen wir zeigen, was unter der Potenz A^n , $n \in \mathbb{N}$, einer Matrix zu verstehen ist. In Analogie zu Potenzen von reellen Zahlen ist $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m\text{-mal}}$. Da das Produkt zweier Matrizen nur definiert ist, wenn die Spaltenzahl der 1. Matrix mit der Zeilenzahl der 2. Matrix übereinstimmt, ist $A^2 = A \cdot A$ nur definiert, wenn A eine quadratische Matrix ist (Spaltenzahl von $A =$ Zeilenzahl von A).

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist die m -te Potenz von A definiert durch $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m\text{-mal}}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

Auch wenn die Definition für Potenzen einfach und naheliegend ist, muss man aufpassen, dass man keine Fehler macht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 31 \\ 45 & 36 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^2 = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -15 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -15 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 & 85 \\ 255 & 156 \end{pmatrix}$$

Es ist also $A^2 \cdot B^2 \neq (A \cdot B)^2$!

Dies liegt daran, dass für die Multiplikation von Matrizen das

Kommutativgesetz nicht gilt: $(A \cdot B)^2 = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = A \cdot \underbrace{B \cdot A} \cdot B$

dürfen nicht vertauscht werden

Aus dem Umgang mit reellen Zahlen wissen wir, dass die Zahl 1 bei der Multiplikation eine besondere Rolle spielt: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$. Wir zeigen nun, welche Matrizen diese Rolle bei der Multiplikation von Matrizen übernimmt.

Definition: Die **Einheitsmatrix** der Ordnung n ist diejenige $(n \times n)$ -Matrix E_n (oder auch einfach E , in manchen Büchern auch I_n bzw. I), deren Elemente e_{ii} , $i=1, 2, \dots, n$, auf der Hauptdiagonalen 1 sind und deren sonstige Elemente alle 0 sind, d.h.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass E die Rolle des Einselementes bei der Multiplikation von Matrizen übernimmt, wobei die Dimensionen zu beachten sind.

Regel: Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so gilt:

$$A \cdot E_n = E_m \cdot A = A$$

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Aus dem Umgang mit reellen Zahlen wissen wir auch, dass es zu jedem $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein inverses Element, nämlich $\frac{1}{\alpha}$ gibt, d.h. $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$. Diese Zusammenhänge sind beim Umgang mit Matrizen deutlich komplizierter und werden an späterer Stelle behandelt (vgl. Inverse Matrizen).

Das folgende Beispiel zeigt, dass auch die Regel im Bereich der reellen Zahlen, wonach ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der Faktoren 0 ist, nicht übertragen werden kann.

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zum Schluss des Kapitels wenden wir uns noch einer weiteren Matrixoperation, dem Transponieren einer Matrix zu. Dazu betrachten wir noch einmal das Beispiel auf S. 11.

Beispiel: Im Beispiel 5.11 hatten wir diejenige Matrix R angegeben, in der die Elemente die Mengen an Einheiten des Rohstoffes $R_i, i=1, \dots, 4$, die zur Herstellung des Gutes $G_k, k=1, 2, 3$, nötig sind, angeben.

$$R = \begin{array}{ccc|c} & G_1 & G_2 & G_3 & \\ \hline & 10 & 3 & 4 & R_1 \\ & 4 & 5 & 2 & R_2 \\ & 9 & 7 & 5 & R_3 \\ & 1 & 11 & 8 & R_4 \end{array}$$

Die gleichen Informationen lassen sich auch an der Matrix R^T ablesen, in der die Zeilen als Spalten aufgeschrieben werden:

$$R^T = \begin{array}{ccc|c} & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & \\ \hline & 10 & 4 & 9 & 1 & G_1 \\ & 3 & 5 & 7 & 11 & G_2 \\ & 4 & 2 & 5 & 8 & G_3 \end{array}$$

Definition: Sei $A = (a_{ik})_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die **Transponierte** $A^T = (a_{ik}^T)_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist diejenige Matrix, in der die Zeilen von A nacheinander als Spalten aufgeschrieben werden, d.h.

$$a_{ik}^T = a_{ki} \text{ für alle } i=1, \dots, n; k=1, \dots, m.$$

Für das Transponieren von Matrizen gelten wieder einige Regeln, wovon nur die letzte nicht offensichtlich ist.

Regeln für das Transponieren von Matrizen

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$$

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Dann gilt:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Wir schauen uns die letzte Regel an einem Beispiel an.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ -4 & 3 & -7 \\ 10 & -14 & 11 \end{pmatrix}; \quad (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -14 \\ 8 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -14 \\ 8 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 13 \\ 3 & 1 & -1 \\ 14 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Eine besondere Rolle spielen Matrizen, die mit ihrer Transponierten übereinstimmen.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A heißt **symmetrisch**, wenn gilt $A = A^T$,
d.h. wenn $a_{ik} = a_{ki}$ für alle $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Beispiel: Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix} \text{ sind symmetrisch.}$$

Beispiel: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige $(m \times n)$ -Matrix. Wir zeigen, dass a) $A \cdot A^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und b) $A^T \cdot A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stets symmetrisch sind.

zu a) Wir müssen zeigen, dass $A \cdot A^T = (A \cdot A^T)^T$.

Mit den Rechenregeln für das Transponieren von Matrizen gilt:

$$(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T,$$

also ist $A \cdot A^T$ symmetrisch.

zu b) Wir müssen zeigen, dass

Mit den Rechenregeln für das Transponieren von Matrizen gilt:

$$\text{, also } A^T \cdot A \text{ symmetrisch.}$$

Selber versuchen! ▽

Matrizen mit weiteren speziellen Eigenschaften werden später behandelt.

3. Vektoren

Im letzten Kapitel hatten wir bereits bei Matrizen mit nur einer Zeile bzw. bei Matrizen mit nur einer Spalte in Klammern die Begriffe Zeilenvektor bzw. Spaltenvektor verwendet. Beide werden wir auch als Vektoren bezeichnen. Wir bezeichnen Vektoren in der Regel mit kleinen Buchstaben mit einem Pfeil darüber.

Für einen Spaltenvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Der zugehörige transponierte Vektor ist dann der Zeilenvektor $\vec{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Die Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n heißen Komponenten oder auch Koordinaten des Vektors. Insbesondere Vektoren des \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 haben recht anschauliche geometrische Interpretationen, mit denen wir uns im Anschluss an die Rechenoperationen beschäftigen wollen.

Rechenoperationen für Vektoren

Da wir hier Vektoren als spezielle Typen von Matrizen behandeln, gelten die für Matrizen angegebenen Rechenoperationen auch für Vektoren. Zur Übersicht fassen wir dies für die spezielle Situation noch einmal zusammen.

a) Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sind gleich, wenn sie in ihren jeweiligen Komponenten übereinstimmen, d.h. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_i = b_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

b) Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ werden addiert (subtrahiert), indem die jeweiligen Komponenten addiert (subtrahiert) werden, d.h.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

c) Ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ wird mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem jede Komponente mit α multipliziert wird.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

Beispiel: Ein Unternehmen verkauft 5 verschiedene Güter. Die Preise in Euro sind in dem Preisvektor $\vec{p}^T = (7.00, 3.00, 9.00, 4.00, 2.00)$ gegeben, wobei $p_i, i=1, 2, \dots, 5$, den Preis für das i -te Gut bezeichnet. Es wird nun folgende Preiserhöhung beschlossen. Bei allen Gütern mit einem Preis bis zu 5 € werden die Preise um jeweils 0.30 € erhöht, bei denen ab 5 € um 0.50 €. Weiter werden auf den ursprünglichen Preis noch 5% aufgeschlagen. Der Preisvektor mit den neuen Preisen berechnet sich somit zu:

$$\left(1 + \frac{5}{100}\right) \begin{pmatrix} 7.00 \\ 3.00 \\ 9.00 \\ 4.00 \\ 2.00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.30 \\ 0.50 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.35 \\ 3.15 \\ 9.45 \\ 4.20 \\ 2.10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.30 \\ 0.50 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.85 \\ 3.45 \\ 9.95 \\ 4.50 \\ 2.40 \end{pmatrix}$$

Das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren

Bei der Übertragung der Rechenoperation zweier Matrizen erinnern wir uns zunächst daran, dass das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen nur definiert ist, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.

Ist A nun speziell eine $(1 \times n)$ -Matrix (d.h. ein Zeilenvektor), so können wir mit einer $(n \times 1)$ -Matrix (d.h. einem Spaltenvektor) und auch umgekehrt multiplizieren, d.h.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \dots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \dots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \dots & b_n a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bzw.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}.$$

Im Zusammenhang mit Vektoren führt das zweite Produkt auf die Definition des inneren Produktes bzw. Skalarproduktes zweier Vektoren.

Definition: Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren. Dann ist das innere Produkt (Skalarprodukt) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ definiert durch

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Achtung! Das innere Produkt zweier Vektoren ist kein Vektor, sondern eine reelle Zahl!

Beispiel: Der Preisvektor $\vec{p}^T = (3.20, 2.90, 4.10, 3.50, 5.20)$ gebe die Preise in € pro kilo für verschiedene Obstsorten an. In dem Warenvektor $\vec{x}^T = (0.5, 1.5, 2.2, 0.7, 3.5)$ sind die gekauften Mengen in kg angegeben. Das innere Produkt $\langle \vec{p}, \vec{x} \rangle$ gibt somit den für die Waren insgesamt zu zahlenden Preis an:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, \vec{x} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 3.20 \\ 2.90 \\ 4.10 \\ 3.50 \\ 5.20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2.2 \\ 0.7 \\ 3.5 \end{pmatrix} \right\rangle = 3.20 \cdot 0.5 + 2.90 \cdot 1.5 + 4.10 \cdot 2.2 + 3.50 \cdot 0.7 + 5.20 \cdot 3.5 \\ &= 35.62 \end{aligned}$$

Rechenregeln für das innere Produkt

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ derjenige Vektor, dessen Komponenten alle Null sind. Dann gilt:

a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

b) $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$

c) $\langle \alpha \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \alpha \vec{b} \rangle = \alpha \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

d) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$

Begründung

zu a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n b_i a_i = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

zu b) $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i (b_i + c_i) = \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i c_i = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$

zu c) $\langle \alpha \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i) b_i = \sum_{i=1}^n \alpha a_i b_i = \alpha \sum_{i=1}^n a_i b_i = \alpha \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
 $= \langle \vec{a}, \alpha \vec{b} \rangle$

$$\text{zu d) } \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0 \Leftrightarrow a_i \neq 0 \text{ f\u00fcr mindestens ein } i$$

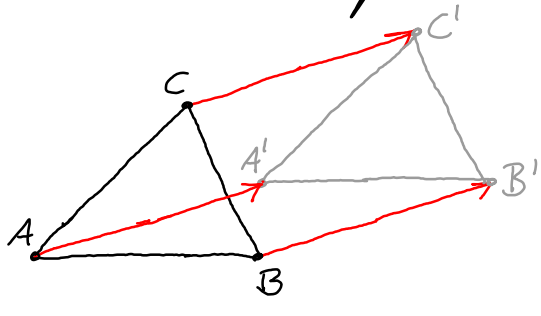
$$\Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$$

Geometrische Interpretation von Vektoren

Im Folgenden wollen wir uns zun\u00e4chst mit der geometrischen Interpretation von Vektoren befassen. Dazu beachten wir zun\u00e4chst, dass die Angabe bestimmter Gr\u00f6\u00dfen wie Kraft und Geschwindigkeit nicht nur die Angabe einer skalaren Gr\u00f6\u00dfe (Zahl) erfordern, sondern auch die Angabe einer Richtung. Anschaulich entspricht dies einem Pfeil mit einer bestimmten L\u00e4nge und einer bestimmten Richtung.

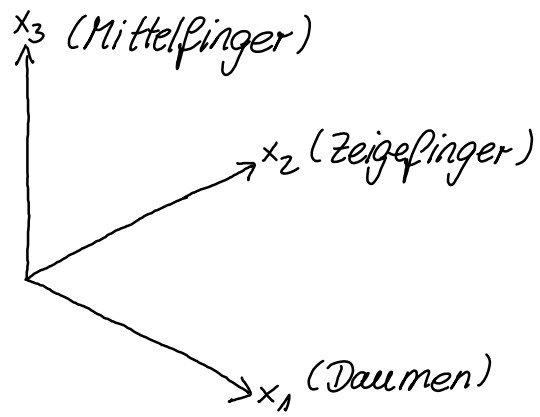
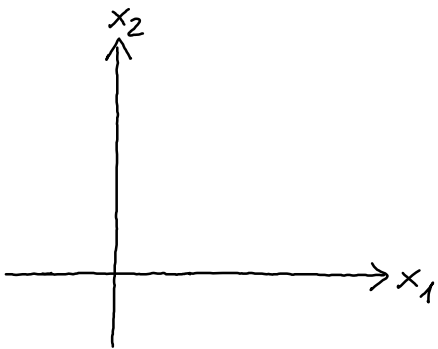
Alle Pfeile mit gleicher L\u00e4nge und gleicher Richtung werden zu einem Vektor zusammengefasst. Jeder Pfeil eines Vektors hei\u00dft Repr\u00e4sentant des Vektors. "Wenn man einen kennt, dann kennt man alle"!

Anschaulich entsprechen Vektoren z.B. Verschiebungen.



Die Punkte A, B, C hei\u00dfen Angriffspunkte, die Punkte A', B', C' hei\u00dfen Zielpunkte des Vektors

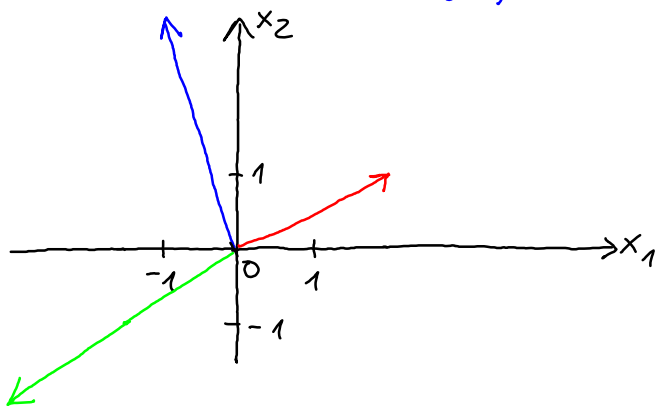
Vektoren lassen sich mit Hilfe rechtwinkliger Koordinatensysteme veranschaulichen. Im \mathbb{R}^2 verwendet man das Koordinatensystem mit Achsen x_1, x_2 , die senkrecht aufeinander stehen. Im \mathbb{R}^3 benutzt man sogenannte rechtsh\u00e4ndige Systeme, d.h. die jeweils senkrecht aufeinander stehenden Koordinatenachsen x_1, x_2, x_3 werden in der gleichen Reihenfolge gew\u00e4hlt, wie Daumen, Zeige-, Mittelfinger der rechten Hand.



Pfeile mit Angriffspunkt im Nullpunkt heißen Ortsvektoren. Dadurch wird ein bestimmter Repräsentant eines Vektors festgelegt. Die Festlegung eines Vektors geschieht daher durch die Angabe der Koordinaten des Zielpunktes des Ortsvektors.

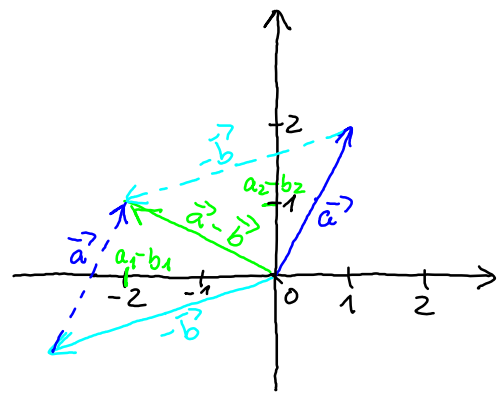
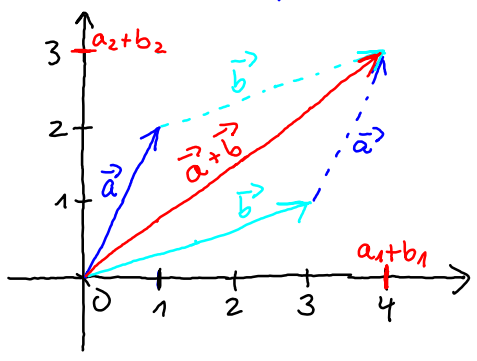
Beispiel: Zeichnen der Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Wir können nun die Addition und Subtraktion von Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar geometrisch veranschaulichen.

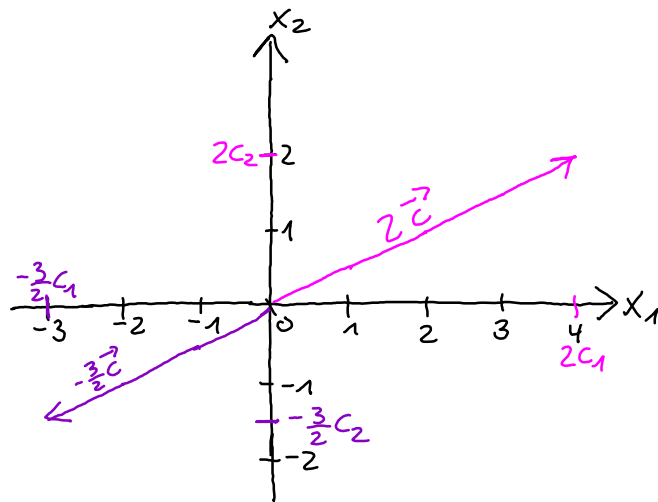
Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{3}{2} \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$



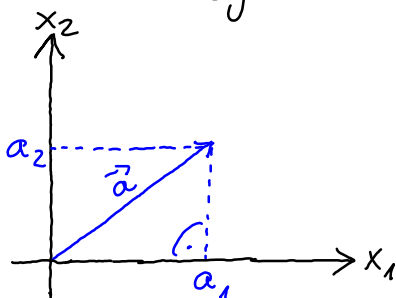
Ist $\alpha > 0$, so ist $\alpha \cdot \vec{a}$ der Vektor mit *derselben Richtung* wie \vec{a} , dessen Länge das α -*fache der Länge* von \vec{a} beträgt. Ist $\alpha < 0$, so ist $\alpha \cdot \vec{a}$ der Vektor mit *entgegengesetzter Richtung* wie \vec{a} , dessen Länge das $(-\alpha)$ -*fache der Länge* von \vec{a} beträgt.

Die bisherigen geometrischen Interpretationen für die Rechenoperationen lassen sich (dann allerdings nicht mehr anschaulich) für Vektoren im \mathbb{R}^n verallgemeinern. Dies führt im Ergebnis auf die bereits zu Beginn des Kapitels angegebenen Definitionen.

Im Folgenden werden wir uns mit der Länge (Betrag, Norm) eines Vektors und dem Begriff der Orthogonalität beschäftigen. Dazu erläutern wir den Sachverhalt zunächst im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 und verallgemeinern dann die Begriffe auf den \mathbb{R}^n .

Betrag (Länge, Norm) eines Vektors

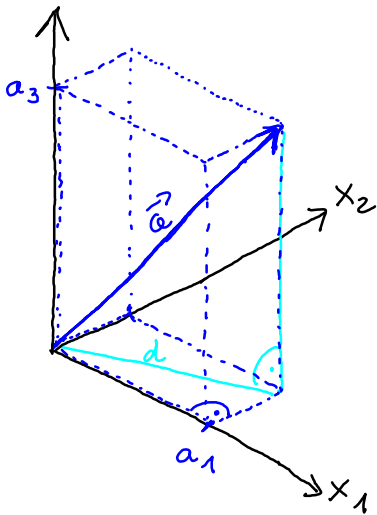
Unter dem Betrag (der Länge, der Norm) $\|\vec{a}\|$ eines Vektors \vec{a} versteht man den Abstand des Zielpunktes des Ortsvektors zum Ursprung des Koordinatensystems.



Im \mathbb{R}^2

Nach dem Satz von Pythagoras gilt:

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2, \text{ also } \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



Im \mathbb{R}^3

Nach dem Satz von Pythagoras gilt zunächst für die Diagonale d des Rechtecks in der $x_1 x_2$ -Ebene: $d^2 = a_1^2 + a_2^2$

Ebenfalls nach Pythagoras gilt für das rechtwinklige Dreieck :

$$\|\vec{a}\|^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \text{ also}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel: Der Betrag von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist $\|\vec{a}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Der Betrag von $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist $\|\vec{b}\| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$.

Die anschauliche Herleitung und Interpretation wird nun folgendermaßen verallgemeinert.

Definition: Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist der Betrag (die Länge, die Norm) von \vec{a} definiert durch

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^2 \right\}^{1/2}$$

Der Betrag eines Vektors steht mit dem inneren Produkt eines Vektors in folgender Beziehung:

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 = \|\vec{a}\|^2$$

Weiter gelten für den Betrag eines Vektors Gesetze, die völlig analog zu denen für den Betrag einer reellen Zahl sind.

Rechengesetze für den Betrag eines Vektors

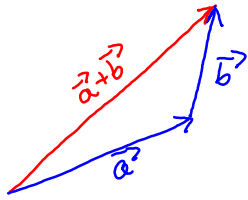
Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

a) $\|\vec{a}\| \geq 0$ und $(\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0})$ (Positivität)

b) $\|\alpha \vec{a}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{a}\|$ (Homogenität)

c) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (Dreiecksungleichung)

Während a) und b) direkt aus der Definition folgen, machen wir uns c) anschaulich im \mathbb{R}^2 klar.



Anschaulich ist klar, dass die Länge des Summenvektors $\vec{a} + \vec{b}$ höchstens gleich der Summe der Längen der Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist. Anschaulich ist auch klar, dass das Gleichheitszeichen in c) genau dann angenommen wird, wenn \vec{a} und \vec{b} die gleiche Richtung haben, d.h. wenn $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$ ist für $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Eine besondere Bezeichnung erhalten Vektoren, deren Betrag gleich 1 ist. Sie heißen Einheitsvektoren.

Ist $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, so erhält man den Einheitsvektor \vec{a}^0 in Richtung durch: $\vec{a}^0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$

Denn: \vec{a}^0 hat die Richtung von \vec{a} , da $\frac{1}{\|\vec{a}\|} > 0$ gilt.

Für den Betrag von \vec{a}^0 gilt:

$$\|\vec{a}^0\| = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} a_i^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \|\vec{a}\| = 1$$

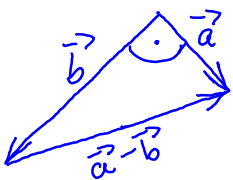
Beispiel: Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es gilt: $\|\vec{a}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Also ist $\vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Einheitsvektor in Richtung von \vec{a} .

Sei $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dann ist $\|\vec{b}\| = \sqrt{16+4+1+9} = \sqrt{30}$; $\vec{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist die Orthogonalität von Vektoren.

Wir überlegen zunächst wieder im Anschauungsraum, wie sich die Orthogonalität zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} charakterisieren lässt.



Nach dem Satz von Pythagoras ist der von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel genau dann ein rechter Winkel, wenn gilt $\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$.

Da $\|\vec{a}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$, $\|\vec{b}\|^2 = \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$, $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$, ist dies äquivalent zu $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$, also äquivalent zu $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

Wenn zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} einen rechten Winkel einschließen, nennt man sie orthogonal. Dies wird für Vektoren in \mathbb{R}^n allgemein nun so formuliert.

Definition: Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. \vec{a} und \vec{b} heißen orthogonal, wenn ihr inneres Produkt den Wert 0 hat, d.h.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Beispiel: Welche der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal?

Wir berechnen die inneren Produkte

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1, \quad \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

$$\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Also gilt: $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$; \vec{a} und \vec{b} sind nicht orthogonal.

Beispiel: Wir betrachten die speziellen Einheitsvektoren

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^2 . Die beiden Einheitsvektoren zeigen in Richtung der beiden Koordinatenachsen und es gilt:

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0, \text{ d.h. } \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2.$$

Entsprechend zeigen im \mathbb{R}^3 die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Richtung der Koordinatenachsen.

Da $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle = 0$, falls $i \neq k$, gilt: $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$.

Lineare Unabhängigkeit, Dimension und Basis

Im Folgenden werden wir uns mit einigen sehr zentralen Begriffen der Linearen Algebra befassen. Wir werden dabei so vorgehen, dass wir die Sachverhalte zunächst (anschaulich) im \mathbb{R}^2 erläutern, um dann entsprechende Verallgemeinerungen im \mathbb{R}^n anzugeben.

Nach Einführung der Rechenoperationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar zu Beginn dieses Kapitels können wir nun zu

m Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ und m reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m$$

bilden. Einen solchen Ausdruck nennt man Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$.

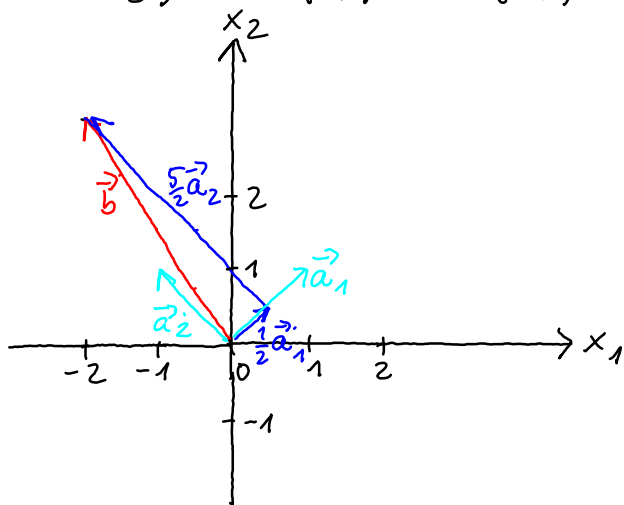
Gibt es für einen Vektor \vec{b} reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, so dass

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i$$

gilt, so heißt \vec{b} aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ linear kombinierbar. Man sagt auch, \vec{b} lässt sich als Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ darstellen.

Beispiel: Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellen, denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Beispiel: Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist keine Linearkombination von $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

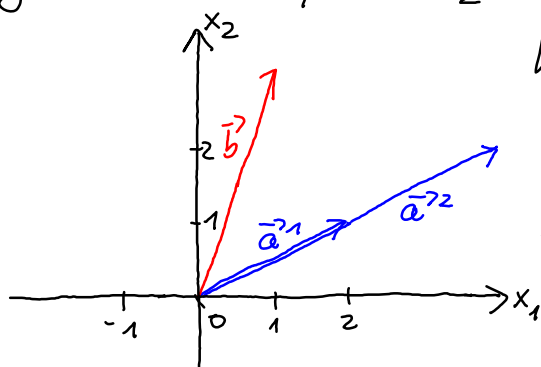
Egal wie man \vec{a}_1 und \vec{a}_2 linear kombiniert, es kommt immer ein

Vielfaches von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ heraus, da wegen $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = (\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot \vec{a}_1$$

Da \vec{b} aber kein skalares Vielfaches von \vec{a}_1 ist,

ist \vec{b} nicht als Linearkombination von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 darstellbar.



Beispiel: Der Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist sowohl Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, als auch der Vektoren $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

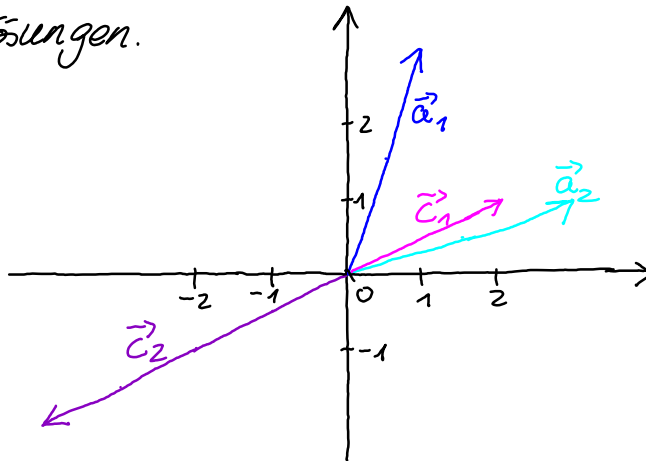
Bei den beiden Fällen besteht jedoch ein wesentlicher, grundsätzlicher Unterschied.

$$1) \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Es gibt nur eine Lösung, nämlich $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; die sogenannte triviale Lösung.

$$2) \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2$$

Es gibt unendlich viele Lösungen; neben der trivialen Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sind auch alle Kombinationen von α_1 und α_2 , für die $\alpha_1 = 2\alpha_2$ ist, Lösungen.



Die Überlegungen in den letzten Beispielen führen auf einen wichtigen Begriff in der linearen Algebra, nämlich der linearen Unabhängigkeit, den wir zunächst für Vektoren im \mathbb{R}^2 angeben wollen.

Definition: m Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i$ nur die triviale Lösung, d.h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ besitzt.

Gibt es außer der trivialen Lösung noch weitere Lösungen, so heißen sie linear abhängig.

Offenbar ist die Eigenschaft der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren im \mathbb{R}^2 verknüpft mit der Lage der Vektoren zueinander. Wir untersuchen dies nun genauer.

Zunächst halten wir folgendes fest: Ist einer der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ der Nullvektor, d.h. $\vec{a}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$, dann sind die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ linear abhängig, da für jede Wahl von $\alpha_i \neq 0$ und alle $\alpha_j = 0$ mit $j \neq i$ stets $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_i \vec{a}_i$ gilt, d.h. die Gleichung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i$ besitzt eine nichttriviale Lösung.

Im Folgenden betrachten wir nur noch den Fall $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

$m=1$: Zu untersuchen ist die Gleichung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$.

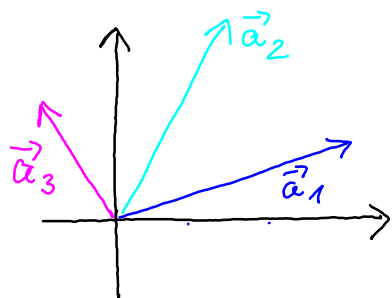
Für $\vec{a}_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist dies nur lösbar für $\alpha_1 = 0$, d.h. ein Vektor, der ungleich dem Nullvektor ist, ist stets linear unabhängig.

$m=2$: Zu untersuchen ist die Gleichung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

Hat die Gleichung eine nichttriviale Lösung, so muss $\alpha_1 \neq 0$ und $\alpha_2 \neq 0$ gelten. Die Gleichung ist dann äquivalent zu $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{a}_2$, d.h. \vec{a}_1 ist ein skalares Vielfaches von \vec{a}_2 .

Die beiden Vektoren haben also dieselbe oder entgegengesetzte Richtung, sie sind linear abhängig. Die zugehörigen Ortsvektoren liegen auf einer Geraden durch den Ursprung.

$m=3$: Liegen bereits zwei Ortsvektoren auf einer Geraden, so brauchen wir nichts weiter zu untersuchen, es liegt lineare Abhängigkeit vor. Was passiert, wenn dies nicht der Fall ist, machen wir uns mit einer Skizze klar.



$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

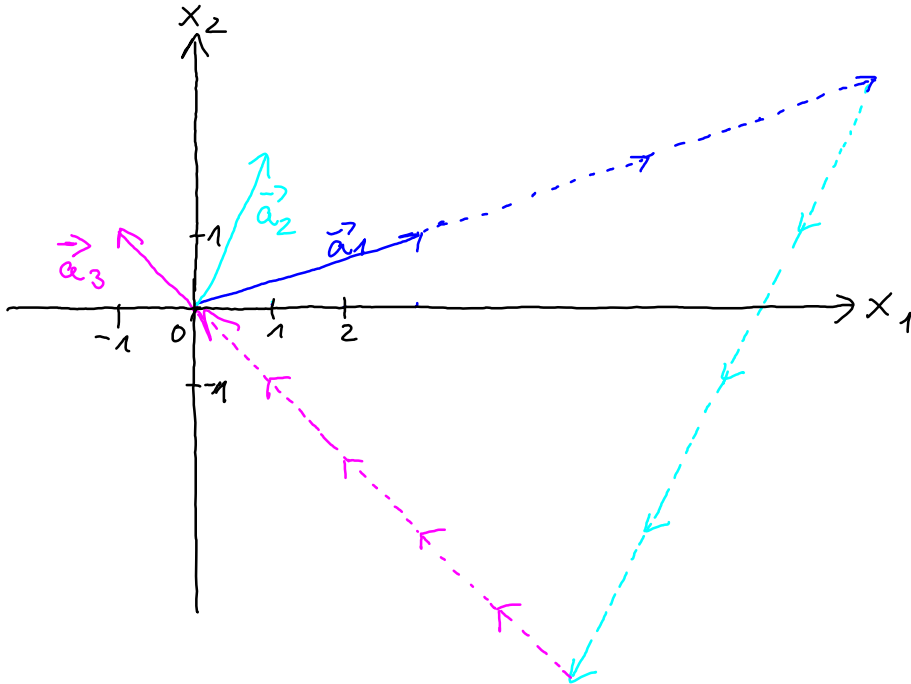
Die Gleichung $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$ ist äquivalent zu dem linearen

Gleichungssystem: $3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

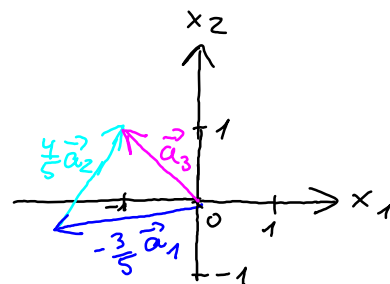
mit der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{3}{5}t, -\frac{4}{5}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$

Wählen wir z.B. $t = 5$, d.h. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, -4, 5)$, so ergibt sich die in der Skizze dargestellte Situation.



Insgesamt gilt, dass je drei Vektoren des \mathbb{R}^2 immer linear abhängig sind. Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren im \mathbb{R}^2 ist also 2.

Wenn wir uns das oben stehende Beispiel noch ein mal anschauen, sehen wir auch, dass sich z.B. der Vektor \vec{a}_3 (aber auch jeder andere Vektor des \mathbb{R}^2) als Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 schreiben lässt: $\vec{a}_3 = -\frac{3}{5}\vec{a}_1 + \frac{4}{5}\vec{a}_2$



Die oben angestellten Betrachtungen geben für den \mathbb{R}^2 (d.h. geometrisch die Ebene) Anlass zu folgenden Begriffsbildungen.

Im Hinblick auf anschließende Verallgemeinerungen für den \mathbb{R}^2 sind die folgenden Formulierungen "etwas komplizierter", als dies für den \mathbb{R}^2 nötig wäre.

Definition: Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in der Ebene, d.h. 2, heißt Dimension der Ebene.

Je zwei linear unabhängige Vektoren der Ebene bilden eine Basis des \mathbb{R}^2 . (Zwei linear unabhängige Vektoren spannen die Ebene auf.)

Für k linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^2$ heißt die Menge $U = \{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$ k -dimensionaler Teilraum (Unterraum) von \mathbb{R}^2 . (Im \mathbb{R}^2 sind nur $k=1$ oder $k=2$ sinnvoll).

Beispiel: Wir betrachten noch einmal die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wegen $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ gilt, dass die sogenannten kartesischen Basisvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 linear unabhängig sind und eine Basis des \mathbb{R}^2 bilden. Jeder beliebige Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich sehr einfach als Linearkombination von \vec{e}_1, \vec{e}_2 darstellen:

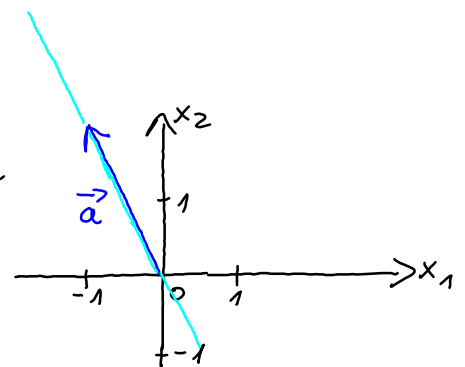
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\vec{e}_1 und \vec{e}_2 bilden eine Basis des \mathbb{R}^2 .

Beispiel: Wir überlegen, was ein 1-dimensionaler Teilraum des \mathbb{R}^2 geometrisch darstellt. Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten

$$U = \{ \alpha \cdot \vec{a} : \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

Durch den Ortsvektor \vec{a} ist zunächst eine bestimmte Richtung vorgegeben. Durch den Faktor α kann die Länge beliebig verändert und bei negativem α die Richtung umgekehrt werden.



Geometrisch entsprechen 1-dimensionale Teilräume somit Geraden durch den Ursprung. Sie ist durch den Ursprung und den Zielpunkt des Ortsvektors \vec{a} eindeutig festgelegt.

Wir werden nun die für den \mathbb{R}^2 hergeleiteten Begriffe und Zusammenhänge auf den \mathbb{R}^n verallgemeinern. Dabei lassen sich leider nur die Spezialfälle $n=2$ bzw. $n=3$ geometrisch veranschaulichen.

Zunächst lässt sich der Begriff der Linearkombination in analoger Formulierung angeben.

Definition: Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Jeder Ausdruck der Form $\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m$ heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$.

Gibt es für einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, so dass $\vec{b} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i$, so heißt \vec{b} aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ linear kombinierbar.

Beispiel: Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist aus den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear kombinierbar, da

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist aus den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nicht linear kombinierbar, was man folgendermaßen einsieht.

Schreibt man die Gleichung $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_4 \vec{a}_4 = \vec{b}$ komponentenweise auf, so ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_2 - \alpha_4 = 1$$

$$2\alpha_1 + 2\alpha_4 = 1$$

Gauß-Algorithmus

1	1	0	1	(−2)
0	1	−1	1	
2	0	2	1	
1	−1	1	1	(2)
−2	2	−1	−1	
0	1			

Aus der letzten Zeile des Gauß-Schemas sieht man, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

\vec{b} ist also nicht Linearkombination der Vektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 und \vec{a}_4 .

Beispiel: Der Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Linearkombination der Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ denn}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = t, \alpha_2 = -t, \alpha_3 = t, \\ t \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar}$$

Betrachten wir nun $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ergibt sich

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$$

Im Gegensatz zu vorher gibt es hier nur die triviale Lösung.

Wir können nun die Begriffe der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit allgemein formulieren.

Definition: m Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$ nur die triviale Lösung, d.h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ besitzt.

Gibt es außer der trivialen Lösung noch weitere Lösungen, so heißen sie linear abhängig.

In dem vorstehenden Beispiel sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig, die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ linear unabhängig. Der Unterschied ist, dass geometrisch betrachtet, die Vektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 eine Ebene aufspannen. In dieser Ebene ist auch der Vektor \vec{a}_3 , durch Linearkombinationen "kommt man nicht aus dieser Ebene heraus". Da \vec{a}_4 nicht in der von \vec{a}_1, \vec{a}_2 aufgespannten Ebene liegt, "kommt man mit Hilfe von \vec{a}_4 aus der Ebene heraus".

Bezüglich der Maximalzahl möglicher linear unabhängiger Vektoren im \mathbb{R}^n kann man nun folgendes Ergebnis formulieren.

Satz: Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren im \mathbb{R}^n ist n .

Weiter übertragen wir die Begriffe Dimension, Basis und Teilraum auf die allgemeine Situation.

Definition: Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren im \mathbb{R}^n , d. h. n , heißt Dimension.

Je n linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^n bilden eine Basis des \mathbb{R}^n .

Für k linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ heißt die Menge

$$U = \{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

k -dimensionaler Teilraum (Unterraum) von \mathbb{R}^n .

Beispiel: Wir betrachten die Vektoren $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$, die dadurch definiert sind, dass ihre i -te Komponente 1, alle anderen 0 sind.

(Im \mathbb{R}^3 sind dies die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Wegen $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ gilt, dass die sogenannten kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ linear unabhängig sind und eine Basis des \mathbb{R}^n bilden. (Im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 zeigen die Vektoren in Richtung der Koordinatenachsen.)

Jeder beliebige Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich in einfacher Weise als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ darstellen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i$$

Beispiel: Wir überlegen, was 1- bzw. 2-dimensionale Teilräume im \mathbb{R}^3 geometrisch darstellen.

Analog zu den Überlegungen im \mathbb{R}^2 sieht man, dass den 1-dimensionalen Teilräumen im \mathbb{R}^3 geometrisch wieder Geraden durch den Ursprung entsprechen.

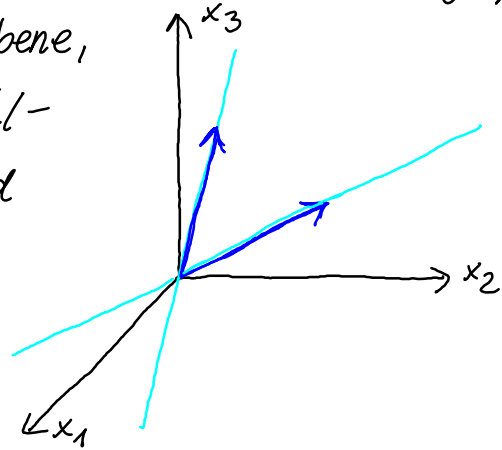
Seien nun $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Wir betrachten

$$U = \{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$$

Wählt man z. B. $\alpha_2 = 0$, so erhält man mit $\alpha_1 \vec{a}_1, \alpha_1 \in \mathbb{R}$, alle Punkte, die auf der Geraden durch den Ursprung liegen, deren Richtung durch \vec{a}_1 vorgegeben ist.

Entsprechendes gilt für die Wahl $\alpha_1 = 0$ für $\alpha_2 \vec{a}_2, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Die beiden Geraden sind wegen der linearen Unabhängigkeit verschieden.

Alle weiteren Wahlen für α_1 und α_2 führen in der Kombination $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$ zu einem Punkt "in der von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 aufgespannten Ebene". Wir erhalten somit eine Ebene, die durch den Ursprung und die Zielpunkte der Ortsvektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 eindeutig festgelegt ist.



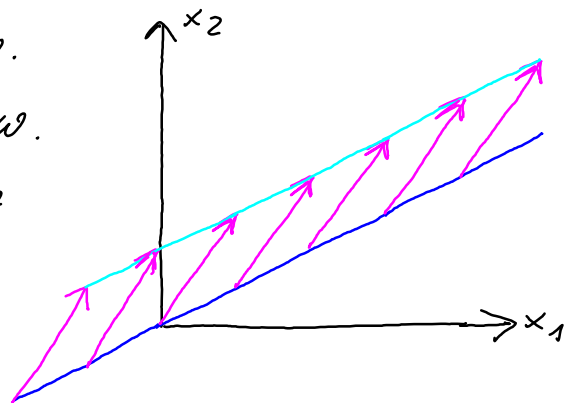
Geraden- und Ebenengleichungen

Zum Schluss dieses Kapitels überlegen wir noch, wie man mit Hilfe von Vektoren auch andere als durch den Ursprung verlaufende Geraden bzw. Ebenen im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 darstellt.

Ein analoges, abstraktes Vorgehen gilt auch allgemein für den \mathbb{R}^n , was aber hier nicht weiter vertieft werden soll.

Nach unseren vorangegangenen Überlegungen wissen wir schon, wie man Geraden bzw. Ebenen, die durch den Ursprung verlaufen, darstellen kann. Wir können nun im Prinzip solche Geraden bzw. Ebenen mit Hilfe eines Vektors verschieben.

Dadurch erhält man Geraden bzw. Ebenen, die zu den ursprünglichen parallel verlaufen.



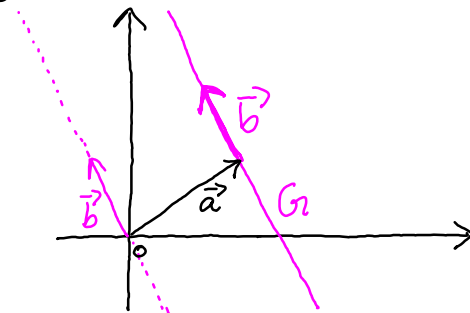
Konkret ergeben sich folgende Situationen.

Parameterdarstellung von Geradengleichungen

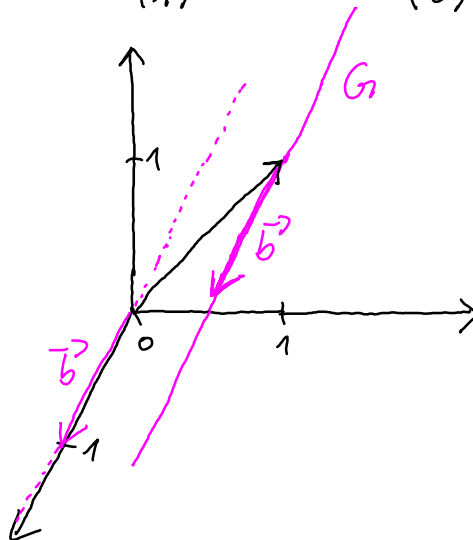
1) Punkt-Richtungsform einer Geradengleichung

Sei G eine Gerade, \vec{a} ein Ortsvektor mit Zielpunkt auf G und \vec{b} ein Vektor, der in Richtung von G zeigt. Dann ist jeder Punkt von G durch $\vec{a} + t \cdot \vec{b}$ mit einem geeigneten Parameter $t \in \mathbb{R}$ darstellbar, d.h. $G: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}, t \in \mathbb{R}$ (genauer $G = \{ \vec{x} : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}, t \in \mathbb{R} \}$) ist Parameterdarstellung der Geraden G .

Durch Addition von \vec{a} werden die Zielpunkte von $t \cdot \vec{b}$ (Gerade durch den Ursprung) "an die richtige Stelle verschoben".

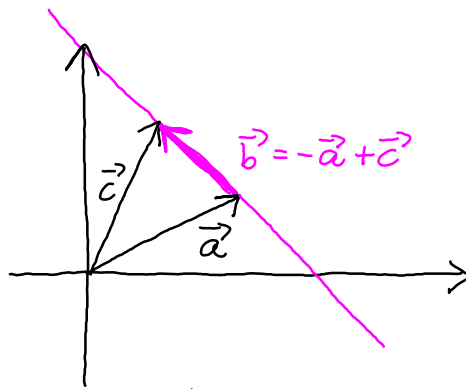


Beispiel: Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $G: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.



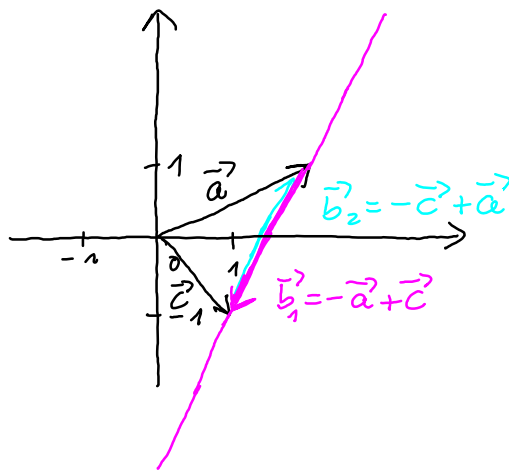
2) Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung

Sei G eine Gerade und \vec{a}, \vec{c} mit $\vec{a} \neq \vec{c}$ Ortsvektoren mit Zielpunkten auf G . Dann ist $\vec{b} = -\vec{a} + \vec{c}$ Richtungsvektor der Geraden und $G: \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{c} - \vec{a}), t \in \mathbb{R}$, Parameterdarstellung der Geraden.



An der Skizze ist bereits erkennbar, dass Parameterdarstellungen von Geraden nicht eindeutig sind.

Beispiel: Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Geraden G , auf der die Zielpunkte von \vec{a} und \vec{c} liegen.



Mögliche Parameterdarstellungen:

$$G: \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$G: \vec{x} = \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Beispiel: Liegt der Punkt $P(1, 2, 10)$ auf der Geraden

$G: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$? Wenn ja, muss ein Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ existieren,

so dass gilt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$,

$$\text{d.h. } \begin{cases} 1 = 1 + t \\ 2 = 4t \\ 10 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1/2 \\ t = 8 \end{cases}$$

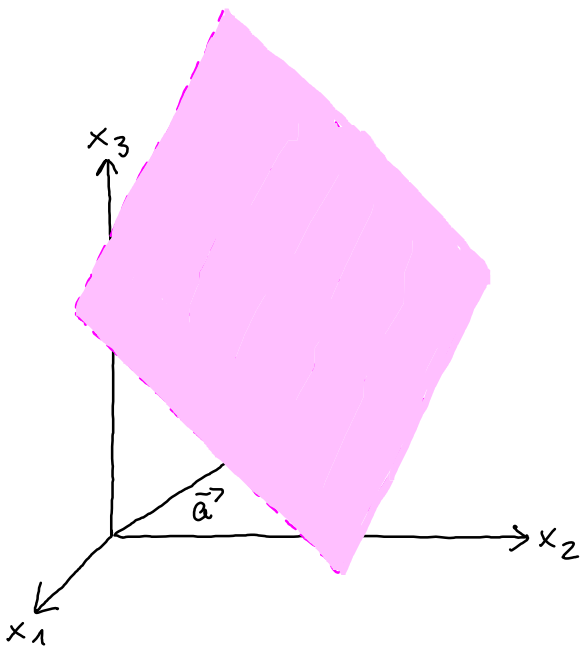
Es gibt also keine Lösung für (*), d.h. P liegt nicht auf G .

Parameterdarstellungen von Ebenengleichungen

1) Punkt-Richtungsform der Ebenengleichung

Wie Ebenen durch den Ursprung (s.o.) durch einen Punkt, nämlich den Ursprung, und 2 linear unabhängige Richtungen festgelegt sind, gilt dies entsprechend auch allgemein.

Sei E eine Ebene, \vec{a} ein Ortsvektor mit Zielpunkt auf der Ebene und \vec{b}_1, \vec{b}_2 zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene.



Dann ist jeder Punkt der Ebene E durch $\vec{a} + t \cdot \vec{b}_1 + s \cdot \vec{b}_2$ mit geeigneten Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ darstellbar, d.h.

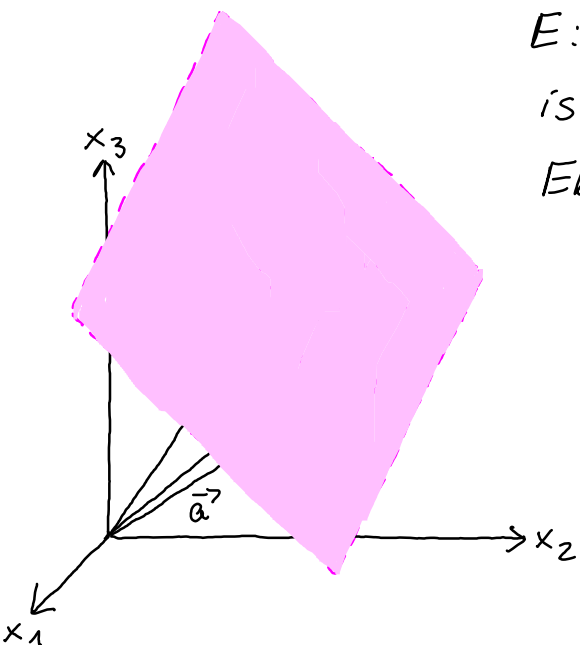
$$E: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}_1 + s \cdot \vec{b}_2, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

$$(\text{genauer } E = \{ \vec{x} : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}_1 + s \cdot \vec{b}_2, s, t \in \mathbb{R} \})$$

ist Parameterdarstellung der Ebene E .

2) Drei-Punkte-Form der Ebenengleichung

So wie Geraden durch zwei verschiedene Punkte, sind Ebenen durch die Angabe von drei verschiedenen Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen dürfen, eindeutig festgelegt. Sind $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ Ortsvektoren mit Zielpunkten auf einer Ebene E , die nicht auf einer Geraden liegen, dann sind $\vec{b}_1 = -\vec{a} + \vec{c}$ und $\vec{b}_2 = -\vec{a} + \vec{d}$ linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene und



$$E: \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{c} - \vec{a}) + s(\vec{d} - \vec{a}), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

ist Parameterdarstellung der Ebene E .

4. Matrizen Teil 2

In diesem Kapitel werden wir uns zunächst damit beschäftigen, wie man lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen und Vektoren darstellt. Das Lösungsverhalten steht in engem Zusammenhang mit Eigenschaften der Koeffizientenmatrix, die wir in diesem Kapitel untersuchen wollen. Dazu befassen wir uns mit dem sogenannten Rang einer Matrix und der Frage nach einer Inversen bezüglich der Multiplikation von Matrizen und zeigen, wie man die Rangbestimmung und im Falle der Existenz die Berechnung von inversen Matrizen mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, den wir im ersten Kapitel bereits kennengelernt haben, bewältigen kann.

Lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine (Koeffizienten-)Matrix, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ der Vektor der rechten Seite und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ der Vektor der Unbekannten.

Wir betrachten $A\vec{x} = \vec{b}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir zunächst

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

d.h. eine Gleichung für zwei Vektoren. Da zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn sie in ihren jeweiligen Komponenten übereinstimmen, ist dies somit äquivalent zu dem im ersten Kapitel behandelten

linearen Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

mit m linearen Gleichungen für die n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n .

Beispiel: Das lineare Gleichungssystem

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 5$$

$$-\frac{1}{3}x_1 + 25x_2 + 3x_3 = 7$$

lautet in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{3} & 25 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der Unbekannten}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der rechten Seite}}$$

Eng verknüpft mit der Antwort auf die Frage nach der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme, die wir (s.o.) nun in der kurzen Form $A\vec{x} = \vec{b}$ angeben, ist der Begriff des Rangs einer Matrix. Um die entsprechenden Begriffe definieren zu können, betrachten wir zunächst folgendes: Zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ betrachten wir die n Spaltenvektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die m Zeilenvektoren

$$\vec{a}^1 = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}), \quad \vec{a}^2 = (a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}), \quad \dots, \quad \vec{a}^m = (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn}),$$

d.h. wir "zerlegen" die Matrix spalten- bzw. zeilenweise.

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Dann gehören zu der Matrix A die Spaltenvektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und die}$$

Zeilenvektoren $\vec{a}^1 = (4 \ 7 \ 3 \ 5), \vec{a}^2 = (1 \ 9 \ 2 \ 0), \vec{a}^3 = (-3 \ 4 \ 7 \ 1)$.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Unter dem Spaltenrang von A versteht man die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von A , d.h. die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren unter den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Entsprechend ist der Zeilenrang von A die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von A , d.h. die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren unter den Zeilenvektoren $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^m$.

Beispiel: Der Zeilen- und Spaltenrang der Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist n , da die Zeilen- und Spaltenvektoren von E_n gerade die kartesischen Basisvektoren sind, die linear unabhängig sind.

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, halten wir zunächst zwei wichtige Ergebnisse fest, die uns die Rangbestimmung wesentlich erleichtern.

Satz: Der Spaltenrang und der Zeilenrang einer Matrix sind stets gleich.

Wegen der Gleichheit braucht man zwischen Spalten- und Zeilenrang nicht zu unterscheiden. Man spricht daher einfach vom Rang einer Matrix A und schreibt kurz Rg(A).

Der Rang einer Matrix ist somit höchstens gleich dem Minimum über die Anzahl der Spalten und die Anzahl der Zeilen.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Rg}(A) \leq 3$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Rg}(B) \leq 2$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 & 3 & 1 & 7 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Rg}(C) \leq 2$

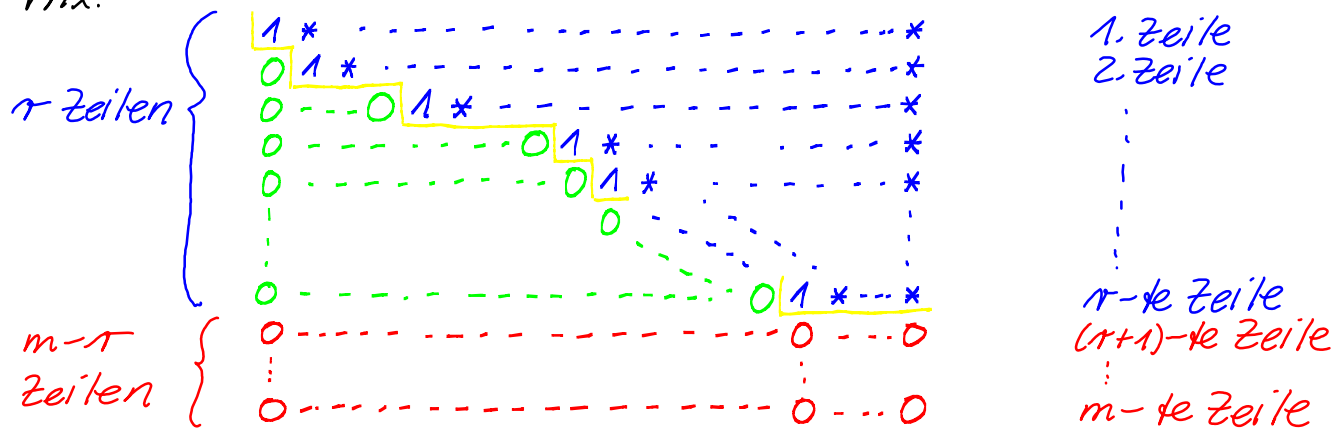
Die Rangbestimmung lässt sich gut mit Hilfe des Gauß-Algorithmus durchführen, da Folgendes gilt.

Satz: Die elementaren Zeilenumformungen, die wir beim Gauß-Algorithmus verwendet haben, ändern den Rang einer Matrix nicht.

Im Einzelnen waren dies:

- Multiplikation einer Zeile mit einem beliebigen Faktor $\lambda \neq 0$
- Vertauschen zweier Zeilen
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Wir wenden also den Gauß-Algorithmus auf die zu betrachtende Matrix an und erhalten somit am Ende eine Matrix in Zeilenstufenform, die denselben Rang besitzt wie die Ausgangsmatrix.



Die gegebenenfalls auftretenden $(m-r)$ Zeilen, die nur Nullen enthalten, tragen zum Rang der Matrix nichts bei. Die ersten r Zeilen

dagegen sind linear unabhängig, d.h. der Rang der Matrix ist 1.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

} (-1)
←
} (-1)
←

Somit gilt $\text{Rg}(A) = 2$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \\ 1 & 3 & \\ 1 & \frac{5}{2} & \\ \hline 1 & 2 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & \frac{1}{2} & \\ \hline 1 & 2 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{array}$$

} (-1) } (-1)
←
} (-1/2)
←

Somit $\text{Rg}(A) = 2$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \end{array}$$

} (-2)
←

Somit $\text{Rg}(A^T) = 2$

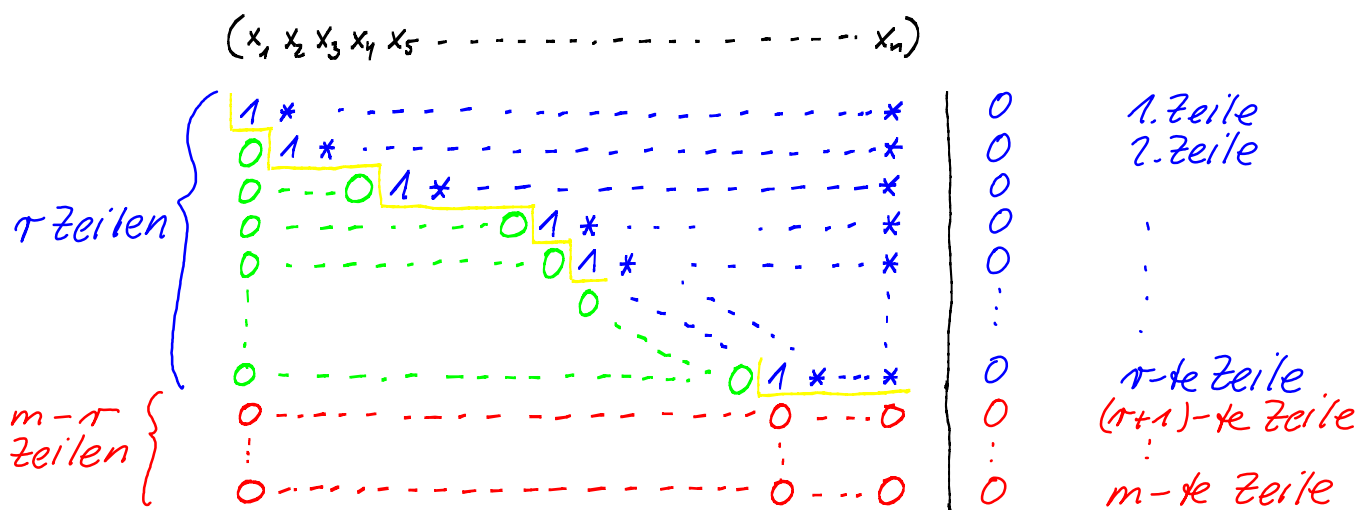
Da Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix A stets übereinstimmen, gilt auch stets $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^T)$.

Da wir nun wissen, wie man an der Zeilenstufenform des letzten Gauß-Schemas den Rang einer Matrix ablesen kann, können wir nun auch überlegen, was der Rang einer Matrix mit der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme zu tun hat. Dabei unterscheiden wir, ob die rechte Seite der Nullvektor ist oder nicht.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so heißt das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ homogen, für $\vec{b} \neq \vec{0}$ heißt es inhomogen.

Wir betrachten zunächst den Fall $\vec{b} = \vec{0}$. Durch die elementaren Zeilenumformungen ändert sich in diesem Fall an der rechten Seite nichts, d.h. nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhalten wir zum Schluss ein Schema der Form



Die gegebenenfalls auftretenden letzten $m-r$ Zeilen, in denen alle Einträge Null sind, brauchen wir nicht weiter zu betrachten.

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist r und die Anzahl der Freiheitsgrade ist $n-r$.

Ist die Anzahl der Freiheitsgrade gleich Null, d.h. $r = n$, so ist das homogene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Die Lösung ist $\vec{x} = \vec{0}$, die sogenannte triviale Lösung.

Ist die Anzahl der Freiheitsgrade größer als Null, d.h. $r < n$, so

gibt es unendlich viele Lösungen. Sie bilden einen $(n-r)$ -dimensionalen Teilraum des \mathbb{R}^n .

Bevor wir uns mit dem inhomogenen Fall beschäftigen, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und den Rang der Koeffizientenmatrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$\begin{array}{l} 1) \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow (-3) \\ \leftarrow (-2) \\ \leftarrow (-2) \end{array} \\ 2) \begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -10 & 6 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow (-1) \\ \leftarrow (-2) \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array} \end{array}$$

Zunächst lesen wir aus dem Schema $\text{Rg}(A) = 2$ ab. Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt $3 - 2 = 1$, d.h. ein Parameter ist frei wählbar.

Rückwärtsauflösen: $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$

Einsetzen in 2): $x_2 = \frac{3}{5}t$

Einsetzen in 1): $x_1 = -\frac{4}{5}t$

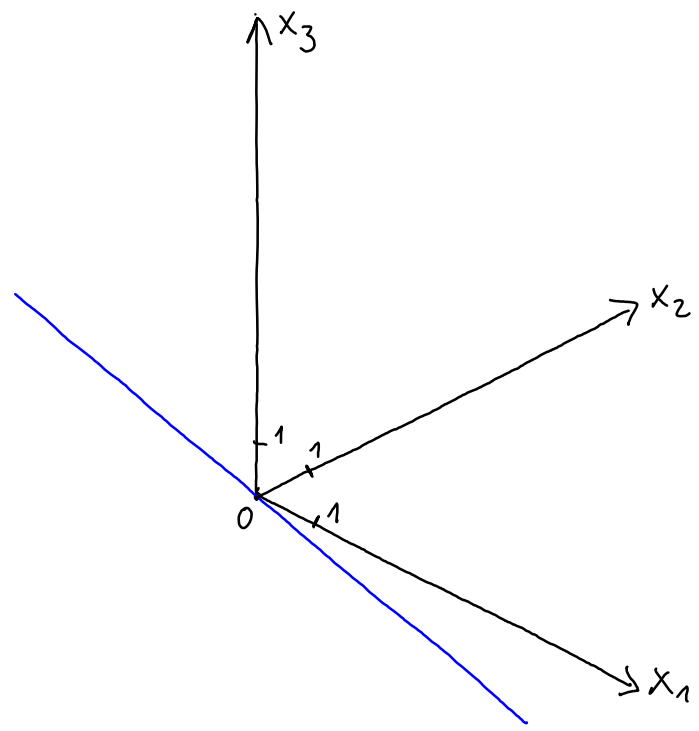
Wir schreiben die Lösungen als Vektor auf:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}t \\ -\frac{3}{5}t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

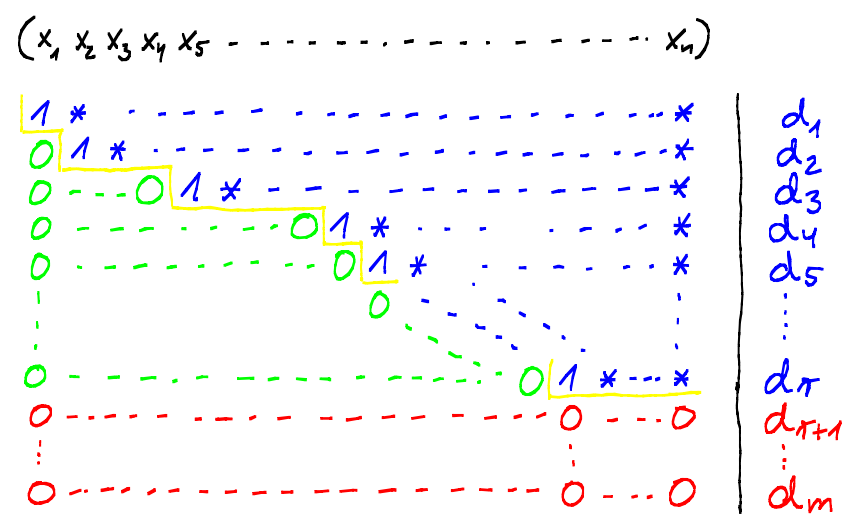
Somit gilt: $\mathbb{L} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

Die Lösungsmenge ist also ein 1-dimensionaler Teilraum des \mathbb{R}^3 ,

geometrisch also eine Gerade durch den Ursprung.



Als nächstes betrachten wir den Fall $\vec{b} \neq \vec{0}$. Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhalten wir also allgemein ein Schema der Form:



Wir bezeichnen mit (A, \vec{b}) diejenige $m \times (n+1)$ -Matrix, deren erste n Spalten die Matrix A und deren letzte Spalte der Vektor \vec{b} ist. Der Rang von (A, \vec{b}) ist dann gleich dem Rang der Matrix, die aus dem Endschema des Gauß-Algorithmus erweitert um die umgeformte rechte Seite besteht und im Folgenden mit (\tilde{A}, \vec{d}) bezeichnet wird. Den Rang von \tilde{A} und den Rang von (\tilde{A}, \vec{d})

können wir direkt aus dem Schema ablesen. Dabei können zwei Fälle auftreten.

Gibt es unter den d_{r+1}, \dots, d_m (mindestens) eines, das von Null verschieden ist, so gilt $\text{Rg}(\tilde{A}) \neq \text{Rg}(\tilde{A}, \vec{d})$ (genauer $\text{Rg}(\tilde{A}, \vec{d}) = \text{Rg}(\tilde{A}) + 1$).

In diesem Fall hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Gilt $d_{r+1} = \dots = d_m = 0$, so gilt $\text{Rg}(\tilde{A}) = \text{Rg}(\tilde{A}, \vec{d})$ und das lineare Gleichungssystem ist lösbar mit $(n-r)$ Freiheitsgraden.

Ist die Anzahl der Freiheitsgrade gleich Null, d.h. $n=r$, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Ist $n > r$, dann gibt es unendlich viele Lösungen. Sie bilden einen sogenannten affinen linearen Teilraum der Dimension $n-r$, d.h. einen linearen Teilraum, der mittels eines Vektors $\vec{a} \neq \vec{0}$ "an die richtige Stelle verschoben wird" (geometrisch z.B. eine Gerade (oder Ebene), die nicht durch den Ursprung verläuft). Diese Beobachtung legt nahe, dass es auch einen Zusammenhang zwischen der Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, und dem zugeordneten homogenen linearen Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ mit derselben Koeffizientenmatrix A gibt. Bevor wir dies genauer untersuchen, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel: Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$. Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhält man am Ende folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -5 \\ & & 1 & 3 \end{array}$$

Daraus lässt sich nun ablesen:

- $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A, \vec{b}) = 3$
- Die Anzahl der Freiheitsgrade ist Null
- Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

Beispiel: Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhält man am Ende folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ & 0 & & -6 \end{array}$$

Daraus lässt sich nun ablesen:

- $\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A, \vec{b}) = 3$
- Das Gleichungssystem ist nicht lösbar

Beispiel: Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhält man am Ende folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & & 2 \\ & & & 0 \end{array}$$

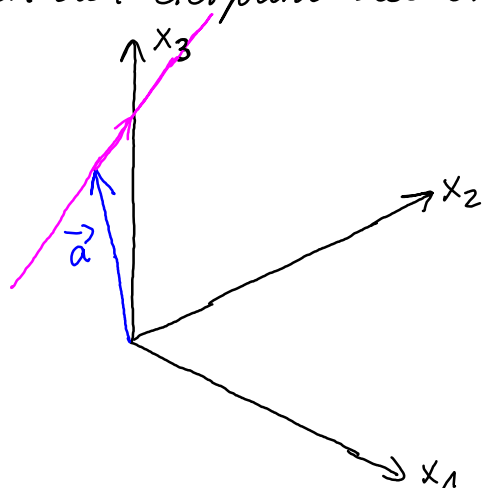
Daraus lässt sich nun ablesen:

- $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A, \vec{b}) = 2$
- Die Anzahl der Freiheitsgrade ist 1
- Es gibt unendlich viele Lösungen; die Lösungsmenge ist ein 1-dimensionaler affin-linearer Teilraum des \mathbb{R}^3

Rückwärtsauflösen liefert: $x_3 = 2$, $x_2 = t$, $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$; $t \in \mathbb{R}$,

d.h.
$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

geometrisch beschreibt die Lösungsmenge also eine Gerade im \mathbb{R}^3 , die durch den Zielpunkt des Ortsvektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft.



Der Zusammenhang zwischen Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ und des zugehörigen homogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ lässt sich relativ einfach einsehen.

Satz: Sei \vec{a} eine beliebige feste Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$. Dann ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ \vec{a} + \vec{y} : A\vec{y} = \vec{0} \}$.

denn:

Für ein beliebiges \vec{y} mit $A\vec{y} = \vec{0}$ gilt:

$$A(\vec{a} + \vec{y}) = A\vec{a} + A\vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}, \text{ d.h. } \vec{a} + \vec{y} \text{ Lösung von } A\vec{x} = \vec{b}.$$

Ist \vec{x} eine beliebige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$, so gilt für $\vec{y} = \vec{x} - \vec{a}$:

$$A\vec{y} = A(\vec{x} - \vec{a}) = A\vec{x} - A\vec{a} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \text{ und somit } \vec{x} = \vec{a} + \vec{y} \text{ mit } A\vec{y} = \vec{0}.$$

Beispiel: Wir betrachten noch einmal das letzte Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit der Lösungsmenge } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Das zugehörige homogene Gleichungssystem lautet

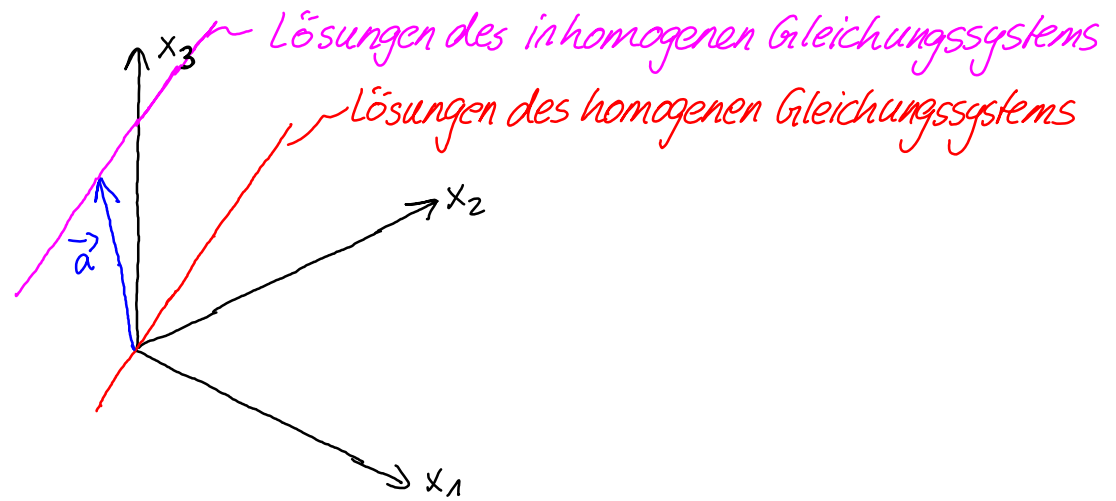
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus}$$

$$\text{erhält man das Schema } \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}$$

d.h. nach Rückwärtsauflösen $x_3 = 0$, $x_2 = t$, $x_1 = -\frac{1}{2}t$ und

somit die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$, einen 1-dimen-

sionalen Teilraum des \mathbb{R}^3 , d.h. geometrisch eine Gerade durch den Ursprung, die parallel zu der Geraden verläuft, die die Lösungsmenge des inhomogenen Systems beschreibt.



Inverse Matrizen

Wir haben bereits festgestellt, dass es einige Ähnlichkeiten bei den Rechenoperationen für Matrizen zu denen mit reellen Zahlen gibt. So spielt z.B. die Einheitsmatrix die Rolle der 1 bei der Matrizenmultiplikation.

Betrachten wir im Bereich der reellen Zahlen unter der Bedingung $a \neq 0$ die Gleichung $ax = 1$, so wissen wir, dass $x = a^{-1} = \frac{1}{a}$ die eindeutige Lösung dieser Gleichung ist. a^{-1} ist das zu a inverse Element bezüglich der Multiplikation reeller Zahlen.

Entsprechend sucht man für eine Matrix A eine Matrix X , so dass $A \cdot X = E$ gilt. Gibt es eine solche Lösung X , dann wird diese mit A^{-1} bezeichnet. A^{-1} heißt dann die zu A inverse Matrix. Wir fragen uns nun, unter welchen Bedingungen an die Matrix A eine inverse Matrix A^{-1} existiert. Die Antwort auf diese Frage ist leider etwas komplizierter als bei den reellen Zahlen. Als erste Bedingung setzen wir für A voraus, dass A eine quadratische Matrix ist, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bevor wir an Hand von Beispielen weitere Bedingungen erarbeiten, überlegen wir zunächst allgemeiner, wie man das Lösen einer Matrixgleichung der Form $A \cdot X = B$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und der ge-

suchten Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ auf das Lösen von p linearen Gleichungssystemen zurückführen kann. Dazu bezeichnen wir wieder mit $\vec{a}^i, i=1, \dots, m$, die Zeilenvektoren der Matrix A und mit $\vec{x}_k, k=1, \dots, p$, die Spaltenvektoren der Matrix X .

Dann lässt sich die Produktmatrix $A \cdot X$ schreiben als

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}^1, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{a}^1, \vec{x}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{a}^1, \vec{x}_p \rangle \\ \langle \vec{a}^2, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{a}^2, \vec{x}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{a}^2, \vec{x}_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{a}^m, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{a}^m, \vec{x}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{a}^m, \vec{x}_p \rangle \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $A \cdot X = B$ ist nun äquivalent dazu, dass die Spalten von $A \cdot X$ mit den entsprechenden Spalten von B übereinstimmen müssen, d.h. es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} \langle \vec{a}^1, \vec{x}_1 \rangle \\ \langle \vec{a}^2, \vec{x}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}^m, \vec{x}_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \langle \vec{a}^1, \vec{x}_2 \rangle \\ \langle \vec{a}^2, \vec{x}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}^m, \vec{x}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \langle \vec{a}^1, \vec{x}_p \rangle \\ \langle \vec{a}^2, \vec{x}_p \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}^m, \vec{x}_p \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{mp} \end{pmatrix}$$

$$\text{Nun ist aber } \begin{pmatrix} \langle \vec{a}^1, \vec{x}_j \rangle \\ \langle \vec{a}^2, \vec{x}_j \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}^m, \vec{x}_j \rangle \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x}_j.$$

Bezeichnen wir die Spaltenvektoren der Matrix B mit $\vec{b}_k, k=1, \dots, p$, so erhalten wir die p linearen Gleichungssysteme

$A \cdot \vec{x}_1 = \vec{b}_1, A \cdot \vec{x}_2 = \vec{b}_2, \dots, A \cdot \vec{x}_p = \vec{b}_p$, die alle dieselbe Koeffizientenmatrix A haben. Gleichungssysteme mit übereinstimmender Koeffizientenmatrix lassen sich simultan mit dem Gauß-Algorithmus lösen. Wie das funktioniert, betrachten wir an einem Beispiel.

Beispiel: Gesucht ist die Matrix $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so dass $A \cdot X = B$ gilt,

$$\text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach unseren obigen Überlegungen ist das Lösen von $A \cdot X = B$ äquivalent zum Lösen der drei linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da die Rechenoperationen im Gauß-Algorithmus nur von den Einträgen der Koeffizientenmatrix abhängen, werden nun die drei verschiedenen rechten Seiten simultan im Schema mitgeführt.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ \hline -7 & 8 & -10 & 0 & 2 & \\ 7 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 6 & -9 & 1 & 1 & & \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} (-3) \\ \leftarrow \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} (1) \\ \leftarrow \end{array} \right\} \end{array}$$

Rückwärtsauflösen der drei Gleichungssysteme liefert:

1. System

$$x_{31} = -\frac{3}{2}$$

$$x_{21} = -\frac{2}{7}$$

$$x_{11} = \frac{11}{7}$$

2. System

$$x_{32} = \frac{1}{6}$$

$$x_{22} = \frac{4}{21}$$

$$x_{12} = \frac{20}{21}$$

3. System

$$x_{33} = \frac{1}{6}$$

$$x_{23} = -\frac{2}{21}$$

$$x_{13} = \frac{11}{21}$$

Die Gleichung $A \cdot X = B$ ist somit eindeutig lösbar. Die Lösung ist

$$X = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} & \frac{20}{21} & \frac{11}{21} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Wir kommen nun auf die Frage zurück, unter welchen Bedingungen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Inverse A^{-1} besitzt. Dazu betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir untersuchen die Lösbarkeit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist wieder eine Matrixgleichung wie in unserem letzten Beispiel. Da die Spaltenvektoren der Einheitsmatrix gerade die kartesischen Basisvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 und \vec{e}_3 sind, entspricht dem Lösen der Matrixgleichung das Lösen der drei linearen Gleichungssysteme

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \quad A\vec{x}_3 = \vec{e}_3.$$

Wir wenden wieder den Gauß-Algorithmus simultan auf die drei Gleichungssysteme an.

2	-1	0	1	0	0	} $(-\frac{1}{2})$ ←
1	2	-2	0	1	0	
0	-1	1	0	0	1	
2	-1	0	1	0	0	} $(\frac{2}{5})$ ←
	$\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	0	
	-1	1	0	0	1	
2	-1	0	1	0	0	$\cdot \frac{1}{2}$
	$\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\cdot \frac{2}{5}$
	$\frac{1}{5}$		$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\cdot 5$
1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	
	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	
		1	-1	2	5	

Man sieht:

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A, \vec{e}_1) = \text{Rg}(A, \vec{e}_2) = \text{Rg}(A, \vec{e}_3) = 3$$

Alle drei linearen Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar.

1. System

$$x_{31} = -1$$

$$x_{21} = -1$$

$$x_{11} = 0$$

2. System

$$x_{32} = 2$$

$$x_{22} = 2$$

$$x_{12} = 1$$

3. System

$$x_{33} = 5$$

$$x_{23} = 4$$

$$x_{13} = 2$$

Die Matrix A besitzt also eine Inverse A^{-1} . Sie ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $A \cdot X = E$, d.h.

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Gegeben sei die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Wir untersuchen, ob es zu B eine inverse Matrix gibt, d.h. ob die Gleichung $B \cdot X = E$ lösbar ist. Dazu wenden wir den Gauß-Algorithmus auf die drei linearen Gleichungssysteme

$$B \vec{x}_1 = \vec{e}_1, \quad B \vec{x}_2 = \vec{e}_2, \quad B \vec{x}_3 = \vec{e}_3 \text{ an.}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ & 0 & -5 & -4 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 6 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{6} & 1 & 1 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} (3) \\ (-4) \end{array} \right\} \leftarrow$
 $\left. \begin{array}{l} (\frac{5}{6}) \\ (\frac{5}{6}) \end{array} \right\} \leftarrow$

Man sieht:

$$\text{Rg}(B) = 2 \neq \text{Rg}(B, \vec{e}_1) = \text{Rg}(B, \vec{e}_2) = \text{Rg}(B, \vec{e}_3) = 3$$

Die linearen Gleichungssysteme sind nicht lösbar. Die Matrix B besitzt keine Inverse.

Wie wir in den Beispielen gesehen haben, hängt die Existenz einer Inversen von der Lösbarkeit der entstehenden Gleichungssysteme ab. Die Lösbarkeit ist nur dann gewährleistet, wenn die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vollen Rang besitzt (d.h. $\text{Rg}(A) = n$). Dann gilt auch $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A, \vec{e}_i) = n$ für alle $i = 1, \dots, n$, und die Lösungen der linearen Gleichungssysteme sind eindeutig, d.h. in die-

sem Fall besitzt die Matrix A eine eindeutig bestimmte Inverse. Ist $\text{Rg}(A) < n$, so gilt für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$ $\text{Rg}(A, \vec{e}_i) > \text{Rg}(A)$. Damit ist mindestens eins der entstehenden linearen Gleichungssysteme nicht lösbar und die Gleichung $A \cdot X = E$ besitzt keine Lösung, d.h. A besitzt keine Inverse.

Zusammenfassend halten wir fest:

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A heißt **regulär**, wenn eine eindeutig bestimmte Matrix A^{-1} existiert, die die Gleichung $A \cdot A^{-1} = E$ erfüllt. A^{-1} heißt dann die zu A **inverse Matrix**. Ist A nicht regulär, so heißt A auch **singulär**.

In dem folgenden Satz sind die Bedingungen für die Regularität einer Matrix angegeben.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A ist genau dann regulär, wenn A vollen Rang hat, d.h. $\text{Rg}(A) = n$ gilt.

Im Folgenden halten wir einige wichtige Eigenschaften inverser Matrizen fest.

Satz: Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguläre Matrizen mit den Inversen A^{-1} und B^{-1} .

Dann gilt:

- 1) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, d.h. die Rechtsinverse stimmt mit der Linksinversen überein. (Dies ist zunächst nicht selbstverständlich, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.)
- 2) $(A^{-1})^{-1} = A$. Die inverse Matrix zu A^{-1} ist A .
- 3) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

denn:

zu 1) Wir bezeichnen zunächst mit A_R^{-1} bzw. A_L^{-1} die Rechts- bzw. Linksinverse und zeigen $A_R^{-1} = A_L^{-1}$. Es gilt:

$$A_L^{-1} = A_L^{-1} \cdot \underbrace{(A \cdot A_R^{-1})}_{=E} = \underbrace{(A_L^{-1} \cdot A)}_{=E} \cdot A_R^{-1} = A_R^{-1}$$

zu 2) $A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = E$ kann nur gelten für $(A^{-1})^{-1} = A$, da die Inverse eindeutig bestimmt ist.

zu 3) Es gilt: $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} A^{-1}) = A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{=E} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$, also ist $(B^{-1} A^{-1})$ Inverse zu $(A \cdot B)$.

Wir erinnern uns nun noch daran, was wir im Zusammenhang mit der Cramerschen Regel über die eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme festgehalten haben.

Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen für n Unbekannte ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante, d.h. die Determinante der Koeffizientenmatrix A (kurz $\det(A)$) ungleich Null ist. Damit haben wir ein weiteres Kriterium für die Regularität einer Matrix zur Verfügung. Wir fassen die möglichen Charakterisierungen für die Regularität zusammen.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

A regulär $\Leftrightarrow A$ invertierbar, d.h. A^{-1} existiert

$\Leftrightarrow \text{Rg}(A) = n$

\Leftrightarrow Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig

\Leftrightarrow Alle Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Beispiel. Wir untersuchen, ob $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ regulär ist.

$$\det(A) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-92) - 5 \cdot (186) = 654 \neq 0$$

Also ist die Matrix regulär.

Kennt man die zu einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverse Matrix A^{-1} , so lassen sich alle Gleichungssysteme der Form

$A \cdot X = B$ mit $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ Matrix der Unbekannten unmittelbar lösen: $A \cdot X = B \quad | \cdot A^{-1}$ von links

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{= E} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. In einem früheren Beispiel haben wir bereits $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ berechnet.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der Matrixgleichung $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ist

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 13 \\ 3 & 11 & 17 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der Matrixgleichung $A \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist

$$Y = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 4 \\ 9 & -2 & 1 & 8 \\ 10 & -3 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Quadratische Formen

Abschließend beschäftigen wir uns noch mit einem neuen Begriff, dem der quadratischen Formen.

Quadratische Formen treten z.B. auf in der Statistik, bei Problemstellungen mit mehrdimensionalen Preis-Absatz-Beziehungen, sowie bei quadratischen Optimierungsproblemen, bei denen man das Minimum oder Maximum einer quadratischen Form (Zielfunktion) gegebenenfalls unter einschränkenden Nebenbedingungen sucht. Solche quadratischen Optimierungsprobleme werden auch zur Approximation allgemeinerer nichtlinearer Optimierungsprobleme auf. Im Zusammenhang damit stehen Definitheitseigenschaften der in quadratischen Formen auftretenden Matrizen, die in enger Beziehung zu den Eigenwerten stehen. Solche Definitheitseigenschaften von Matrizen werden wir auch im kommenden Semester benötigen, um Kriterien für lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variablen zu formulieren.

Ist $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ein Variablenvektor und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so nennt man $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ eine quadratische Form.

Beispiel: Für $n=2$ ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} q(\vec{x}) &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 \end{aligned}$$

Man beachte, dass man mit der symmetrischen Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) \\ \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A + A^T)$$
 auf dieselbe quadratische

Form kommt.

Für $n=3$ ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} \vec{q}(\vec{x}) &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 \end{aligned}$$

Man beachte, dass man auch hier mit der symmetrischen Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) & a_{22} & \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13}) & \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23}) & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A + A^T) \text{ auf dieselbe}$$

quadratische Form kommt.

Auch im allgemeinen Fall lässt sich eine quadratische Form stets mit einer symmetrischen Matrix darstellen. Wir können also ohne Einschränkung voraussetzen, dass A symmetrisch ist.

Für eine symmetrische Matrix A , d. h. $a_{ij} = a_{ji}$ lässt sich nun die quadratische Form allgemein berechnen zu:

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 2a_{ij} x_i x_j.$$

Beispiel: Sei $q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$.

Gesucht ist $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, A symmetrisch, so dass $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ gilt.

$$\text{Offenbar ist } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Sei $q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Gesucht ist $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, A symmetrisch, so dass $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ gilt.

$$\text{Offenbar ist } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

In vielen Anwendungen ist man nun an Bedingungen an die Matrix A interessiert, die sicherstellen, dass $q(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$ dasselbe Vorzeichen besitzt.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann heißt

die quadratische Form $\vec{x}^T A \vec{x}$ bzw. die Matrix A

- 1) **positiv definit**, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
- 2) **positiv semidefinit**, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
- 3) **negativ definit**, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} < 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
- 4) **negativ semidefinit**, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
- 5) **indefinit**, wenn sie weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Beispiel:

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ ist positiv definit, da Quadrate}$$

stets nichtnegativ sind und für $\vec{x} \neq \vec{0}$ mindestens ein $x_i \neq 0$, d.h. $x_i^2 > 0$ sein muss.

Beispiel:

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -4x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2$$

Die Entscheidung fällt hier nicht so leicht, wie in unserem ersten Beispiel.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt aber: } -4x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 &= -((2x_1)^2 - 4x_1x_2 + x_2^2) - 3x_3^2 \\ &= -(2x_1 - x_2)^2 - 3x_3^2 \end{aligned}$$

Da Quadrate stets nichtnegativ sind, ist der Ausdruck auf jeden Fall kleiner oder gleich Null für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$. Er wird z.B. Null für $\vec{x} = (1, 2, 0)^T$. Somit ist die quadratische Form negativ semidefinit.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Entscheidung über Definitheitseigenschaften einer Matrix nicht durch einfaches Hinschauen gefällt werden kann. Wir werden uns daher mit Kriterien und geeigneterem mathematischen Werkzeug für die Untersuchung von Definitheitseigenschaften von Matrizen beschäftigen.

Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung der Definitivitätseigenschaften quadratischer Formen bzw. symmetrischer Matrizen besteht in der Untersuchung der Vorzeichen von Determinanten gewisser Teilmatrizen von A .

Definition: Ein **Hauptminor** der Ordnung r einer $(n \times n)$ -Matrix A ist die Determinante einer Matrix, die aus der Matrix A durch Streichung von $(n-r)$ Zeilen und $(n-r)$ Spalten entsteht. Dabei wird eine bestimmte Zeile i genau dann gestrichen, wenn auch die i -te Spalte gestrichen wird bzw. umgekehrt.

Ein Hauptminor heißt **führender Hauptminor** der Ordnung r einer $(n \times n)$ -Matrix A , wenn er aus den ersten r Zeilen und Spalten von A besteht, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Die **führenden Hauptminoren** von A sind

$$\det(1) = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -7, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = -19$$

Alle **Hauptminoren** von A

der Ordnung $r=1$ sind $\det(1)=1, \det(5)=5, \det(6)=6$

der Ordnung $r=2$ sind $\det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -7, \det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = 13, \det \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 12$

der Ordnung $r=3$ ist $\det(A) = -19$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Führende Hauptminoren: $\det(a_{11}), \det(A)$

Alle Hauptminoren: $\det(a_{11}), \det(a_{22}), \det(A)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Führende Hauptminoren: $\det(b_{11}), \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \det(B)$

Alle Hauptminoren: $\det(b_{11}), \det(b_{22}), \det(b_{33})$

$$\det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(B)$$

Während es zu einer quadratischen $(n \times n)$ -Matrix n führende Hauptminoren gibt, beträgt die Anzahl aller Hauptminoren $2^n - 1$. Für die Untersuchung der positiven bzw. negativen Definitheit sind (nur) die führenden Hauptminoren heranzuziehen, für die Semidefinitheit alle Hauptminoren, was in dem folgenden Satz festgehalten wird, der auch unter dem Stichwort Hurwitz-Kriterium in der Literatur zu finden ist.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Wir bezeichnen mit D_τ den führenden Hauptminor der Ordnung τ und mit Δ_τ einen beliebigen Hauptminor der Ordnung τ . Dann gilt:

- 1) A positiv definit $\Leftrightarrow D_\tau > 0$ für alle $\tau = 1, \dots, n$
- 2) A positiv semidefinit $\Leftrightarrow \Delta_\tau \geq 0$ für alle Hauptminoren der Ordnung $\tau = 1, \dots, n$
- 3) A negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^\tau D_\tau > 0$ für alle $\tau = 1, \dots, n$
- 4) A negativ semidefinit $\Leftrightarrow (-1)^\tau \Delta_\tau \geq 0$ für alle Hauptminoren der Ordnung $\tau = 1, \dots, n$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\det(2) = 2 > 0$, $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 7 > 0$, $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 19 > 0$.

Alle führenden Hauptminoren sind positiv, also ist A positiv definit.

Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\det(-2) = -2 < 0$, $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 8 > 0$, $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -12 < 0$.

Die führenden Hauptminoren ungerader Ordnung sind negativ, der führende Hauptminor gerader Ordnung positiv, also ist A negativ definit.

Beispiel:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zunächst die führenden Hauptminoren:

$$\det(0) = 0, \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0, \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -8 < 0, \det(C) = 24 > 0$$

Die führenden Hauptminoren ungerader Ordnung sind somit kleiner oder gleich 0, die gerader Ordnung größer oder gleich 0.

Achtung! Damit lässt sich nur schließen, dass C nicht positiv definit, nicht negativ definit und nicht positiv semidefinit ist. Für die Frage, ob C negativ semidefinit ist, müssen auch die anderen Hauptminoren von C untersucht werden.

Betrachtet man den Hauptminor

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \text{ (Streichen der 2. Zeile und Spalte in C),}$$

so hat man einen Hauptminor ungerader Ordnung gefunden, der positiv ist. C ist somit auch nicht negativ semi definit. Insgesamt ist also C indefinit.

II Analysis in einer reellen Variablen

6. Reelle Funktionen einer Variablen

Die Darstellung und Untersuchung ökonomischer Zusammenhänge und Problemstellungen erfolgt häufig durch Modelle, die durch mathematische Funktionen beschrieben werden. Beispiele hierfür sind:

- Nachfrage- und Angebotsfunktionen
- Kostenfunktionen
- Produktionsfunktionen
- Konsumfunktionen
- Gewinnfunktionen

In diesem Kapitel werden Funktionen einer reellen Variablen behandelt. Neben der Einführung grundlegender Begriffe werden einige, im Zusammenhang mit ökonomischen Fragestellungen häufig auftretende mathematische Grundfunktionen eingeführt, wobei einige mögliche Anwendungen in Beispielen skizziert werden.

Empfehlung: Studieren Sie insbesondere die Abschnitte zu Potenzen, Logarithmen und Funktionen aus dem Vorkurs!

Definition: Eine reelle Funktion f einer reellen Variablen ist eine Zuordnung, die jedem Element x aus einer Menge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ **eindeutig** eine reelle Zahl, den Funktionswert $f(x)$, zuordnet.

D_f heißt Definitionsbereich von f , die Menge W_f aller Funktionswerte heißt Wertebereich von f .

$$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow W_f \subseteq \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$$

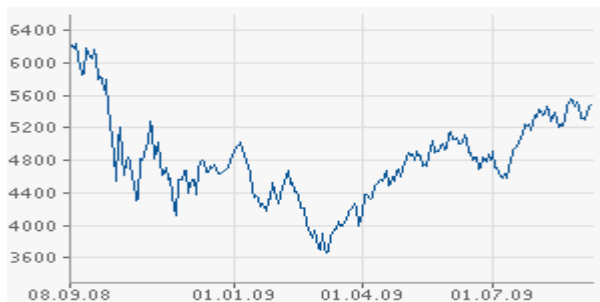
Bezeichnung: Ist f eine Funktion, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle x mit $y = f(x)$.
 x heißt dann unabhängige Variable oder Argument von f und y abhängige Variable.

Bemerkung: Wichtig bei der Definition des Funktionsbegriffs ist die Forderung nach der Eindeutigkeit der Zuordnung.

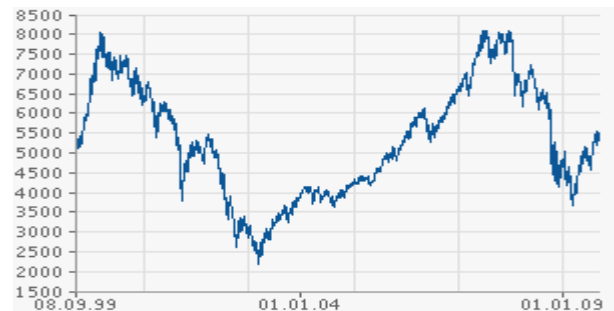
Die Zuordnung selbst kann auf unterschiedliche Art gegeben sein, z.B. durch eine Formel, eine Tabelle oder auch durch eine Kurve.

Beispiel: DAX in Abhängigkeit vom Datum

1 Jahr



10 Jahre



Bevor wir uns mit einigen mathematischen Grundfunktionen näher befassen, betrachten wir einige einfache Anwendungsbeispiele.

Beispiel: Konsumfunktion

In der makroökonomischen Theorie wird angenommen, dass der Gesamtkonsum C für Güter und Dienstleistungen eine Funktion des Volkseinkommens Y ist. Ein einfaches Modell ist eine affin-lineare Konsumfunktion $C(Y) = a + b \cdot Y$.

Die Steigung b (üblicherweise zwischen 0 und 1) gibt an, um wie viele Einheiten der Konsum zunimmt, wenn das Volkseinkommen um 1 Einheit steigt. Die Steigung ist die sogenannte Grenzneigung zum Konsum.

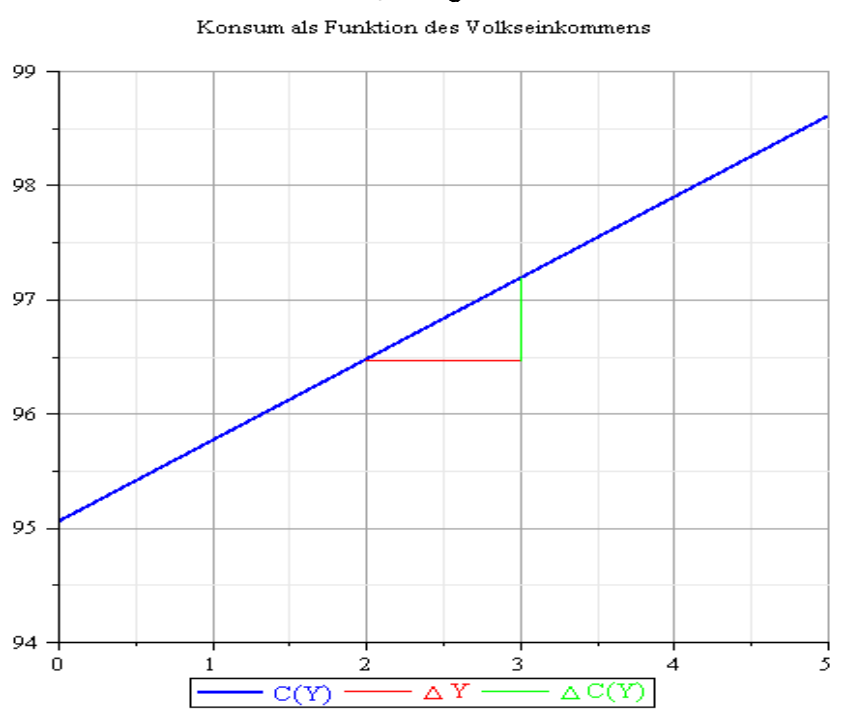
Aus einer Untersuchung der US-Wirtschaft für 1929 - 1941:

Konsumfunktion

$$C(Y) = 95.05 + 0.712Y$$

Grenzneigung zum Konsum:

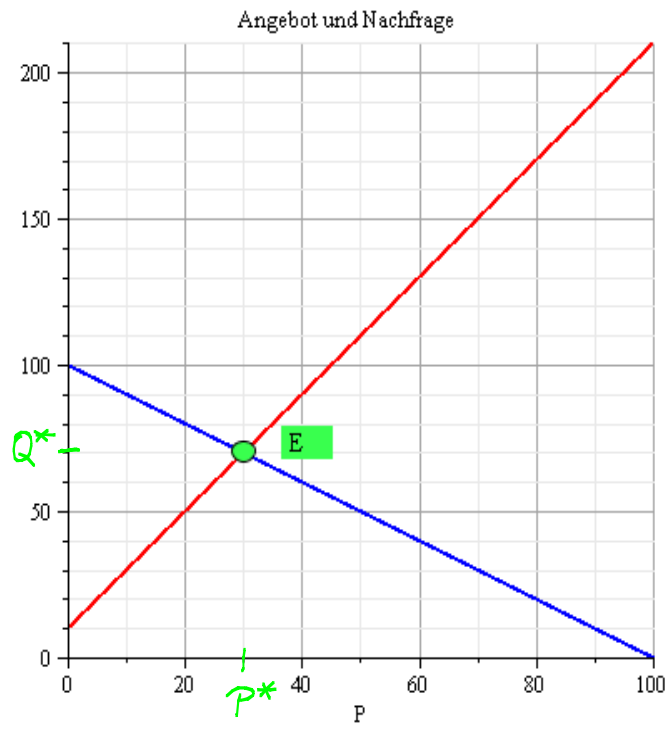
$$b = \frac{\Delta C(Y)}{\Delta Y} = 0.712$$



Beispiel: Die Nachfrage von Verbrauchern nach einem Gut in einer bestimmten Periode ist abhängig vom Preis. Üblicherweise geht die Nachfrage bei steigendem Preis zurück. Das Angebot der Hersteller des Produktes ist ebenfalls abhängig vom Preis, der erzielt werden kann, wobei das Angebot üblicherweise steigt, wenn der Preis steigt. In einem (sehr einfachen) Modell mit der Bezeichnung P für den Preis könnte dies z. B. so aussehen.

Nachfrage: $N(P) = 100 - P$

Angebot: $A(P) = 10 + 2P$



Der Schnittpunkt E der beiden Kurven ist derjenige Punkt, bei dem die Nachfrage gleich dem Angebot ist, d.h. Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht sind.

$$100 - P = 10 + 2P$$

$$\Leftrightarrow P = 30$$

Der zugehörige Preis $P^* = 30$ heißt Gleichgewichtspreis, die zugehörige Menge

$A(P^*) = N(P^*)$ ist die Gleichgewichtsmenge $Q^* = 70$

(In der Praxis der Preistheorie wird P üblicherweise auf der vertikalen Achse aufgetragen.)

Allgemeiner kann das Modell linearer Nachfrage- und Angebotsfunktionen folgendermaßen beschrieben werden.

$$N(P) = a - b \cdot P, \quad A(P) = \alpha + \beta \cdot P$$

mit positiven Parametern a, b, α, β .

Angebot und Nachfrage sind im Gleichgewicht, wenn

$$N(P) = A(P) \Leftrightarrow a - b \cdot P = \alpha + \beta \cdot P$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{a - \alpha}{b + \beta}$$

Der Gleichgewichtspreis ist also $P^* = \frac{a - \alpha}{b + \beta}$, die zugehörige Gleichgewichtsmenge beträgt

$$N(P^*) = A(P^*) = Q^* = a - b \cdot \frac{a - \alpha}{b + \beta} = \frac{a\beta + \alpha b}{b + \beta}$$

Beispiel: Die Kosten für die Beseitigung von $p\%$ der Verunreinigungen in einem See seien $b(p) = \frac{10p}{105-p}$.

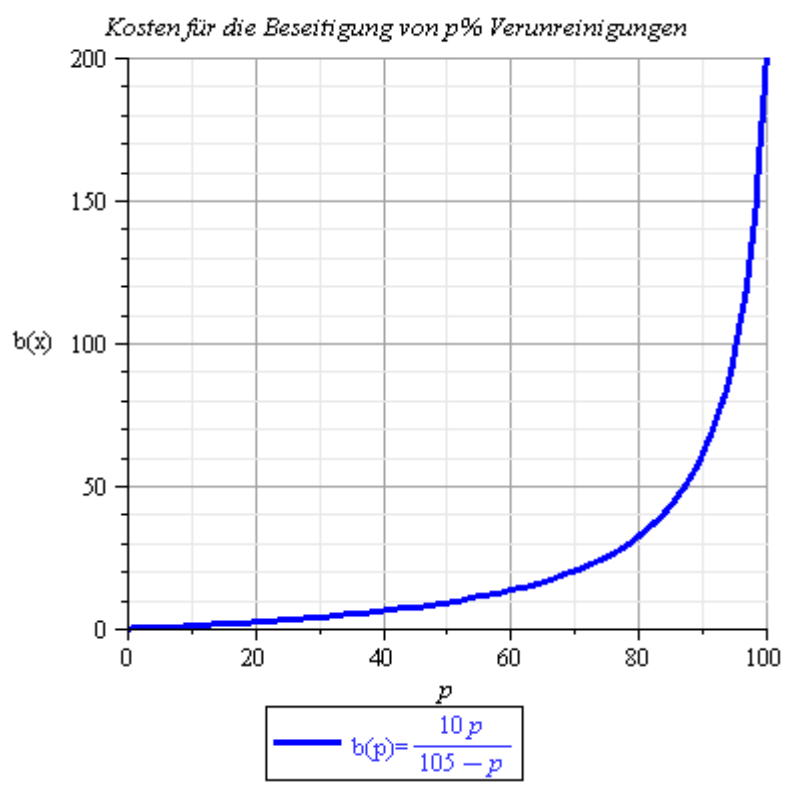
Der Definitionsbereich ist hier sinnvollerweise auf $D_b = [0, 100]$ einzuschränken.

Wertetabelle

p	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
b(p)	0	$\frac{20}{13}$	$\frac{40}{17}$	4	$\frac{80}{13}$	$\frac{100}{11}$	$\frac{40}{3}$	20	32	60	200

Was ist der Zuwachs an Kosten, wenn statt $p\%$ der Verunreinigungen $(p+1)\%$ beseitigt werden sollen?

$$\begin{aligned}
 & b(p+1) - b(p) \\
 &= \frac{10(p+1)}{105-(p+1)} - \frac{10p}{105-p} \\
 &= \frac{10(p+1)(105-p) - 10p(104-p)}{(104-p)(105-p)} \\
 &= \frac{1050}{(104-p)(105-p)}
 \end{aligned}$$



Allgemeiner: Was ist der Zuwachs an Kosten, wenn statt $p\%$ der Verunreinigungen $(p+h)\%$, $h > 0$, beseitigt werden sollen?

$$b(p+h) - b(p) = \frac{10(p+h)}{105-(p+h)} - \frac{10p}{105-p} = \frac{1050h}{(105-p-h)(105-p)}$$

Z. B. Zuwachs an Kosten für die Beseitigung von

30% statt 20% : $b(30) - b(20) = \frac{28}{17} \approx 1.647$

60% statt 50% : $b(60) - b(50) = \frac{140}{33} \approx 4.242$

90% statt 80% : $b(90) - b(80) = 28$

100% statt 90% : $b(100) - b(90) = 140$

Die Beispiele sollten zunächst klarmachen, dass funktionale Zusammenhänge als Modelle vieler Problemstellungen auftreten. Die Aufgabe der Mathematik ist es, zunächst einen geeigneten Vorrat an Grundfunktionen zur Verfügung zu stellen und Methoden anzugeben, mit deren Hilfe man aus diesen Grundfunktionen zusammengesetzte Funktionen untersuchen kann.

In diesem Kapitel werden wir zunächst Grundfunktionen mit einigen wesentlichen Eigenschaften angeben.

Grundfunktionen

- Potenz- und Wurzelfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eigenschaften

- Definitions- und Wertebereich
- Monotonie
- Beschränktheit
- Symmetrien
- Umkehrfunktion

Zunächst benötigen wir einige Vereinbarungen und Definitionen. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$.

Definitionsbereich: Wir vereinbaren, dass der Definitionsbereich einer Funktion aus allen reellen Zahlen bestehen soll, für die die Funktion berechnet werden kann, es sei denn, dass ein anderer Definitionsbereich angegeben ist.

Monotonie: Eine Funktion f heißt $\begin{cases} \text{monoton} \\ \text{streng monoton} \end{cases}$ wachsend,

wenn aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) < f(x_2) \end{cases}$ gilt.

Eine Funktion f heißt $\begin{cases} \text{monoton} \\ \text{streng monoton} \end{cases}$ fallend, wenn aus

$x_1 < x_2$ folgt, dass $\begin{cases} f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$ gilt.

Beschränktheit: Eine Funktion f heißt nach $\begin{cases} \text{oben} \\ \text{unten} \end{cases}$ beschränkt,

wenn es eine Konstante C gibt, so dass $\begin{cases} f(x) \leq C \\ f(x) \geq C \end{cases}$ gilt für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

Sie heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Symmetrien: Eine Funktion f heißt gerade, wenn ihr Graph (achsen-)symmetrisch zur y -Achse ist, d.h. wenn gilt:

(1) $x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow -x \in \mathbb{D}_f$ und (2) $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$

Eine Funktion heißt ungerade, wenn ihr Graph (punkt-)symmetrisch zum Ursprung ist, d.h. wenn gilt:

(1) $x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow -x \in \mathbb{D}_f$ und (2) $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

Wenn für ein festes $a \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $a+x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow a-x \in \mathbb{D}_f$ und (2) $f(a+x) = f(a-x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$,

dann ist der Graph der Funktion symmetrisch zur Geraden $x=a$ (Parallele zu y -Achse durch $(a, 0)$).

Bevor wir den Begriff der Umkehrfunktion definieren, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

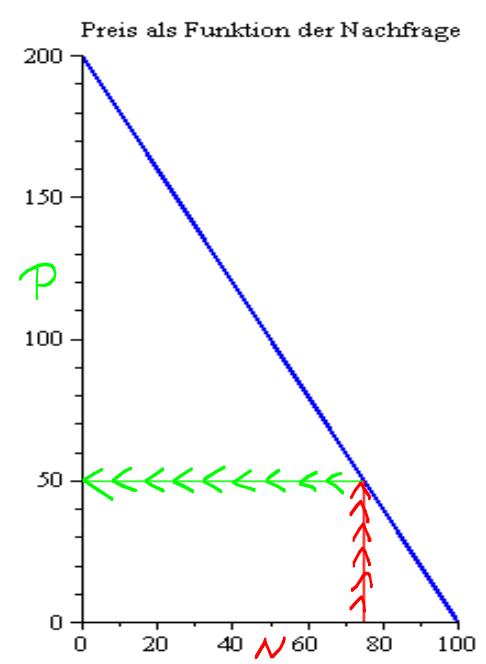
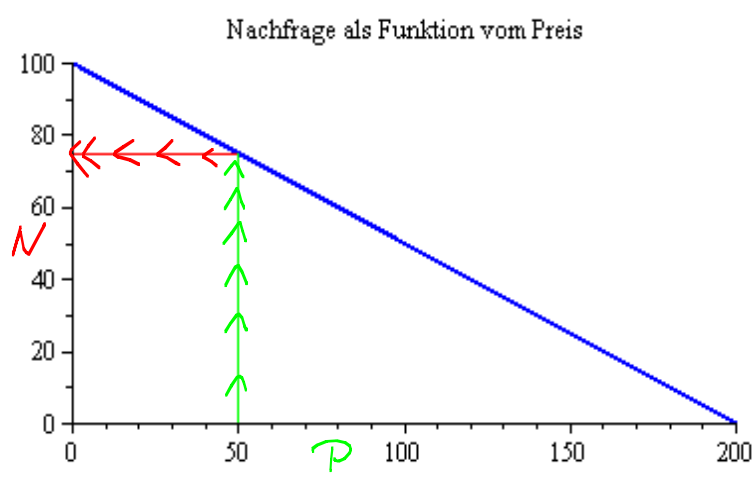
Beispiel: Wir betrachten die lineare Nachfragefunktion

$$N = 100 - 0.5P$$

in Abhängigkeit vom Preis P .

Aus der Sicht des Herstellers ist es möglicherweise zweckmäßig, die herzustellende Menge als wählbare Größe anzusehen, um den daraus resultierenden Preis zu betrachten, d.h. der Hersteller ist an der inversen Funktion (Umkehrfunktion) interessiert. Diesen funktionalen Zusammenhang erhält man, wenn man die Nachfragefunktion nach P auflöst, d.h.

$$N = 100 - 0.5P \iff P = 200 - 2N$$



$N = 100 - 0.5P$ gibt zu gegebenem Preis P die Nachfrage N an. Umgekehrt gibt $P = 200 - 2N$ zu gegebener Nachfrage N den Preis P an.

In beiden Fällen handelt es sich um Funktionen! Die beiden Funktionen sind invers zueinander!

Umkehrfunktion (Inverse Funktion): Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D_f und Wertebereich W_f . f ist umkehrbar eindeutig, wenn es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ gibt, so dass $y = f(x)$ gilt.

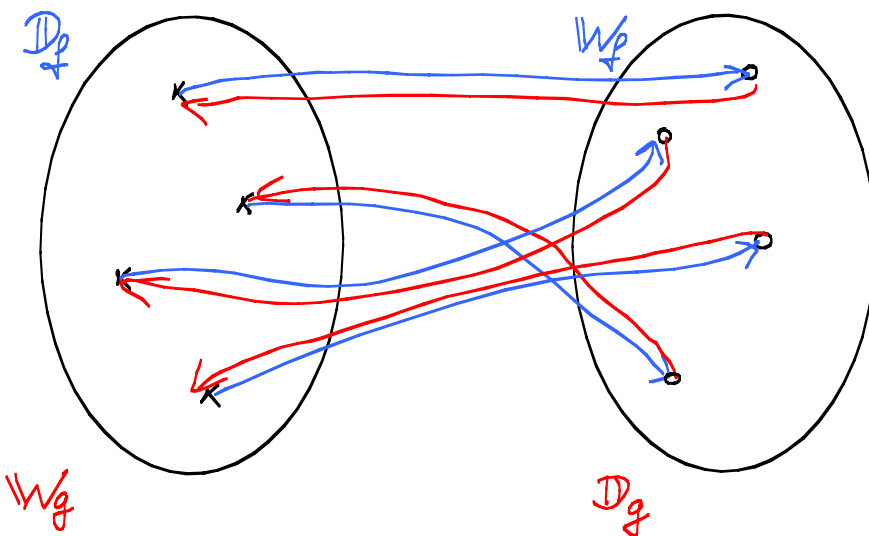
Äquivalent dazu ist die Bedingung, dass zu verschiedenen Elementen aus dem Definitionsbereich stets verschiedene Funktionswerte gehören müssen, d.h. wenn für $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.

Ist f umkehrbar eindeutig, dann besitzt sie eine Umkehrfunktion (inverse Funktion) g mit Definitionsbereich $D_g = W_f$ und Wertebereich $W_g = D_f$. Dabei ist für jedes $y \in D_g$ der Wert $g(y)$ die **eindeutig** bestimmte Zahl $x \in W_g$ mit $f(x) = y$.

Es gilt dann für $x \in D_f = W_g, y \in W_f = D_g$:

$$g(y) = x \iff y = f(x)$$

Veranschaulichung:



Häufig bezeichnet man die Umkehrfunktion zu f mit f^{-1} .

Achtung: f^{-1} ist nicht dasselbe wie $\frac{1}{f}$!

Wichtig ist, dass es sich bei der Umkehrung wieder um eine Funktion handeln muss, wenn man von einer Umkehr**funktion** spricht. Wie man am Beispiel der Normalparabel sehen kann, ist dies nicht selbstverständlich.

Aus der Definition wird klar, dass streng monotone Funktionen stets umkehrbar eindeutig sind.

Eigenschaften inverser Funktionen

Ist g Umkehrfunktion von f , dann ist auch f Umkehrfunktion von g . Es gilt dann:

$$g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathcal{D}_f \text{ und}$$
$$f(g(y)) = y \text{ für alle } y \in \mathcal{D}_g.$$

Potenzfunktionen

Definition: Seien $r \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x) = x^r$ heißt Potenzfunktion.

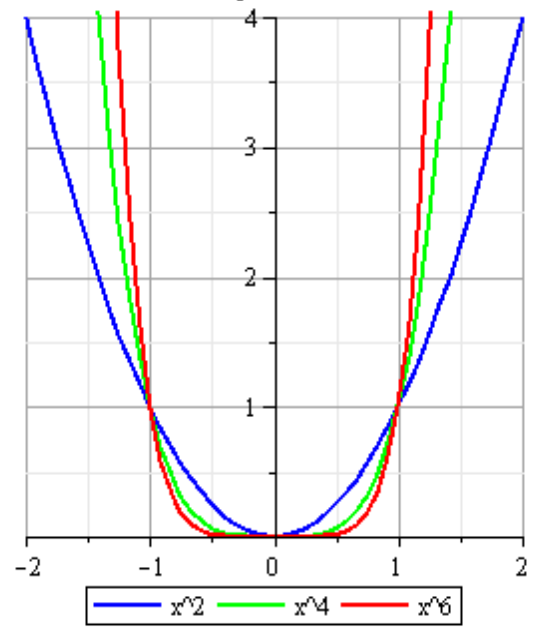
Definitions-, Wertebereich und weitere Eigenschaften hängen von r ab. Wir betrachten daher verschiedene Fälle.

1) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, n gerade

z.B. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_+$
- nach unten durch Null beschränkt
- gerade, d.h. symmetrisch zur y -Achse
- streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$
streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.
- umkehrbar eindeutig nur bei eingeschränktem Definitionsbereich, z.B. $\mathcal{D} = [0, \infty)$

Potenzfunktionen mit positiven, ganzzahligen, geraden Exponenten



Beispiel: Sei $y = f(x) = x^2$ mit $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_+$.

Bestimmung der Umkehrfunktion:

$$(y = x^2 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

Also ist $g(y) = \sqrt{y}$ die zugehörige Umkehrfunktion.

Oft vertauscht man noch die Variablennamen: $g(x) = \sqrt{x}$.

Zeichnet man die Graphen einer Funktion $f(x)$ und der zugehörigen Umkehrfunktion $g(x)$ in ein Koordinatensystem, bei dem die Achsen gleich skaliert sind, so ist der Graph von $g(x)$ die Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der ersten Winkelhalbierenden.

Allgemein ist für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, n gerade und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_+$ die zugehörige Umkehrfunktion $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

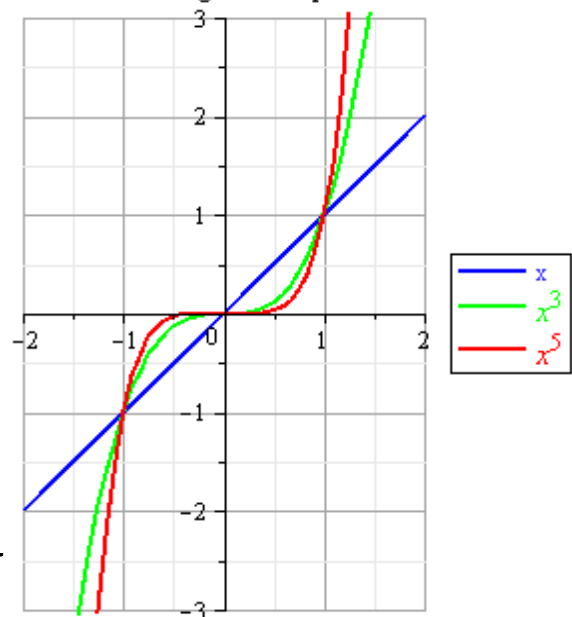
2) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, n ungerade

z.B. $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- unbeschränkt
- ungerade, d.h. symmetrisch zum Ursprung
- streng monoton wachsend auf \mathbb{R}
- wegen der strengen Monotonie auf ganz \mathbb{R} umkehrbar; die Umkehrfunktion lautet:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^{\frac{1}{n}}, & x \geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{n}}, & x < 0 \end{cases}$$

Potenzfunktionen mit positiven, ganzzahligen, ungeraden Exponenten

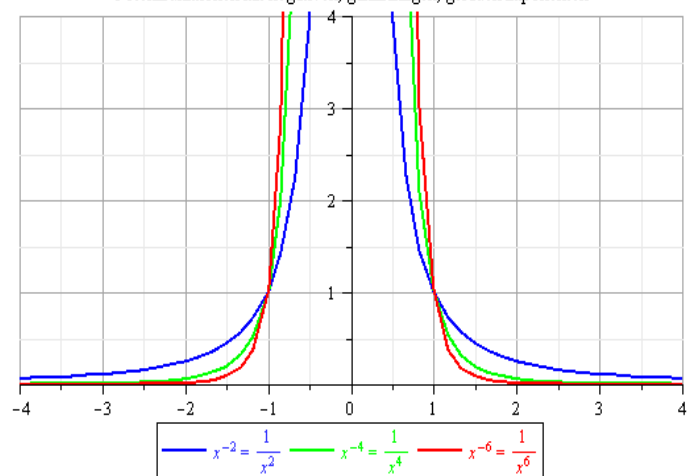


3) $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, n gerade

z.B. $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$
- nach unten durch 0 beschränkt
- gerade, d.h. symmetrisch zur y-Achse
- streng monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$
streng monoton fallend auf $(0, \infty)$
- nur auf eingeschränktem Definitionsbereich, z.B. $(0, \infty)$ umkehrbar.
Für $\mathbb{D} = (0, \infty)$ ist die Umkehrfunktion $g(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$

Potenzfunktionen mit negativen, ganzzahligen, geraden Exponenten



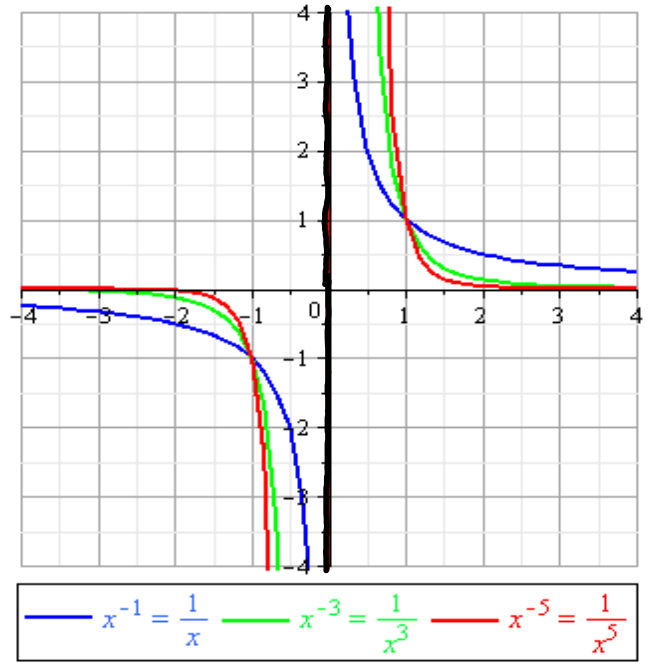
4) $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, n ungerade

z.B. $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- unbeschränkt
- ungerade, d.h. symmetrisch zum Ursprung
- streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$
- auf ganzem Definitionsbereich umkehrbar; Umkehrfunktion

$$g(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{n}}, & x > 0 \\ -(-x)^{-\frac{1}{n}}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}, & x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[n]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

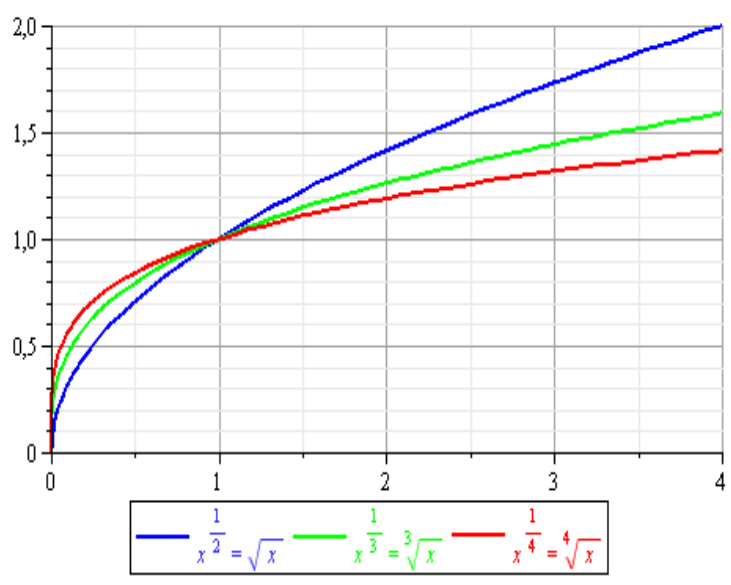
Potenzfunktionen mit negativen, ganzzahligen, ungeraden Exponenten



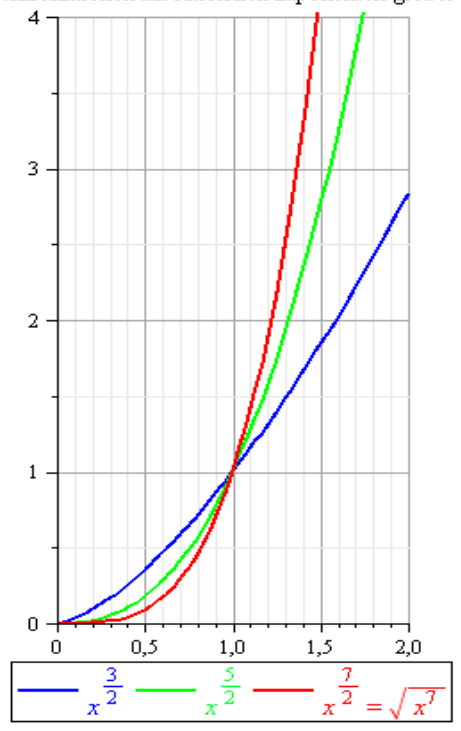
5) $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$

z.B. $f(x) = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$, $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

Potenzfunktionen mit positiven, rationalen Exponenten zwischen 0 und 1



Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten größer als 1



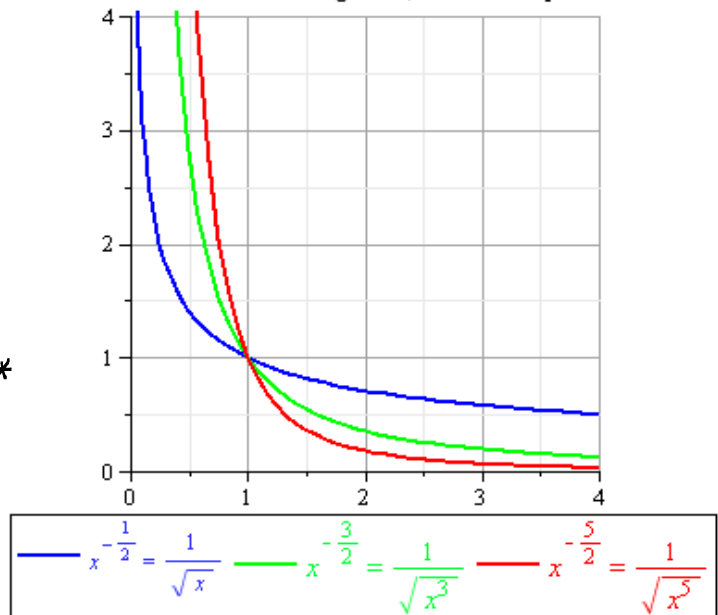
- $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_+$
 - nach unten durch 0 beschränkt
 - streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_+
 - auf gesamtem Definitionsbereich umkehrbar; Umkehrfunktion
- $$g(x) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$

6) $f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$

z. B. $f(x) = x^{-\frac{7}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_+^*$
- nach unten durch 0 beschränkt
- streng monoton fallend auf \mathbb{R}_+^*
- auf gesamtem Definitionsbereich umkehrbar; Umkehrfunktion $g(x) = x^{\frac{n}{m}}$

Potenzfunktionen mit negativen, rationalen Exponenten



Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen treten in vielen wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Modellen auf. Beispiele sind:

- wirtschaftliches Wachstum
- Bevölkerungswachstum
- stetig akkumulierter Zins
- abnehmendes Analphabetentum

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Die Funktion $f(x) = a^x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ heißt **Exponentialfunktion**. Dabei heißt a **Basis** und x **Exponent**.

Da es sich bei der Verwendung von Exponentialfunktionen oft um die Beschreibung zeitabhängiger Vorgänge handelt, wird häufig die Variable t verwendet.

Im Unterschied zu Potenzfunktionen, bei denen die Basis die unabhängige Variable ist, ist bei den Exponentialfunktionen der Exponent die unabhängige Variable.

Bevor wir uns mit den (mathematischen) Eigenschaften näher beschäftigen, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel: (Zinseszins; exponentielle Verzinsung)

Wir betrachten ein zum Zeitpunkt $t=0$ (Beginn einer Zinsperiode) vorhandenes Kapital K_0 . Wir überlegen, wie sich das Kapital bei einem nominellen Jahreszins $i = p\%$ entwickelt, wenn das Kapital jährlich m -mally zum relativen Zinssatz $\frac{i}{m}$ verzinst wird und die Zinsen jeweils dem Kapital gutgeschrieben werden. Zum Beispiel bedeutet:

$m=1$: jährliche Verzinsung mit i

$m=2$: halbjährliche Verzinsung mit $\frac{i}{2}$

$m=12$: monatliche Verzinsung mit $\frac{i}{12}$

m bezeichnet also die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr. Für $m > 1$ spricht man von unterjährlicher Verzinsung.

Wie groß ist das Kapital K_m nach t Jahren?

$m=1$

$$t=1: K_1(1) = K_0(1+i)$$

$$t=2: K_1(2) = K_0(1+i)^2$$

...

$$K_1(t) = K_0(1+i)^t$$

$m=2$

$$t=\frac{1}{2}: K_2(\frac{1}{2}) = K_0(1+\frac{i}{2})$$

$$t=1: K_2(1) = K_0(1+\frac{i}{2})^2$$

$$t=\frac{3}{2}: K_2(\frac{3}{2}) = K_0(1+\frac{i}{2})^3$$

....

$$K_2(t) = K_0(1+\frac{i}{2})^{2 \cdot t}$$

$m=4$

$$t=\frac{1}{4}: K_4(\frac{1}{4}) = K_0(1+\frac{i}{4})$$

$$t=\frac{1}{2}: K_4(\frac{1}{2}) = K_0(1+\frac{i}{4})^2$$

$$t=\frac{3}{4}: K_4(\frac{3}{4}) = K_0(1+\frac{i}{4})^3$$

$$K_4(t) = K_0(1+\frac{i}{4})^{4 \cdot t}$$

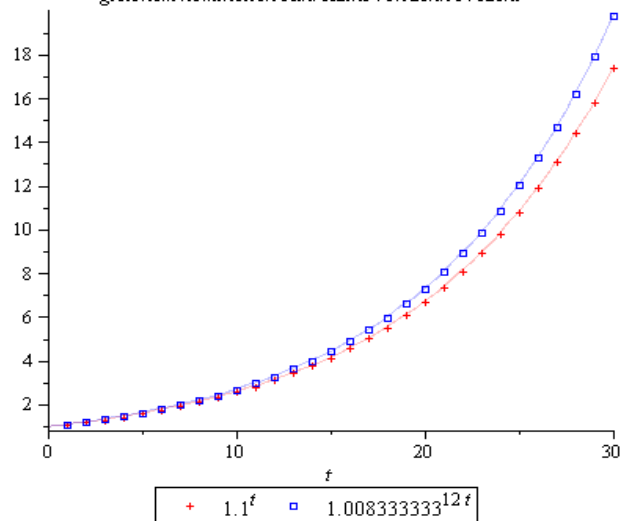
Allgemein ist $K_m(t) = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$, d.h. eine Exponentialfunktion der Form $K_0 \cdot a^t$ mit der Basis $a = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$. Zum Vergleich berechnen wir für einen Anlagebetrag von $K_0 = 1$ für $m = 1, 2, 4, 12$ das Kapital nach 1, 2, 10 Jahren für $i = p\% = \frac{5}{100}$.

t	1	2	10
$K_1(t)$	$1 + 0.05 = 1.05$	$(1 + 0.05)^2 = 1.1025$	$1.05^{10} \approx 1.628894$
$K_2(t)$	$(1 + 0.025)^2 = 1.050625$	$(1 + 0.025)^4 \approx 1.103813$	$1.025^{20} \approx 1.638616$
$K_4(t)$	$(1 + 0.125)^4 \approx 1.050945$	$(1 + 0.0125)^8 \approx 1.104486$	$1.0125^{40} \approx 1.643619$
$K_{12}(t)$	$(1 + 0.0041\bar{6})^{12} \approx 1.051162$	$(1 + 0.0041\bar{6})^{24} \approx 1.104913$	$1.0041\bar{6}^{120} \approx 1.647009$

Zur Veranschaulichung

Bei einem Anlagebetrag von 10 000 € ergibt sich bei $p = 5\%$ nach 10 Jahren ein Unterschied von 181.15 € zwischen monatlicher und jährlicher Verzinsung.

Kapitalentwicklung jährliche und monatliche Verzinsung bei gleichem nominellen Jahreszins von zehn Prozent



Wann hat sich das Kapital verdoppelt?

Um diese Frage zu beantworten, muss man die Gleichung

$$K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} = 2 K_0 \Leftrightarrow \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m\right]^t = 2$$

nach t auflösen. Gesucht ist also diejenige Potenz t^* (die Verdopplungszeit), zu der $a = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$ erhoben werden muss, um 2 zu erhalten. Dies werden wir an späterer Stelle mit Logarithmen lösen.

Was es bedeutet, wenn wir die Anzahl m der jährlichen Zinsperioden immer größer werden lassen, d.h. Verzinsung jeden Tag, jede Stunde, jede Minute, jede Sekunde etc. betrachten, werden wir an späterer Stelle genauer untersuchen.

Beispiel: Wir betrachten eine Gruppe von 10 000 Analphabeten.

Durch spezielle Bildungsmaßnahmen soll der Anteil der Analphabeten in dieser Gruppe um jährlich 10% reduziert werden. Wie groß ist der Anteil der Analphabeten nach t Jahren?

t	0	1	2	3
Anteil Analph.	10 000	$10000(1 - \frac{10}{100}) = 10000 \cdot 0.9$	$10000 \cdot 0.9^2$	$10000 \cdot 0.9^3$ u. s. w.

Die Anzahl kann somit durch die Exponentialfunktion

$$A(t) = A_0 \cdot 0.9^t$$

beschrieben werden. Hier ist die Basis $0.9 < 1$; mit zunehmendem t wird $A(t)$ kleiner.

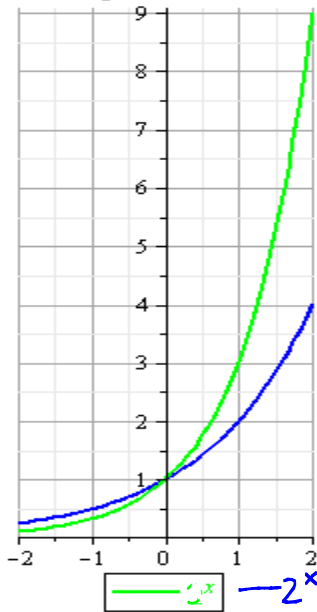
Nach welcher Zeit hat sich die Zahl der Analphabeten halbiert?

Zu lösen ist die Gleichung

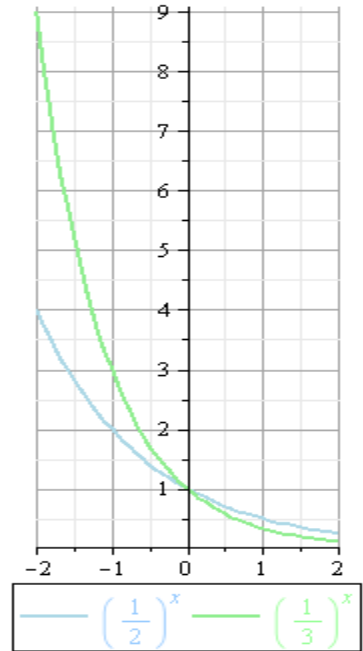
$$A_0 \cdot 0.9^t = 0.5 \cdot A_0 \iff 0.9^t = 0.5$$

Gesucht ist also diejenige Potenz t^* (die Halbwertszeit), zu der die Basis 0.9 erhoben werden muss, um 0.5 zu erhalten. Auch dies löst man mit Hilfe von Logarithmen.

Wir wenden uns nun wieder allgemein den Exponentialfunktionen, d.h. Funktionen der Form $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, zu. Dazu schauen wir uns zunächst beispielhaft die Graphen einiger Exponentialfunktionen mit verschiedenen Basen a an. Wir betrachten im folgenden nur $a \neq 1$, da der Fall $a = 1$, d.h. $f(x) = 1^x = 1$ nicht sonderlich interessant ist.

Exponentialfunktionen mit Basis
größer als 1

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{W} = \mathbb{R}_+^*$
- nach unten durch 0 beschränkt
- $f(0) = 1$
- für $a > 1$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R}
- für $0 < a < 1$ streng monoton fallend auf \mathbb{R}

Exponentialfunktionen mit Basis
zwischen 0 und 1

Wegen der strengen Monotonie ist $f(x) = a^x$ für jedes $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ umkehrbar eindeutig. Die zugehörigen Umkehrfunktionen sind die entsprechenden Logarithmusfunktionen, die wir im Anschluss an die Exponentialfunktionen behandeln werden.

Es gilt: $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x = a \cdot f(x)$ bzw. $a = \frac{f(x+1)}{f(x)}$.

Das bedeutet, dass die Basis a denjenigen Faktor darstellt, mit dem sich $f(x)$ ändert, wenn x um 1 zunimmt.

Falls $a = 1 + \frac{p}{100}$, $p > 0$, wächst $f(x)$ um $p\%$, wenn x um 1 zunimmt. Falls $a = 1 - \frac{p}{100}$, $p > 0$, fällt $f(x)$ um $p\%$, wenn x um 1 wächst.

Eine besondere Bedeutung kommt der Basis e , d.h. der "natürlichen" Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ zu, wobei $e = 2.718281828459045 \dots$ die Eulersche Zahl bezeichnet. Die Eulersche Zahl e ist eine irrationale Zahl. Um zu zeigen, wie die irrationale Zahl e in "natürlicher" Weise als Basis auftritt, greifen wir das obige Beispiel zur Kapitalverzinsung noch einmal auf.

Beispiel: Wird ein Kapital m -mal jährlich zum relativen Zinssatz von $\frac{i}{m}$ verzinst, so hatten wir für die Kapitalentwicklung die Formel $K_m(t) = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$ gefunden.

Bei wachsendem m werden in immer kürzeren Abständen die relativen Zinsen dem Kapital zugeschlagen. Wir haben gesehen, dass $K_m(t)$ größer wird, wenn m größer wird. Wir illustrieren dies noch einmal mit folgenden Werten: $K_0 = 1$, $i = 100\%$, $t = 1$ (Jahr) für verschiedene Werte von m .

Anzahl m der Zinsperioden pro Jahr	Kapital $K_m(1)$ nach einem Jahr
1 (Zinszuschlag jährlich)	$(1+1)^1 = 2$
2 (Zinszuschlag halbjährlich)	$(1 + \frac{1}{2})^2 = 2.25$
12 (Zinszuschlag monatlich)	$(1 + \frac{1}{12})^{12} \approx 2.613035$
365 (Zinszuschlag täglich)	$(1 + \frac{1}{365})^{365} \approx 2.714567$
8760 (Zinszuschlag stündlich)	$(1 + \frac{1}{8760})^{8760} \approx 2.718127$

Man kann nun zeigen, dass auch bei beliebig häufigem Zinszuschlag pro Jahr, d.h. $m \rightarrow \infty$, das Kapital am Jahresende einen bestimmten Betrag nicht überschreiten kann.

Betrachtet man nämlich den Ausdruck $(1 + \frac{1}{z})^z$ für $z \rightarrow \infty$, so strebt dieser Ausdruck gegen die Eulersche Zahl e .

Man schreibt $\lim_{z \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{z})^z = e$.

Setzen wir speziell $z = \frac{m}{i}$ ein und betrachten $m \rightarrow \infty$, dann erhalten wir $\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{i}{m})^{\frac{m}{i}} = e$. Daraus kann man schließen, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_m(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i} \cdot it} = K_0 \cdot e^{it} \text{ ist.}$$

Wir erhalten damit die Formel für die sogenannte **stetige Verzinsung** (kontinuierliche Verzinsung)

$$K(t) = K_0 \cdot e^{it}.$$

Weiter oben haben wir bereits erwähnt, dass jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ umkehrbar eindeutig ist. Die zugehörigen Umkehrfunktionen sind die Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktionen


Wir wiederholen zunächst die Definition des Logarithmus einer Zahl $u \in \mathbb{R}_+^*$ zur Basis a :

$$\log_a u = v \iff a^v = u$$

$\log_a u$ ist also diejenige Zahl v , die als Potenz von a genommen werden muss, so dass $a^v = u$ ist.

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Die Funktion $f(x) = \log_a x$ heißt **Logarithmusfunktion** (zur Basis a).

Damit ist $f(x) = \log_a x$ gerade durch die Eigenschaft definiert, Umkehrfunktion zu $g(x) = a^x$ zu sein.

Daher gilt: $\log_a (a^x) = x$ und $a^{\log_a x} = x$ 

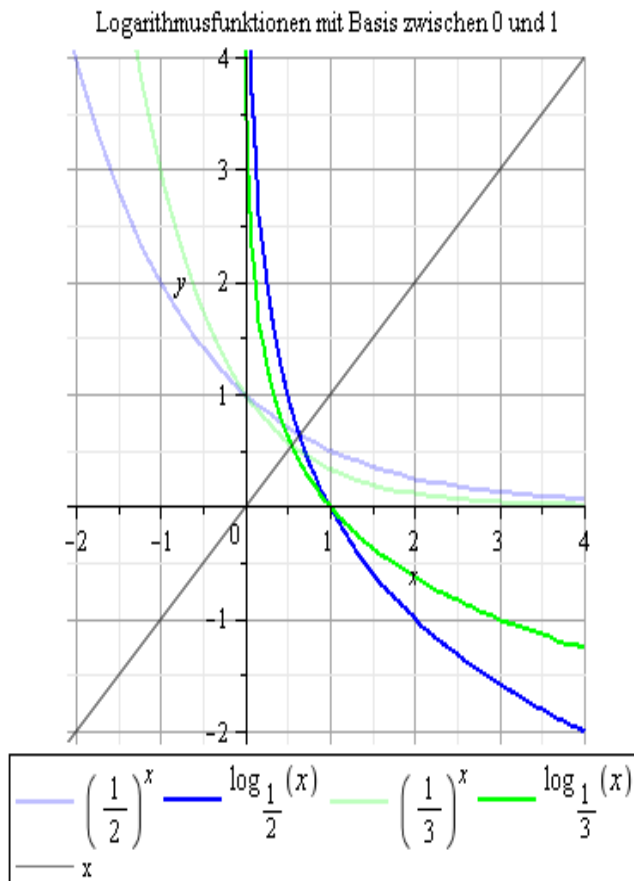
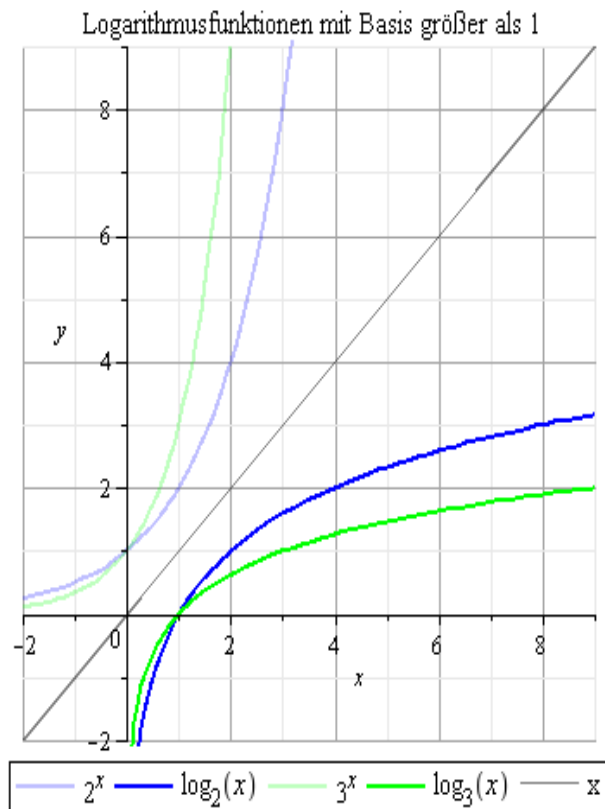
Das Logarithmieren macht sozusagen das Exponentieren rückgängig und umgekehrt.

Für spezielle Basen gibt es abkürzende Bezeichnungen:

$$\log_{10} x = \lg x \quad \text{und} \quad \log_e x = \ln x$$

Die Graphen von Logarithmusfunktionen erhält man durch Spiegelung der Exponentialfunktionen an der ersten Winkelhalbierenden.

Bevor wir uns Beispielen zuwenden, betrachten wir die Graphen einiger Logarithmusfunktionen und stellen einige grundlegende Eigenschaften zusammen.



- $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- unbeschränkt
- $f(1) = \log_a 1 = 0$
- für $a > 1$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_+^*
- für $0 < a < 1$ streng monoton fallend auf \mathbb{R}_+^*

Beispiel: Wir betrachten eine Population, die jährlich um 3.5% wächst. Wie groß ist die Verdopplungszeit?

Zunächst gilt $P(t) = P_0 \left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^t = P_0 \cdot 1.035^t$.

Gesucht ist t^* , so dass gilt: $P_0 \cdot 1.035^{t^*} = 2P_0$

$$P_0 \cdot 1.035^t = 2P_0 \Leftrightarrow 1.035^t = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(1.035^t) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \ln 1.035 = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1.035}$$

Die Verdopplungszeit beträgt $t^* = \frac{\ln 2}{\ln 1.035} \approx 20.15$

Wir wiederholen die Rechenregeln für den Logarithmus

$$1) \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$3) \log_a(x^p) = p \cdot \log_a x$$

$$4) \log_a(a^p) = p$$

Aufgabe: Sei $x > 0$. **Richtig** oder **falsch**?

$$a) (\ln x)^4 = 4 \cdot \ln x^2$$

Falsch! Für $x=e$ gilt $(\ln e)^4 = 1^4 = 1$, aber $4 \cdot \ln e = 4 \cdot 1 = 4$

$$b) \lg x = 2 \lg \sqrt{x}?$$

Richtig! Nach Regel 3) gilt $2 \lg \sqrt{x} = \lg (\sqrt{x})^2 = \lg x$

$$c) \ln x^{10} - \ln x^4 = 3 \cdot \ln x^2$$

Richtig! Mit den Regeln 2) und 3) gilt

$$\ln x^{10} - \ln x^4 = \ln\left(\frac{x^{10}}{x^4}\right) = \ln x^6 = \ln(x^2)^3 = 3 \cdot \ln x^2$$

Beispiel: Im Jahre 1990 wurde das Bruttosozialprodukt (BSP) Chinas auf $1.2 \cdot 10^{12}$ \$ und die Wachstumsrate auf $r = 0.09$ geschätzt. Das BSP der USA wurde auf $5.6 \cdot 10^{12}$ \$ mit einer Wachstumsrate $s = 0.02$ geschätzt. Wir nehmen an, dass die BSP beider Länder in den Folgejahren mit den gleichen Raten wachsen. Wann wären die BSP der beiden Länder gleich groß?

$$\text{BSP China zur Zeit } t: B_c(t) = 1.2 \cdot 10^{12} (1 + 0.09)^t$$

$$\text{BSP USA zur Zeit } t: B_u(t) = 5.6 \cdot 10^{12} (1 + 0.02)^t$$

Gesucht: t^* , so dass $B_c(t^*) = B_u(t^*)$

$$1.2 \cdot 10^{12} \cdot 1.09^t = 5.6 \cdot 10^{12} \cdot 1.02^t \Leftrightarrow \frac{1.09^t}{1.02^t} = \frac{5.6}{1.2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1.09}{1.02}\right)^t = \ln\left(\frac{5.6}{1.2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5.6}{1.2}\right)}{\ln\left(\frac{1.09}{1.02}\right)}$$

Also sind die BSP nach $t^* = \frac{\ln\left(\frac{5.6}{1.2}\right)}{\ln\left(\frac{1.09}{1.02}\right)} \approx 23$ Jahren gleich groß.

7. Verknüpfungen von Funktionen

Wir haben nun einen gewissen (unvollständigen) Vorrat an Grundfunktionen. Diese kommen, wie wir bereits in den Beispielen des letzten Kapitels gesehen haben, normalerweise nicht "in Reinform" daher, sondern werden je nach Problemstellung miteinander verknüpft.

Als mögliche Verknüpfungen behandeln wir neben der einfachen Multiplikation mit einer Konstanten, Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen von Funktionen.

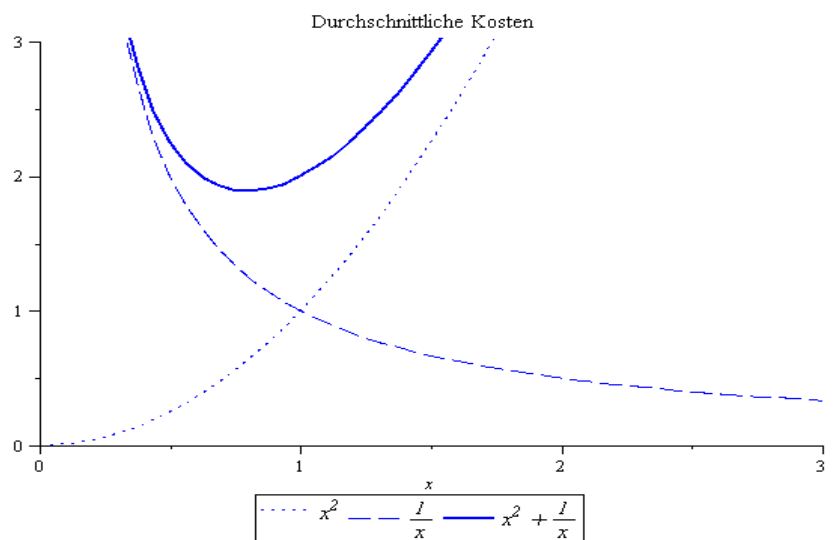
Weitere Möglichkeiten, Funktionen aus den Grundfunktionen oder den verknüpften Funktionen zu gewinnen, lassen sich geometrisch als Verschiebungen, Streckungen / Stauchungen und Spiegelungen an den Koordinatenachsen veranschaulichen.

Beispiel: Die Kosten für x Einheiten eines Gutes seien gegeben durch $C(x) = x^3 + 1$. Die Durchschnittskosten $A(x)$ sind die Kosten pro produzierter Einheit, d.h.

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 + \frac{1}{x} \text{ für } x > 0.$$

$A(x)$ ist Summe aus

$$f_1(x) = x^2 \text{ und } f_2(x) = \frac{1}{x}.$$



Definition: Sind f und g zwei Funktionen mit den Definitionsbereichen D_f und D_g mit $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, so sind **Summe** und **Differenz** der beiden Funktionen definiert durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad x \in D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

Beispiel: $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Es gilt: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}^*$, $\mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g = \mathbb{R}^*$

$$(f+g)(x) = x^2 + \frac{1}{x} \text{ für } x \in \mathbb{R}^*.$$

Wenn wir zusätzlich noch die Multiplikation von Funktionen mit einer Konstanten c betrachten, erhalten wir mit Summen und Differenzen der Potenzfunktionen x^k , $k \in \mathbb{N}_0$, die **Polynome**, d. h. Funktionen der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Beispiel: Ein Unternehmen bietet ein Produkt zum von der abgenommenen Menge x abhängigen Preis von $p(x) = \frac{10x+110}{x+10}$ an.

Ein Kunde, der eine Menge x kauft, muss somit

$$P(x) = \frac{10x+110}{x+10} \cdot x \text{ bezahlen.}$$

$P(x)$ ist somit das Produkt aus $\frac{10x+110}{x+10}$ und x bzw.

$p(x)$ der Quotient aus $\frac{10x+110}{x+10} \cdot x$ und x .

z. B. ist für $x=10$: $P(10) = 105$, $p(x) = 10.5$

$$x=30: P(30) = 307.5, p(x) = 10.25$$

Definition: Sind f und g zwei Funktionen mit den Definitionsbereichen \mathbb{D}_f und \mathbb{D}_g mit $\mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g \neq \{\}$, so sind **Produkt** und **Quotient** der beiden Funktionen definiert durch:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_{f \cdot g} = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{D}_f \cap \{\mathbb{D}_g \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}\}$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$

Es gilt: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}_+^*$; $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_{f \cdot g} = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g = \mathbb{R}_+^*$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_{\frac{f}{g}} = \{\mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_{\frac{g}{f}} = \{\mathbb{D}_g \cap \mathbb{D}_f\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = \mathbb{R}_+^*$$

Wenn wir nun Quotienten der vorher gebildeten Polynome betrachten, erhalten wir die **rationalen Funktionen**, d.h. Funktionen der Form

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_R = \{x \in \mathbb{R} : b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \neq 0\}$.

Beispiel: Wir bestimmen den Definitionsbereich von $R(x) = \frac{x^2 - 7x + 5}{6x^2 + x - 1}$.

Dazu müssen wir die Nullstellen der quadratischen Funktion im Nenner bestimmen.

$$6x^2 + x - 1 = 0 \quad | : 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \quad | \text{Anwendung pq-Formel}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{6}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{12^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{3}$$

Somit ist der Definitionsbereich der Funktion $\mathbb{D}_R = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.

Beispiel: Die Nachfrage nach einem bestimmten Gut sei in Abhängigkeit vom Preis P gegeben durch $N(P) = 10 - 0.5P$.

Wir nehmen an, dass der Preis P nicht konstant ist, sondern in Abhängigkeit von der Zeit t gegeben ist durch $P(t) = 0.01 \cdot 2^t$.

Wir können dann die Nachfrage als Funktion von t ausdrücken, d.h.

$$N(P(t)) = 10 - 0.5 \cdot P(t) = 10 - 0.005 \cdot 2^t$$

Es handelt sich hierbei um eine sogenannte Verkettung von Funktionen. Man setzt zunächst die Variable t in die "innere" Funktion $P(t)$ ein. Den so ermittelten Wert für den Preis P setzt man dann in die "äußere" Funktion ein.

Bevor wir den Begriff der Verkettung von Funktionen genauer definieren, machen wir uns zunächst an einem weiteren Beispiel klar,

was bzgl. des Definitionsbereiches zu beachten ist.

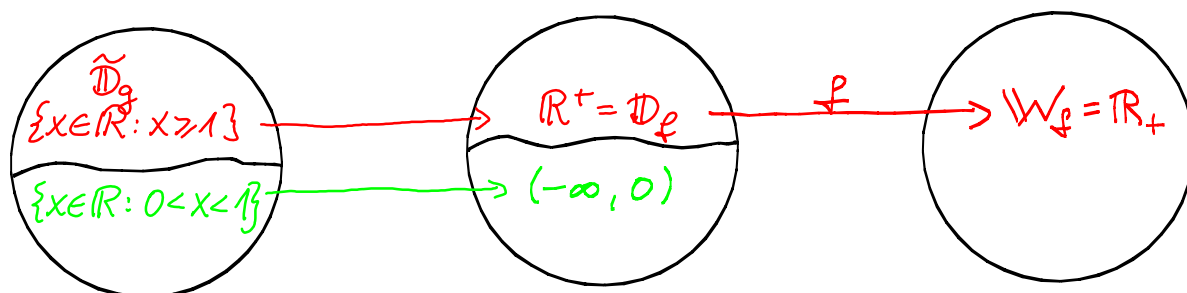
Beispiel: Seien $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \ln x$ mit den Definitionsbereichen $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_+$ und $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}_+^*$.

Wir betrachten nun die verkettete Funktion $f(g(x)) = \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln x}$.

Um den Definitionsbereich der verketteten Funktion zu bestimmen, müssen wir herausfinden, für welche $x \in \mathbb{D}_g$ gilt, dass $g(x) = \ln x \geq 0$ gilt, denn nur für solche x ist $f(g(x))$ definiert.

Anders ausgedrückt, müssen wir diejenige Teilmenge $\tilde{\mathbb{D}}_g$ von \mathbb{D}_g bestimmen, für die der zugehörige Wertebereich $\tilde{W}_g \subseteq \mathbb{D}_f$ ist.

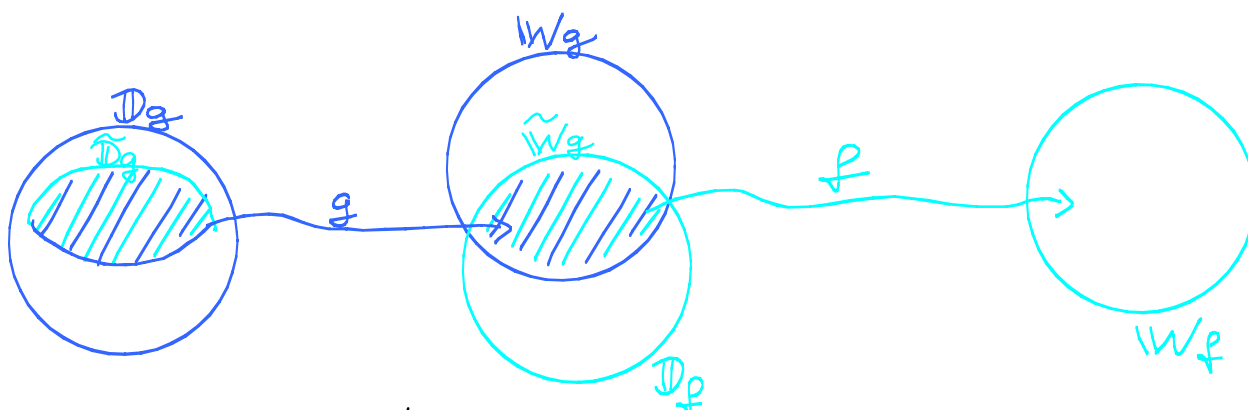
$$g: \mathbb{D}_g = \mathbb{R}_+^* \longrightarrow W_g = \mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_+$$



In $\tilde{\mathbb{D}}_g$ sind nur diejenigen x , für die $\ln x \geq 0$ ist, d.h. $x \geq 1$.

Auch dieses Beispiel zeigt wieder, wie wichtig es ist, die Grundfunktionen mit ihren Eigenschaften gut zu kennen.

Allgemeiner kann man sich die Situation so veranschaulichen:



Es müssen diejenigen Elemente von \mathbb{D}_g bestimmt werden, für die die Funktion g Werte liefert, die von f weiterverarbeitet werden können.

Definition: Seien f und g Funktionen mit Definitionsbereich \mathbb{D}_f bzw. \mathbb{D}_g .

Der Wertebereich von g sei W_g und es gelte $W_g \cap \mathbb{D}_f \neq \emptyset$. Dann ist die **Verkettung (Hintereinanderausführung)** von f und g definiert durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{D}_g : g(x) \in \mathbb{D}_f\}.$$

Man nennt g dann auch die "**innere**" und f die "**äußere**" Funktion.

Achtung: Die Verkettung von Funktionen ist nicht kommutativ!

Beispiel: Wenn Sie bei der Berechnung mit dem Taschenrechner erst für x den Wert 3 eingeben, dann die Funktionstaste x^2 drücken und anschließend die Funktionstaste 10^x drücken, erhalten Sie schematisch:

$$3 \xrightarrow{x^2} 9 \xrightarrow{10^x} 10^9$$

Wenn Sie statt dessen nach der Eingabe von 3 für x erst die Funktionstaste 10^x drücken und anschließend die Funktionstaste x^2 , so ergibt sich schematisch:

$$3 \xrightarrow{10^x} 10^3 \xrightarrow{x^2} 10^6$$

Beispiel:



Auf den 10DM Scheinen befand sich eine Funktion, die im Bereich der Statistik eine große Rolle spielt:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

mit den Parametern σ für die Standardabweichung und μ für

den Erwartungswert.

Es handelt sich um die Dichtefunktion der Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve).

Wir schreiben f als Verkettung zweier Funktionen.

Mit $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x}$ und $g(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ gilt:

$$f(x) = h(g(x)) \text{ mit } \mathbb{D}_{h \circ g} = \mathbb{R}.$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 - 1$.

Wir betrachten $(f \circ h \circ g)(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$ und bestimmen den Definitionsbereich. Wir müssen sicherstellen, dass unter der Wurzel ein nichtnegativer Wert steht, d.h. dass $\ln(x^2 - 1) \geq 0$ ist.

Damit $\ln(x^2 - 1)$ definiert ist, benötigen wir $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1$

Nun gilt: $\ln(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1$ (Damit gilt auch $x^2 > 1$)

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$$

(Anschaulich: Der Graph von $y = x^2 - 2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x = -\sqrt{2}$ und $x = +\sqrt{2}$)

Also ist $\mathbb{D}_{f \circ h \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}\} = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$

Beispiel: $f(x) = \ln x$, $g(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln |x|.$$

Da $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, gilt: $\mathbb{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir greifen an dieser Stelle die Frage nach der Umkehrbarkeit von Funktionen noch einmal auf und bestimmen für Beispiele komplizierterer Funktionen (falls möglich) Umkehrfunktionen.

Beispiel: $f(x) = y = \frac{3x-1}{3x+1}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$.

Man kann die Funktionsvorschrift auch umformen zu:

$$y = \frac{3x+1-2}{3x+1} = 1 - \frac{2}{3x+1}.$$

An dieser Darstellung lässt sich ablesen, dass y nicht 1 werden kann.

Wegen der Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $-\frac{1}{3}$ ergibt sich somit der Wertebereich zu $\mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Wir lösen nun die Gleichung $y = \frac{3x-1}{3x+1}$ für $x \neq -\frac{1}{3}, y \neq 1$ nach x auf.

$$y = \frac{3x-1}{3x+1} \Leftrightarrow (3x+1)y = 3x-1$$

$$\Leftrightarrow 3xy - 3x = -y - 1$$

$$\Leftrightarrow x \cdot 3(y-1) = -(y+1)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \cdot \frac{y+1}{y-1}$$

Die Umkehrfunktion zu $f(x)$ ist also $g(y) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{y+1}{y-1}$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\mathbb{W}_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$.

Wie kann man feststellen, ob man eventuell den Definitionsbereich einschränken muss? Wir erläutern dies an einem Beispiel.

Beispiel: Wir lösen $f(x) = y = x^2 + x - 6$ nach x auf.

$$y = x^2 + x - 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6 + y} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + y}$$

Zu jedem y mit $y > -\frac{25}{4}$ gibt es also **zwei verschiedene** x mit $f(x) = y$. Mit (*) können wir sehen, dass die Funktion für den **eingeschränkten Definitionsbereich** $[-\frac{1}{2}, \infty)$ umkehrbar ist.

Dann gilt nämlich:

$$y = x^2 + x - 6 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + y} \wedge x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + y}$$

Für $f(x) = x^2 + x - 6$ mit $\mathbb{D}_f = [-\frac{1}{2}, \infty)$ ist $g(y) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + y}$ Umkehrfunktion.

Im Folgenden betrachten wir, wie man Verschiebungen und Streckungen / Stauchungen von Funktionsgraphen durch geeignete Veränderungen der Funktionsterme erreichen kann.

Beispiel: Für ein Einkommen x zwischen 4000 € und 10000 € werden Abgaben von

$$s(x) = 4 \cdot 10^{-5} x^2 + 5 \cdot 10^{-2} x$$

erhoben. Zur Senkung der Abgaben werden folgende Modelle vorgeschlagen:

Modell 1: In Zukunft darf jeder pauschal einen Betrag von 500 € von der ermittelten Steuer abziehen.

Modell 2: Vor Ermittlung der Abgaben darf in Zukunft pauschal ein Freibetrag von 800 € vom Einkommen abgezogen werden.

Die Herren A. Besser, B. Weniger und C. Schnurz äußern sich folgendermaßen zu den Modellen:

A. Besser: „Ich bin für Modell 1, weil es für mich besser ist.“

B. Weniger: „Ich hätte lieber Modell 2, da muss ich weniger zahlen.“

C. Schnurz: „Mir ist das egal, ich spare bei beiden Modellen gleich viel.“

In welchen Bereichen befinden sich die Einkommen der Herren A. Besser und B. Weniger?

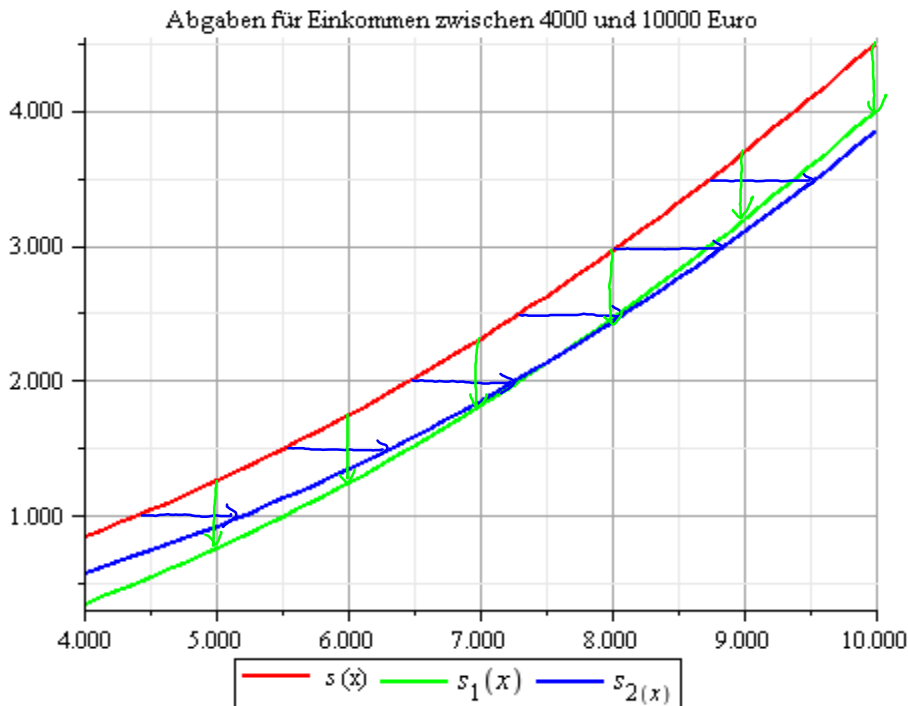
Wie hoch ist das Einkommen von Herrn C. Schnurz?

Wir überlegen zunächst, wie man die Funktionen s_1 und s_2 für die Abgaben in den beiden Modellen mit Hilfe der Funktion s ausdrücken kann.

Modell 1: Da jeder pauschal einen Betrag von 500 € von den Abgaben s abziehen kann, sind die Abgaben nach Modell 1 gegeben durch $s_1(x) = s(x) - 500$. Dies entspricht einer Verschiebung des Graphen von s um 500 nach unten.

Modell 2: Da in diesem Modell das Einkommen zunächst um einen Freibetrag von 800 € vermindert wird, sind die Abgaben nach Modell 2 gegeben durch $s_2(x) = s(x-800)$. Dies entspricht einer Verschiebung von s um 800 nach rechts.

Graphen der Abgabefunktionen:



Herr A. Besser verdient eher im unteren, Herr B. Weniger im oberen Bereich der Spanne zwischen 4000 und 10000 €.

Was Herr C. Schnurz verdient, stellen wir nun rechnerisch fest, indem wir bestimmen, für welchen Wert x die Abgaben nach Modell 1 und 2 übereinstimmen.

$$s_1(x) = s_2(x)$$

$$\Leftrightarrow s(x) - 500 = s(x-800)$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 10^{-5} x^2 + 5 \cdot 10^{-2} x - 500 = 4 \cdot 10^{-5} (x-800)^2 + 5 \cdot 10^{-2} (x-800)$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 10^{-5} x^2 + 5 \cdot 10^{-2} x - 500 = 4 \cdot 10^{-5} x^2 - 64 \cdot 10^{-3} x + 256 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} x - 40$$

$$\Leftrightarrow 64 \cdot 10^{-3} x = 500 + 256 \cdot 10^{-1} - 40$$


$$\Leftrightarrow 64 x = 485600$$

$$\Leftrightarrow x = 7587.5$$


Insgesamt ist somit Modell 1 besser für ein Einkommen von 4000 € bis 7587.50 €, Modell 2 für Einkommen von 7587.50 bis 10000 €.

Wir schauen nun allgemein, wie man aus einem bekannten Graphen einer Funktion $f(x)$ den Graphen von $y = c \cdot f(a(x-x_0)) + y_0$ (*) mit Konstanten a und c ungleich Null erhält. Mit $d = \frac{1}{c}$ schreiben wir (*) um in die Form $d(y-y_0) = f(a(x-x_0))$.

Vertikale Streckung/Stauchung
 $|d| < 1$: Streckung
 $|d| > 1$: Stauchung
 $d < 0$: zusätzlich Spiegelung an horizontaler Achse




Verschiebung um x_0 in x -Richtung
 $x_0 > 0$: nach rechts
 $x_0 < 0$: nach links




$$d(y - y_0) = f(a(x - x_0))$$

Verschiebung um y_0 in y -Richtung
 $y_0 > 0$: nach oben
 $y_0 < 0$: nach unten



Horizontale Streckung/Stauchung
 $|a| < 1$: Streckung
 $|a| > 1$: Stauchung
 $a < 0$: zusätzlich Spiegelung an vertikaler Achse



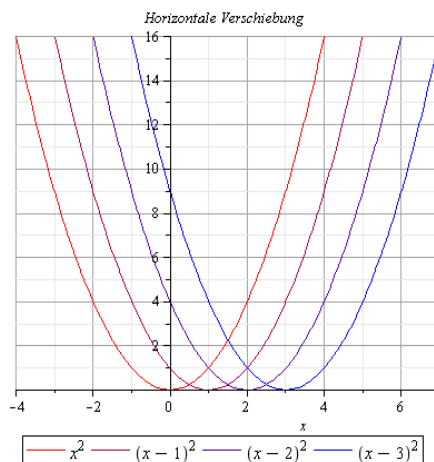
Beispiel: $f(x) = x^2$

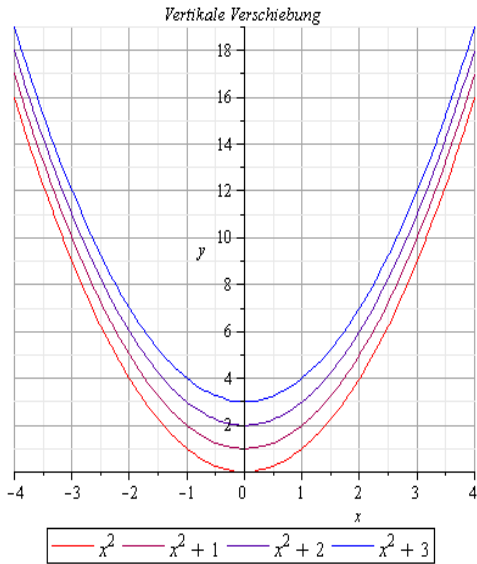
Verschiebung in x -Richtung

um $x_0 = 1, 2, 3$

$y = f(x - x_0)$, d.h.

$$y = (x - x_0)^2$$





Verschiebung in y -Richtung um
 $y_0 = 1, 2, 3$
 $y = f(x) + y_0$, d.h. $y = x^2 + y_0$
 (bzw. $y - y_0 = x^2$)

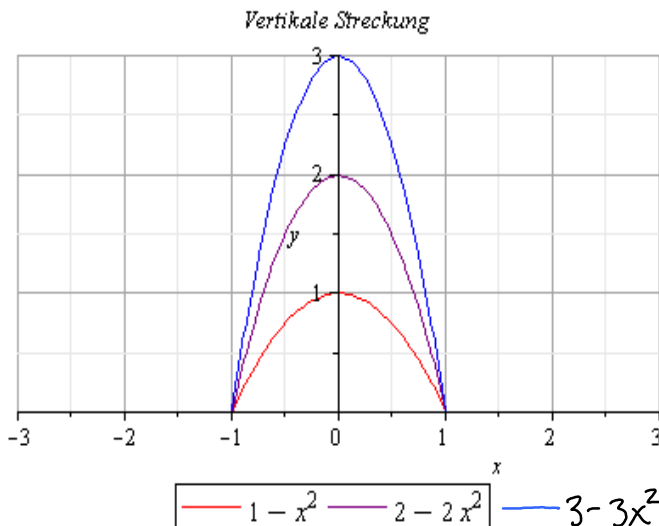
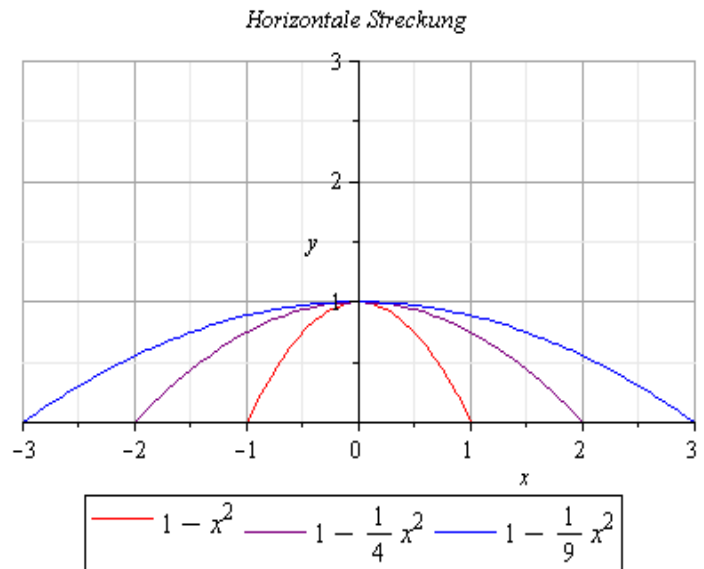
Beispiel: $f(x) = 1 - x^2$

Streckung in x -Richtung

$$a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

$$y = f(a \cdot x), \text{ d.h.}$$

$$y = 1 - (a \cdot x)^2$$



Streckung in y -Richtung
 $c = 2, 3$ (bzw. $d = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$)
 $y = c \cdot f(x)$, d.h.
 $y = c \cdot (1 - x^2)$
 (bzw. $dy = 1 - x^2$ mit $d = \frac{1}{c}$)

8. Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Wir hatten bereits gesehen, dass bei der m -maligen Verzinsung mit einem jährlichen Zinssatz von $p\%$ und jeweils weiterer Mitverzinsung des Kapitals nach t Jahren das Kapital auf

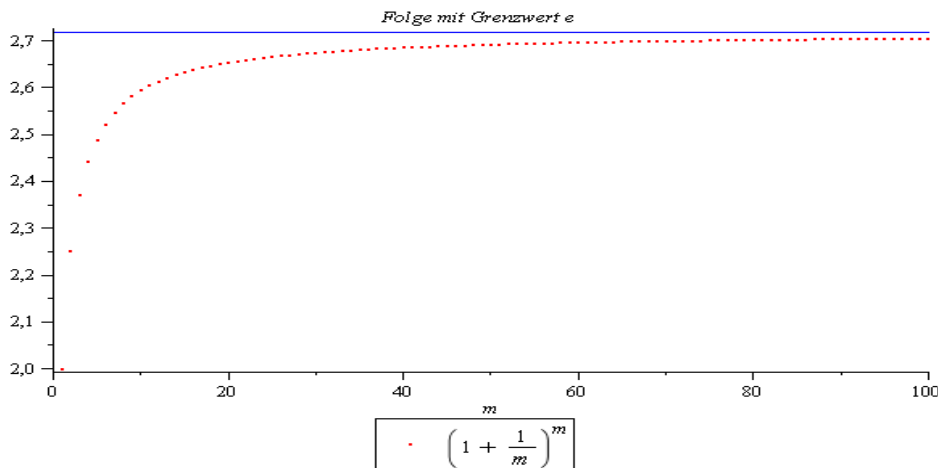
$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot t}$$

angewachsen ist.

Für den Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ hatten wir festgehalten, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = 2.71828 \dots \text{ ist.}$$

Das bedeutet, dass sich der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ für wachsende m dem Wert e nähert.



Diese Zusammenhänge wollen wir nun allgemeiner betrachten.

Definition: Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\} = f(n)$ ist eine Funktion, $f: \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{N}$.

Man kann Folgen durch Angabe des Bildungsgesetzes (Funktionsvorschrift) oder durch Auflisten der Folgenglieder (Funktionswerte) angeben.

Beispiel: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots = \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

Bei der Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ kann man beobachten, dass sich mit wachsendem n die Folgenglieder immer weniger von 0 unterscheiden,

$$\text{d.h. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Allgemein halten wir fest:

Definition: Gegeben sei eine unendliche Folge $\{a_n\}$. Nähert sich a_n mit wachsendem n genau einer reellen Zahl G an, so heißt G der Grenzwert der Folge. Man schreibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = G$$

und sagt, die Folge $\{a_n\}$ ist konvergent gegen G .

Hat die Folge keinen Grenzwert, so heißt sie divergent.

Beispiel: $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}} = -1, +1, -1, +1, \dots$ ist divergent.

Die Folgenglieder wechseln zwischen den Werten -1 und $+1$.

$\{2^n\} = 2, 4, 8, 16, \dots$ ist divergent. Mit wachsendem n werden die Folgenglieder immer größer, sie wachsen über jede beliebige Schranke. In einem solchen Fall schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$.

$\{-n^2\} = -1, -4, -9, -16, -25, \dots$ ist divergent. Mit wachsendem n fallen die Folgenglieder unter jede beliebige Schranke und man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$.

Bevor wir uns mit einigen, für Anwendungen wichtige Folgen beschäftigen, fassen wir noch einige Rechenregeln für Grenzwerte zusammen.

Rechenregeln für Grenzwerte

Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = G_a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = G_b$ mit $G_a, G_b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot G_a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = G_a + G_b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = G_a - G_b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = G_a \cdot G_b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{G_a}{G_b}, \text{ falls } G_b \neq 0.$$

Wir befassen uns nun mit zwei Typen von Folgen, deren Bildungsgesetze eine bestimmte festgelegte Struktur aufweisen.

Definition: Eine Folge $\{a_n\}$ heißt arithmetisch, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist, d.h. wenn gilt:

$$a_{n+1} = a_n + d \text{ mit } d \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Aufeinanderfolgende Folgenglieder unterscheiden sich also stets um eine additive Konstante.

Beispiel: Lineare Abschreibung

Eine Maschine wird für 25 000 € angeschafft. Es wird angenommen, dass der Wertverlust jährlich jeweils 10% ihres Anschaffungswertes beträgt. Der Restwert verringert sich also jedes Jahr um 2500 €. Bezeichnen wir mit R_n den Restwert nach n Jahren, so erhalten wir:

$$R_0 = 25000, R_1 = 22500, R_2 = 20000, R_3 = 17500, R_4 = 15000, \\ R_5 = 12500, R_6 = 10000, R_7 = 7500, R_8 = 5000, R_9 = 2500, R_{10} = 0.$$

Dies ist eine (endliche) arithmetische Folge $\{R_n\}_{n=0}^{10}$ mit

$$R_{n+1} = R_n - 2500, n = 0, \dots, 9.$$

Definition: Eine Folge $\{a_n\}$ heißt geometrisch, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist, d.h. wenn gilt:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ mit } q \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Aufeinanderfolgende Folgenglieder unterscheiden sich also stets um eine multiplikative Konstante.

Beispiel: Die Zinseszinsformel $K_n = K_0 \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$ definiert eine geometrische Folge $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $K_{n+1} = K_n \left(1 + \frac{P}{100}\right)$.

Aus der Definition kann man direkt den folgenden Aufbau einer geometrischen Folge ablesen.

$$a_1, a_2 = a_1 \cdot q, a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2, a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3, \dots,$$

d.h. allgemein: $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$.

Wir machen uns nun Gedanken über das Konvergenzverhalten von $\{q^n\}$.

Beispiel:

$$\{0.1^n\} = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, \dots$$

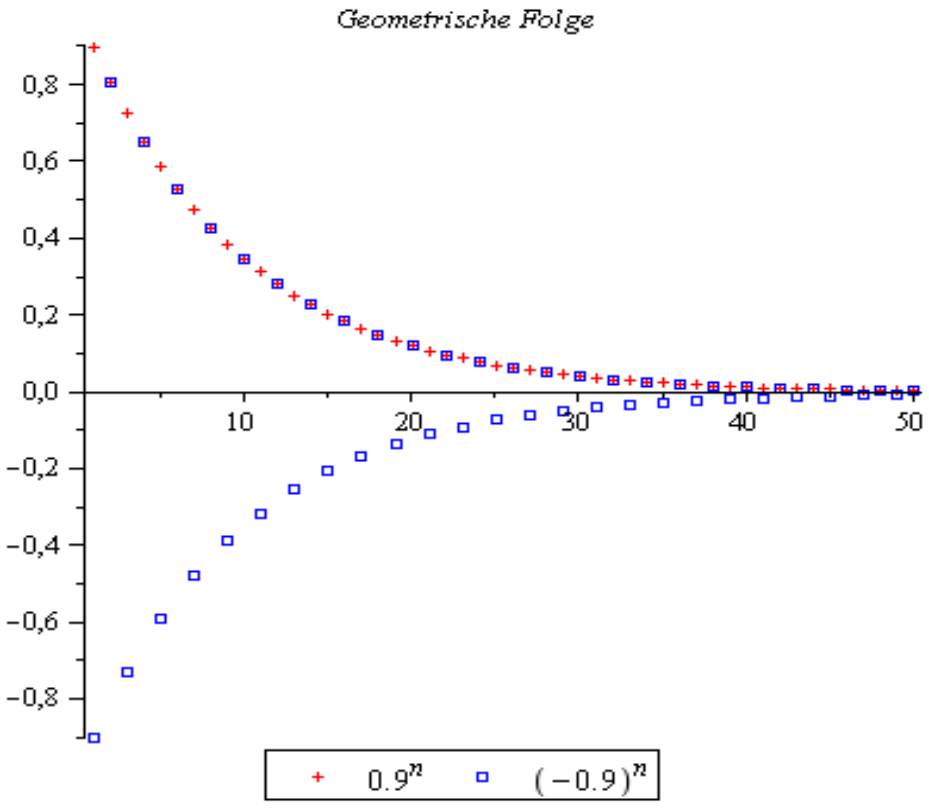
$$\{0.9^n\} = 0.9, 0.81, 0.729, 0.6251, 0.59049, \dots \quad (0.9^{25} = 0.071789\dots)$$

$$\{1.1^n\} = 1.1, 1.21, 1.331, 1.4641, 1.61051, \dots \quad (1.1^{25} = 10.834705\dots)$$

$$\{(-0.1)^n\} = -0.1, 0.01, -0.001, 0.0001, -0.00001, \dots$$

$$\{(-0.9)^n\} = -0.9, 0.81, -0.729, 0.6251, -0.59049, \dots$$

$$\{(-1.1)^n\} = -1.1, 1.21, -1.331, 1.4641, -1.61051, \dots$$



Die Beispiele untermauern folgende allgemeine Aussage.

Satz: Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$ und

$\{q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ divergent, falls $q \notin (-1, 1]$.

In vielen, insbesondere auch finanzmathematischen Anwendungen, wie z.B. bei der Berechnung von Annuitäten oder Hypothekenrückzahlungen stößt man auf geometrische Summen oder Reihen. Diese werden aus den Gliedern geometrischer Folgen gebildet.

Definition: Summiert man die ersten n Glieder einer geometrischen

Folge $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ auf, so erhält man

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j.$$

S_n heißt geometrische Summe.

Beispiel: Ein Unternehmer erwartet in diesem Jahr einen Umsatz von 10 Millionen €. Nach einer Prognose für die nächsten 9 Jahre sind Umsatzsteigerungen von 5% pro Jahr im Vergleich zum Vorjahr zu erwarten. Welcher Gesamtumsatz wird in den betrachteten 10 Jahren insgesamt erwartet? Der Gesamtumsatz lässt sich mittels einer geometrischen Summe darstellen:

$$\begin{aligned} & 10 + 10(1+0.05) + 10(1+0.05)^2 + \dots + 10(1+0.05)^9 \\ & = 10(1 + 1.05 + 1.05^2 + \dots + 1.05^9) = 10 \cdot \sum_{j=0}^9 1.05^j \approx 10 \cdot 12.58 \end{aligned}$$

Je mehr Summanden vorkommen, desto mühseliger ist es, alle Summanden einzeln zu berechnen und anschließend zu addieren. Wir überlegen daher, wie man für geometrische Summen eine einfache Berechnungsformel angeben kann.

Für $q = 1$ ist dies ganz einfach, denn

$$\sum_{j=0}^{n-1} 1^j = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} = n$$

Für $q \neq 1$ berechnen wir:

$$\left. \begin{array}{l} S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \\ q \cdot S_n = q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \end{array} \right\} -$$

$$(1-q) S_n = 1 - q^n$$

$$\text{Nun gilt, da } q \neq 1: (1-q) S_n = 1 - q^n \Leftrightarrow S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Insgesamt halten wir fest die

Formel für geometrische Summen

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}$$

Beispiel: Xaver Fidelius möchte für die Zukunft vorsorgen und überlegt

sich folgendes Modell: Über einen Zeitraum von 20 Jahren will er jeweils zu Jahresbeginn 1000 € anlegen, die am Jahresende mit 3% verzinst werden. Die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen.

Wie viel hat er nach 20 Jahren gespart?

Das Kapital nach 20 Jahren beträgt:

$$\begin{aligned} & 1000(1+0.03)^{20} + 1000(1+0.03)^{19} + 1000(1+0.03)^{18} + \dots + 1000(1+0.03) \\ & = 1000 \{ 1.03 + 1.03^2 + \dots + 1.03^{19} + 1.03^{20} \} \\ & = 1000 \cdot 1.03 \sum_{j=0}^{19} 1.03^j = 1030 \cdot \frac{1-1.03^{20}}{1-1.03} \approx 27676.49 \end{aligned}$$

In manchen Zusammenhängen ist es wichtig zu wissen, was passiert, wenn die Summation nicht bei einer festen Zahl aufhört, sondern beliebig fortgesetzt wird. Dies ist gleichbedeutend mit der Fragestellung, unter welchen Bedingungen der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} q^j = 1 + q + q^2 + \dots$$

existiert und was gegebenenfalls herauskommt.

Für $q=1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, d.h. $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist divergent.

Für $-1 < q < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, da $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$,

d.h. $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist konvergent mit dem Grenzwert $\frac{1}{1-q}$.

Für $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ ist $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ divergent.

Statt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} q^j$ schreibt man auch $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ und spricht von der geometrischen Reihe.

Für die geometrische Reihe gilt also: $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$, falls $-1 < q < 1$.

Beispiel. Eine Schätzung der Ölreserven eines Landes belaufe sich im Jahr 2010 auf 12,5 Milliarden Tonnen. Die Förderung in 2010 betrage 250 Millionen Tonnen. Die Fördermenge soll künftig um $p\%$ im Vergleich zum Vorjahr gesenkt werden. Wie groß muss p mindestens sein, damit die Ölreserven (theoretisch) für einen beliebig langen Zeitraum ausreichen?

Wir können davon ausgehen, dass $0 < p < 100$,

d.h. $0 < \frac{p}{100} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{p}{100} < 1$ gilt.

Es soll also gelten:

$$\underbrace{250 \cdot 10^6}_{\text{Fördermenge 2010}} + \underbrace{250 \cdot 10^6 \left(1 - \frac{p}{100}\right)}_{\text{Fördermenge 2011}} + \underbrace{250 \cdot 10^6 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2}_{\text{Fördermenge 2012}} + \dots \leq \underbrace{12,5 \cdot 10^9}_{\text{Gesamtreserve}}$$

$$\underbrace{250 \cdot 10^6}_{\text{Fördermenge 2010}} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{p}{100}\right)^j}_{\text{Geometrische Summe mit } q = 1 - \frac{p}{100}} \leq 12,5 \cdot 10^9$$

$$\Leftrightarrow 250 \cdot 10^6 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{p}{100}\right)^j \leq 12,5 \cdot 10^9$$

$$= \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)} = \frac{100}{p}$$

Geometrische Summe
mit $q = 1 - \frac{p}{100}$

$$\Leftrightarrow 250 \cdot 10^6 \cdot \frac{100}{p} \leq 12,5 \cdot 10^9$$

$$\Leftrightarrow \frac{250 \cdot 10^6}{12,5 \cdot 10^8} \cdot 100 \leq p$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq p$$

Die Fördermenge muss also jährlich um mindestens 2% gedrosselt werden, damit die Ölreserven (theoretisch) beliebig lange reichen.

Wir wenden uns nun dem Grenzwertbegriff für reelle Funktionen zu. Es handelt sich dabei um einen der zentralen Begriffe, ohne den sich wichtige Eigenschaften von Funktionen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit nicht vernünftig erklären lassen.

Beispiel: Gegeben sei die rationale Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir untersuchen, wie sich die Funktionswerte $f(x)$ verhalten, wenn x in der Nähe von 1 liegt.

x	0.9	0.99	0.999	...	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.71	2.9701	2.997001	...	3.003001	3.121	3.31

Die Tabelle legt nahe, dass bei immer weiterer Annäherung von x an den Wert 1 der Funktionswert immer näher an 3 heranrückt. Schaut man sich den Funktionsterm genauer an, so stellt man fest, dass $x=1$ nicht nur eine Nullstelle des Nenners, sondern auch des Zählers ist. Mittels Polynomdivision kann man den Zähler faktorisieren.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ x^2 - 1 \\ \underline{x^2 - x} \\ x - 1 \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

Also gilt: $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$
 und damit $f(x) = \frac{(x^2 + x + 1)(x - 1)}{x - 1}$

Daraus lässt sich nun der Grenzwert für x gegen 1 wie folgt bestimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x + 1) \cancel{(x - 1)}}{\cancel{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

Wir fassen nun den Grenzwertbegriff mathematisch genauer.

Definition: Seien f eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subseteq \mathbb{D}_f$ und $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq \mathbb{D}_f$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.

(Das bedeutet, dass die Funktion mindestens in einem kleinen Bereich um x_0 definiert sein soll. x_0 selbst muss nicht im Definitionsbereich liegen.)

Streben nun zu beliebigen Folgen $\{x_n\}$, die von links oder von rechts immer näher an x_0 heranrücken, die zugehörigen Funktionswerte $f(x_n)$ gegen eine Zahl G , dann heißt G Grenzwert oder Limes von f für x gegen x_0 . Man schreibt dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = G.$$

Betrachtet man nur die Näherung von rechts bzw. links an die Stelle x_0 , so spricht man vom rechtsseitigen Grenzwert G_R bzw. vom linksseitigen Grenzwert G_L und schreibt dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = G_R \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = G_L.$$

Stimmen rechts- und linksseitiger Grenzwert überein, d.h. gilt $G_R = G_L = G$, dann gilt auch insgesamt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = G$.

Die Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen sind analog zu denen für Folgen.

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Seien f und h Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = G_f$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = G_h$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot G_f$$

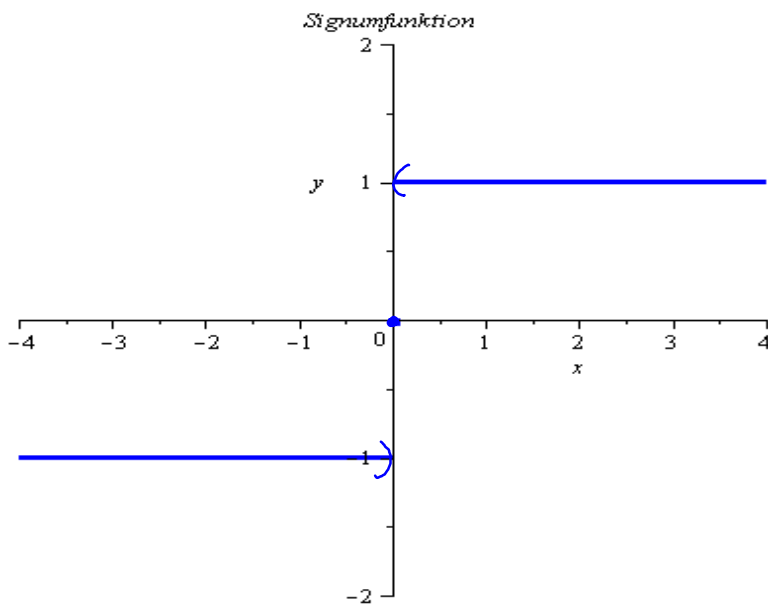
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + h(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = G_f + G_h$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - h(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = G_f - G_h$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot h(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = G_f \cdot G_h$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)} = \frac{G_f}{G_h}, \text{ falls } G_h \neq 0.$$

Beispiel: Sei $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ die Signumfunktion.



Hier gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert für x gegen 0 stimmen nicht überein.

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ existiert nicht! ∇

Außerdem sind die einseitigen Grenzwerte auch noch von dem Funktionswert an der Stelle 0 verschieden. "Man kann die Signumfunktion nicht zeichnen, ohne den Stift abzusetzen."

Man sagt auch: Die Signumfunktion ist nicht stetig an der Stelle $x=0$. Häufig werden stetige Funktionen dadurch "beschrieben", dass man ihre Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Dieser sehr anschauliche Beschreibungsversuch ist allerdings unter mathematischen Gesichtspunkten unzureichend. Wir definieren daher den Begriff der Stetigkeit mit Hilfe von Grenzwerten.

Definition: Seien $f(x)$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{D}_f$. f heißt stetig in x_0 , wenn gilt, dass rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0 übereinstimmen, d.h. kurz $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Beispiel: Für Kapitaleinlagen von 1000 € bis 100 000 € mit einem Anlagezeitraum von 1 Jahr bietet eine Bank folgende Konditionen an.

Für eine Einlage bis 10 000 € : 3% Jahreszins

über 10 000 € bis 50 000 € : 3.5% Jahreszins

über 50 000 € bis 100 000 € : 4.0% Jahreszins

Darstellung der am Jahresende fälligen Zinsen in Abhängigkeit von der Einlage x :

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot 0.03, & 1000 \leq x \leq 10000 \\ x \cdot 0.035, & 10000 < x \leq 50000 \\ x \cdot 0.04, & 50000 < x \leq 100000 \end{cases}$$

Hier hat der Graph der Funktion offensichtlich Sprungstellen bei $x = 10000$ und $x = 50000$. Bei einer anderen Funktion könnten



solche Sprungstellen aber auch kleiner und somit "unsichtbar" ausfallen. Wir untersuchen das Grenzverhalten bzgl. $x = 10000$ und $x = 50000$.

$$\lim_{x \rightarrow 10000^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10000^-} x \cdot 0.03 = 300$$

$$\lim_{x \rightarrow 10000^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10000^+} x \cdot 0.035 = 350$$

$$\lim_{x \rightarrow 50000^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 50000^-} x \cdot 0.035 = 1750$$

$$\lim_{x \rightarrow 50000^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 50000^+} x \cdot 0.04 = 2000$$

Prinzipiell können Unstetigkeitsstellen einen sehr unterschiedlichen Charakter haben, z.B. Sprungstellen, Polstellen, Definitionslücken.

Wir halten fest, dass die in Kapitel I vorgestellten Grundfunktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig sind, d.h. an allen Stellen ihres Definitionsbereichs.

Außerdem sind Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig auf dem jeweiligen Definitionsbereich.

Beispiel: Wir betrachten $f(x) = e^x$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g(x) = \sqrt{x}$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}_+$.

Beide Funktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig. Somit ist die verkettete Funktion

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\sqrt{x}} \text{ stetig für alle } x \in \mathbb{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}_+.$$

Wir beenden das Kapitel mit der exemplarischen Berechnung einiger Grenzwerte, die einige der üblichen Vorgehensweisen demonstrieren.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x - 12}{x^2 + 8x + 15}$. Was ist $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$?

Einsetzen von $x = -3$ in das Zählerpolynom liefert

$$(-3)^4 - 3 \cdot (-3)^3 - 9 \cdot (-3)^2 + 23 \cdot (-3) - 12 = 0$$

und $x = -3$ in das Nennerpolynom $(-3)^2 + 8 \cdot (-3) + 15 = 0$.

Zähler- und Nennerpolynom haben also beide an der Stelle $x = -3$ eine Nullstelle. Mit Polynomdivision berechnet man:

$$(x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x - 12) : (x + 3) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 \\ \underline{-6x^3 - 9x^2} \\ -6x^3 - 18x^2 \\ \underline{9x^2 + 23x} \\ 9x^2 + 27x \\ \underline{-4x - 12} \\ -4x - 12 \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Also: } x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x - 12$$

$$= (x^3 - 6x^2 + 9x - 4) \cdot (x + 3)$$

$$(x^2 + 8x + 15) : (x + 3) = x + 5$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x \\ \underline{5x + 15} \\ 5x + 15 \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Also: } x^2 + 8x + 15 = (x + 5) \cdot (x + 3)$$

Damit findet man $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) \cdot \cancel{(x+3)}}{(x+5) \cdot \cancel{(x+3)}}$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x+5} = \frac{-112}{2} = -56$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{h+2} - \sqrt{2})(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})}{2h(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+2-2}{2h(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}}{2\cancel{h}(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{9}} \frac{16 - 81x^2}{3\sqrt{x} - 2}$

Mit der dritten binomischen Formel gilt:

$$16 - 81x^2 = (4 + 9x)(4 - 9x) = (4 + 9x)(2 + 3\sqrt{x})(2 - 3\sqrt{x})$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{4}{9}} \frac{16 - 81x^2}{3\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow \frac{4}{9}} \frac{(4 + 9x)(2 + 3\sqrt{x}) \cancel{(2 - 3\sqrt{x})}}{-(2 - 3\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{4}{9}} (-1)(4 + 9x)(2 + 3\sqrt{x}) \\ &= (-1) \cdot 8 \cdot 4 = -32 \end{aligned}$$

9. Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

Änderungsraten, Ableitungen, Monotonie

Einflussendes Beispiel: Wir erinnern uns zunächst an ein Beispiel aus Kapitel 6, in dem es um ein Modell zur Beschreibung der Kosten $b(p)$ zur Beseitigung von $p\%$ der Verunreinigungen in einem See ging.

$$b(p) = \frac{10p}{105-p}$$

Einige Werte:

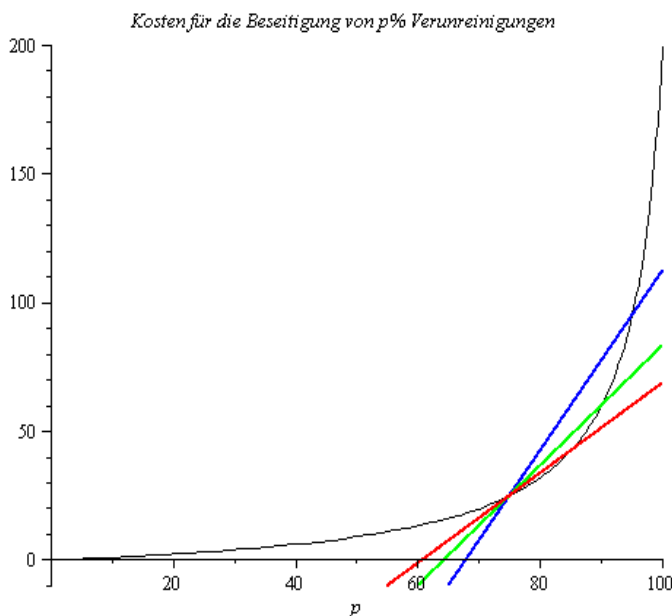
p	75	85	90	95
$b(p)$	25	42.5	60	95

Werden statt 75% der Verunreinigungen 95%, 90% bzw. 85% beseitigt, so entstehen Mehrkosten von

$$b(95) - b(75) = 70; \quad b(90) - b(75) = 35; \quad b(85) - b(75) = 17.5$$

Der durchschnittliche Zuwachs an Kosten – die durchschnittliche Änderungsrate – bei Beseitigung von 95%, 90% bzw. 85% statt 75%

$$\text{beträgt: } \frac{b(95) - b(75)}{95 - 75} = \frac{7}{2} \quad \frac{b(90) - b(75)}{90 - 75} = \frac{7}{3} \quad \frac{b(85) - b(75)}{85 - 75} = \frac{7}{4}$$



geometrisch sind dies die Steigungen der Sekanten durch die Punkte

$$P_0(75, 25) \text{ und } P_{20}(95, 95)$$

$$P_0(75, 25) \text{ und } P_{15}(90, 60)$$

$$P_0(75, 25) \text{ und } P_{10}(85, 42.5)$$

$$\text{Allgemeiner gilt: } b(75+h) = \frac{10(75+h)}{105-(75+h)} = \frac{750+10h}{30-h}$$

Die durchschnittliche Änderungsrate für die Beseitigung von $(75+h)\%$ statt 75% der Verunreinigungen, d.h. die Steigung der Sekanten durch die Punkte $P_0(75, 25)$ und $P_h(75+h, \frac{750+10h}{30-h})$, $h \neq 0$, beträgt

$$\frac{b(75+h)-b(75)}{(75+h)-75} = \frac{\frac{750+10h}{30-h} - 25}{h} = \frac{35h}{(30-h)h} = \frac{35}{30-h}$$

Wir interessieren uns nun dafür, was passiert, wenn wir P_h immer dichter an P_0 wählen, d.h. $|h|$ immer kleiner werden lassen oder anders ausgedrückt, den Grenzwert für h gegen Null betrachten.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(75+h)-b(75)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{35}{30-h} = \frac{7}{6}$$

Dies ist die momentane Änderungsrate der Kosten an der Stelle $p=75$. Geometrisch handelt es sich um die Steigung der Tangenten an den Graphen von $b(p)$ an der Stelle $p=75$.

Wir betrachten nun einen beliebigen festen Wert $p \in (0, 100)$. Die durchschnittliche Änderungsrate der Kosten bei Beseitigung von $(p+h)\%$ statt $p\%$ der Verunreinigungen beträgt:

$$\begin{aligned} \frac{b(p+h)-b(p)}{(p+h)-p} &= \frac{\frac{10(p+h)}{105-(p+h)} - \frac{10p}{105-p}}{h} \\ &= \frac{10(p+h)(105-p) - 10p(105-p-h)}{h(105-p-h)(105-p)} \\ &= \frac{1050 \cancel{h}}{\cancel{h}(105-p-h)(105-p)} = \frac{1050}{(105-p-h)(105-p)} \end{aligned}$$

Geometrisch ist dies die Steigung der Sekanten durch $P_0(p, b(p))$ und $P_h(p+h, b(p+h))$.

Die momentane Änderungsrate bei den Kosten an der Stelle p , d.h. die Steigung der Tangenten an den Graphen von $b(p)$ an der Stelle p

$$\text{ist: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(p+h)-b(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1050}{(105-p-h)(105-p)} = \frac{1050}{(105-p)^2}$$

Diesem Beispiel liegt folgendes allgemeine Konzept zugrunde.

Definition: Sei $f: D_f \rightarrow W_f$ und $x_0 \in D_f$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \text{ so heißt } f \text{ an der Stelle } x_0 \text{ differenzierbar.}$$

Der Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt 1. Ableitung

von f an der Stelle x_0 .

Ist I ein Intervall, so heißt f differenzierbar auf I , wenn f an jeder Stelle $x \in I$ differenzierbar ist. Im Falle abgeschlossener Intervalle sind an den Randpunkten die entsprechenden einseitigen Grenzwerte gemeint.

Häufig verwendet man statt $f'(x)$ auch die Notationen $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$.

Verschiedene Bezeichnungen und Sprechweisen:

$$\text{Differenzenquotient: } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall zwischen x und $x+h$

- Steigung der Sekanten durch $P_0(x, f(x))$ und $P_h(x+h, f(x+h))$

$$\text{Differentialquotient: } \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{h}$$

- momentane Änderungsrate von f an der Stelle x

- Steigung der Tangenten an der Stelle x

In ökonomischen Anwendungen findet man häufig folgende Bezeichnungen für die 1. Ableitung: Grenzkosten, Grenzertrag, Grenzgewinn, Grenzneigung zum Konsum, Grenzproduktivität, etc.; allgemein Grenz- oder Marginalfunktion.

In Kapitel 6 haben wir definiert, wann eine Funktion (streng) monoton wachsend bzw. fallend ist. Bei differenzierbaren Funktionen können wir das Monotonieverhalten einfacher mittels der 1. Ableitung untersuchen. Aus der geometrischen Interpretation ist unmittelbar der Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten und dem Vorzeichen der 1. Ableitung ersichtlich. Genauer gilt:

Satz: Sei I ein Intervall und f auf I differenzierbar. Dann gilt:

- 1) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I \Leftrightarrow f$ monoton wachsend auf I
- 2) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I \Leftrightarrow f$ monoton fallend auf I
- 3) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f$ streng monoton wachsend auf I
- 4) $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f$ streng monoton fallend auf I

Wir erinnern uns an dieser Stelle noch einmal daran, dass die strenge Monotonie einer Funktion hinreichend für die Existenz einer Umkehrfunktion ist.

Bevor wir uns die Begriffe an weiteren Beispielen klarmachen können, müssen wir zunächst wissen, was die Ableitungen unserer Grundfunktionen sind und wie man die Ableitungen verknüpfter Funktionen berechnet.

Beispiel: 1) Ist $f(x) = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, so ist die Steigung des Graphen an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gleich 0, also ist $f'(x) = 0$.

2) Ist $f(x) = ax + b$, so ist die Steigung des Graphen an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gleich a , also ist $f'(x) = a$.

3) Sei $f(x) = x^2$. Dann gilt für $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = 2x + h$$

$$\text{Somit folgt: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x,$$

$$\text{d.h. } f'(x) = 2x.$$

4) Sei $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ für $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dann gilt für $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{x+h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$\text{Somit folgt: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{d.h. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}.$$

Nun ist es zum Glück nicht so, dass wir ständig Ableitungen über Grenzwerte ermitteln müssen. Das haben findige Mathematiker schon längst erledigt und wir können die Ergebnisse verwenden.

Ableitungen der Potenz- und Wurzelfunktionen

Sei $f(x) = x^a$. Dann gilt:

$$f'(x) = ax^{a-1} \text{ für alle } \begin{cases} x \in \mathbb{D}_f, \text{ falls } a \geq 1 \\ x \in \mathbb{D}_f \setminus \{0\}, \text{ falls } (a < 1 \wedge a \neq 0) \end{cases}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^5 & \Rightarrow f_1'(x) &= 5x^4 \\ f_2(x) &= \frac{1}{x^2} = x^{-2} & \Rightarrow f_2'(x) &= -2x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3} \\ f_3(x) &= \sqrt[3]{x^7} = x^{7/3} & \Rightarrow f_3'(x) &= \frac{7}{3} x^{4/3} = \frac{7}{3} \cdot \sqrt[3]{x^4} \\ f_4(x) &= \frac{1}{\sqrt[5]{x^9}} = x^{-9/5} & \Rightarrow f_4'(x) &= -\frac{9}{5} x^{-14/5} = -\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^{14}}} \end{aligned}$$

Ableitungen der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion

Sei $f(x) = e^x$. Dann ist $f'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $f(x) = \ln x$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Um nun verknüpfte und kompliziertere Funktionen differenzieren zu können, benötigen wir Regeln dafür, wie Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen von Funktionen abgeleitet werden.

Wir stellen diese Regeln zusammen und zeigen exemplarisch, wie sich auch diese allgemeinen Regeln aus der Definition des Differentialquotienten herleiten lassen.

Ableitungsregeln unter der Voraussetzung, dass die auftretenden Ableitungen existieren:

Konstante Faktoren bleiben bei der Differentiation erhalten.

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$$

Summenregel: Die Ableitung einer Summe (Differenz) von Funktionen ist die Summe (Differenz) der Ableitungen.

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$$

$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$$

Produktregel:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

$$1) f_1(x) = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3} = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^{1/3} + x^{-3}$$

$$f_1'(x) = 3 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} + (-3) \cdot x^{-4} = 6x - \frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x^4}$$

$$2) f_2(x) = x^3 \cdot \ln x; \quad u(x) = x^3, \quad u'(x) = 3x^2, \quad v(x) = \ln x, \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_2'(x) = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3 \ln x + 1)$$

$$3) f_3(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2}; \quad u(x) = 2x^2 - 5x + 1, \quad u'(x) = 4x - 5$$

$$v(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2, \quad v'(x) = 3x^2 + x$$

$$f_3'(x) = \frac{(4x - 5)(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2) - (2x^2 - 5x + 1)(3x^2 + x)}{(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{-2x^4 + 10x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 10}{(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2)^2}$$

$$4) f_4(x) = \frac{(0.5x^2 + 3) \cdot e^x}{x^2 \cdot \ln x}$$

Ableitung des Zählers $u(x) = (0.5x^2 + 3) \cdot e^x$ mit Produktregel:

$$u'(x) = x \cdot e^x + (0.5x^2 + 3) \cdot e^x = (0.5x^2 + x + 3) \cdot e^x$$

Ableitung des Nenners $v(x) = x^2 \cdot \ln x$ mit Produktregel:

$$v'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \cdot (2 \ln x + 1)$$

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{(0.5x^2 + x + 3)e^x \cdot x^2 \cdot \ln x - (0.5x^2 + 3) \cdot e^x \cdot x \cdot (2 \ln x + 1)}{x^4 \cdot (\ln x)^2} \\ &= \frac{x \cdot e^x [(0.5x^2 + 3)(x \ln x - 1) - 6 \ln x]}{x^4 \cdot (\ln x)^2} \end{aligned}$$

Beispiele zur Interpretation der Produktregel

Bei der Förderung aus einer Ölquelle beschreibe $x(t)$ die Förderungsrate in Barrel pro Tag zur Zeit t und $p(t)$ den Preis in Dollar pro Barrel zur Zeit t . Sowohl die Förderungsrate als auch der Preis ändern sich mit der Zeit. Die Einnahmen in Dollar pro Tag betragen dann

$$R(t) = p(t) \cdot x(t).$$

Nach der Produktregel gilt: $R'(t) = p'(t) \cdot x(t) + p(t) \cdot x'(t)$.

Steigen $p(t)$ und $x(t)$ (z.B. wegen der Inflation und auf Grund von Erweiterungen der Kapazitäten der Fördereinrichtungen), d.h. $p'(t) > 0$ und $x'(t) > 0$, so wächst $R(t)$, d.h. $R'(t) > 0$ aus zwei Gründen.

$R(t)$ wächst, weil der Preis steigt:

Dieses Wachstum $p'(t) \cdot x(t)$ ist proportional zur Fördermenge.

$R(t)$ wächst aber auch, weil die Förderung zunimmt:

Dieses Wachstum $p(t) \cdot x'(t)$ ist proportional zum Preis.

Die Gesamtänderungsrate ist die Summe.

Für die relative Änderungsrate gilt: $\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{p'(t)x(t) + p(t)x'(t)}{p(t)x(t)} = \frac{p'(t)}{p(t)} + \frac{x'(t)}{x(t)}$.

Sie ist die Summe der relativen Änderungsraten des Preises und der Fördermenge.

Kettenregel: Die Ableitung einer verketteten Funktion ist das Produkt der "äußeren" und der inneren Ableitung.

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = \underbrace{\frac{d}{du} f(u(x))}_{\text{"äußere" Ableitg.}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} u(x)}_{\text{"innere" Ableitg.}} = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Beispiel: 1) $f(x) = (x^3 + 2x + 7)^{50}$ lässt sich als Verkettung von $f(u) = u^{50}$ und $u(x) = x^3 + 2x + 7$ schreiben. Es ist $f'(u) = 50u^{49}$, $u'(x) = 3x^2 + 2$.
Also: $f'(x) = \underbrace{50 \cdot (x^3 + 2x + 7)^{49}}_{\text{"äußere" Ableitg.}} \cdot \underbrace{(3x^2 + 2)}_{\text{"innere" Ableitg.}}$

2) $f(x) = e^{2x^2 - 5}$ lässt sich schreiben als Verkettung von $f(u) = e^u$ und $u(x) = 2x^2 - 5$ mit $f'(u) = e^u$, $u'(x) = 4x$. Also: $f'(x) = e^{2x^2 - 5} \cdot 4x$.

3) $f(x) = \ln(0.3 \cdot x^3 + 2)$ lässt sich schreiben als Verkettung von $f(u) = \ln u$ und $u(x) = 0.3x^3 + 2$ mit $f'(u) = \frac{1}{u}$ und $u'(x) = 0.9x^2$

$$\text{Also: } f'(x) = \frac{1}{0.3x^2 + 2} \cdot 0.9x^2 = \frac{0.9x^2}{0.3x^2 + 2}$$

Differentiation der allgemeinen Exponential- und Logarithmusfunktion

Wir verwenden, dass die natürliche Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus zueinander invers sind und Formen unter Verwendung der Rechenregeln für den Logarithmus um.

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}$$

Differentiation mit der Kettenregel liefert:

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = (\ln a) \cdot a^x$$

Dieser "Trick" lässt sich auch bei Funktionen verwenden, beider die unabhängige Variable in der Basis und im Exponenten auftritt.

Beispiel: $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x (\ln x + 1)$$

Mit der Rechenregel $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ erhält man für $f(x) = \log_a x$ die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$.

Beispiel: Wir analysieren die Aufmerksamkeit des Studenten Xaver Fidelius während einer 90 Minuten dauernden "Grundzüge der Mathematik" Vorlesung über Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit, gemessen auf einer Skala von 0 bis 100, wobei der Wert 0 Tiefschlaf und 100 hellwach mit voller Aufmerksamkeit bedeutet. Beobachtungen zufolge lässt sich die Aufmerksamkeit des besagten Studenten gut durch das folgende Modell beschreiben:

$$A(t) = \frac{1}{1080} t^3 - \frac{17}{180} t^2 + \frac{4}{3} t + 60, \quad t \in [0, 90]$$

Wir untersuchen das Monotonieverhalten mit Hilfe der 1. Ableitung

$$A'(t) = \frac{1}{360} t^2 - \frac{17}{90} t + \frac{4}{3}$$

Dies ist eine quadratische Funktion; der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Wir bestimmen zunächst die Nullstellen von $A'(t)$.

$$A'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{360} t^2 - \frac{17}{90} t + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 68t + 480 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 34 \pm \sqrt{34^2 - 480}$$

$$\Leftrightarrow t = 34 \pm \sqrt{676}$$

$$\Leftrightarrow t = 34 \pm 26$$

$$\Leftrightarrow t = 8 \vee t = 60$$

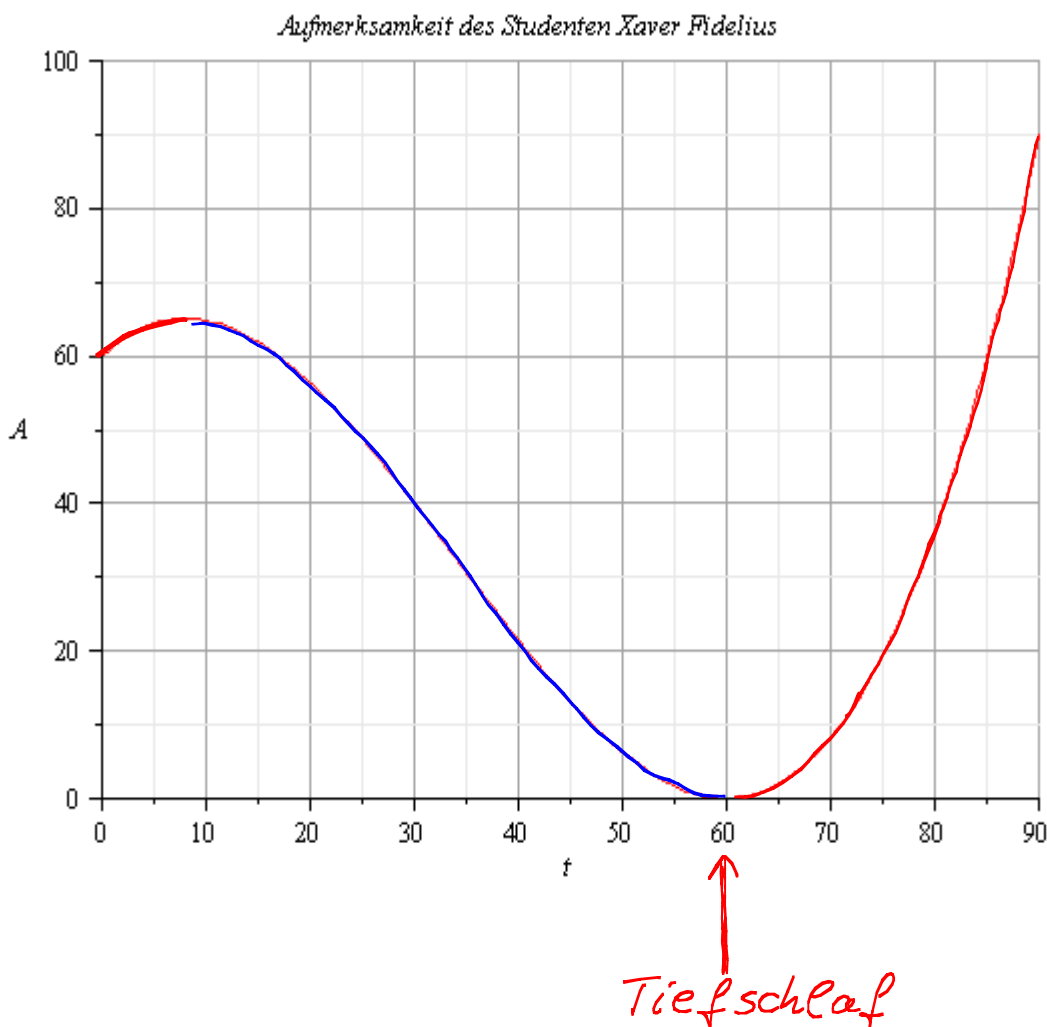
Da der Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, können wir mit Hilfe der Nullstellen auf das Vorzeichenverhalten von A' und damit auf das Monotonieverhalten von A schließen.

$$A'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in [0, 8) \vee t \in (60, 90)$$

$$A'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (8, 60)$$

Die Aufmerksamkeit von Xaver Fidelius ist also in den ersten 8 Minuten streng monoton wachsend, zwischen der 8ten und 60ten Minute streng monoton fallend und ab der 60ten Minute wieder streng monoton wachsend.

Für $t=60$ gilt: $A(60)=0$ "Tiefschlaf"



Ableitungen höherer Ordnung, Krümmungsverhalten
Ist die 1. Ableitung f' einer Funktion f wieder differenzierbar, dann können wir die Ableitung von f' , also

$(f')'$ bilden. Diese wird mit f'' bezeichnet und heißt 2. Ableitung von f .

Andere übliche Schreibweisen sind

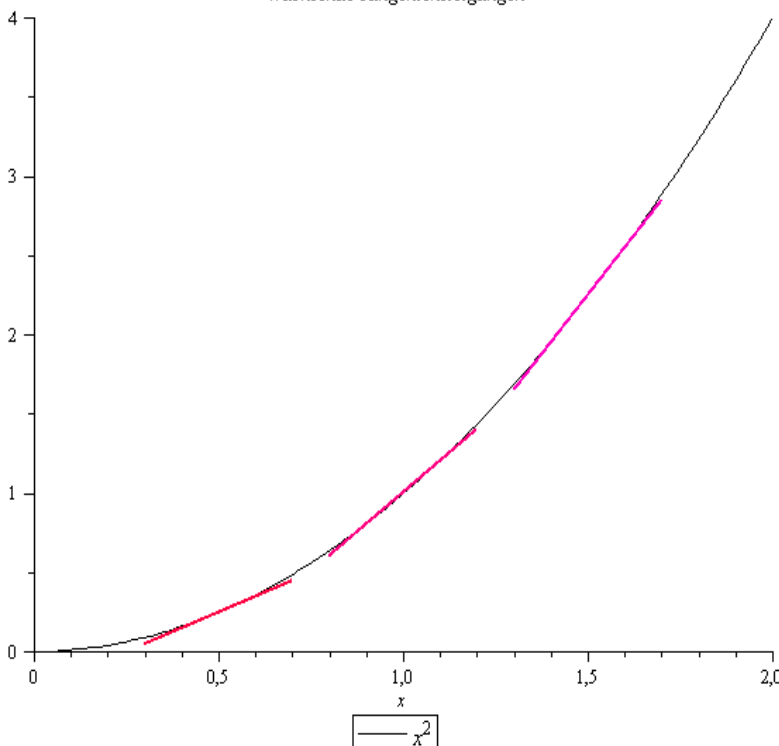
$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

Entsprechend kann man nun im Falle der Differenzierbarkeit wieder die Ableitung von f'' bilden und erhält die 3. Ableitung f''' von f u.s.w.

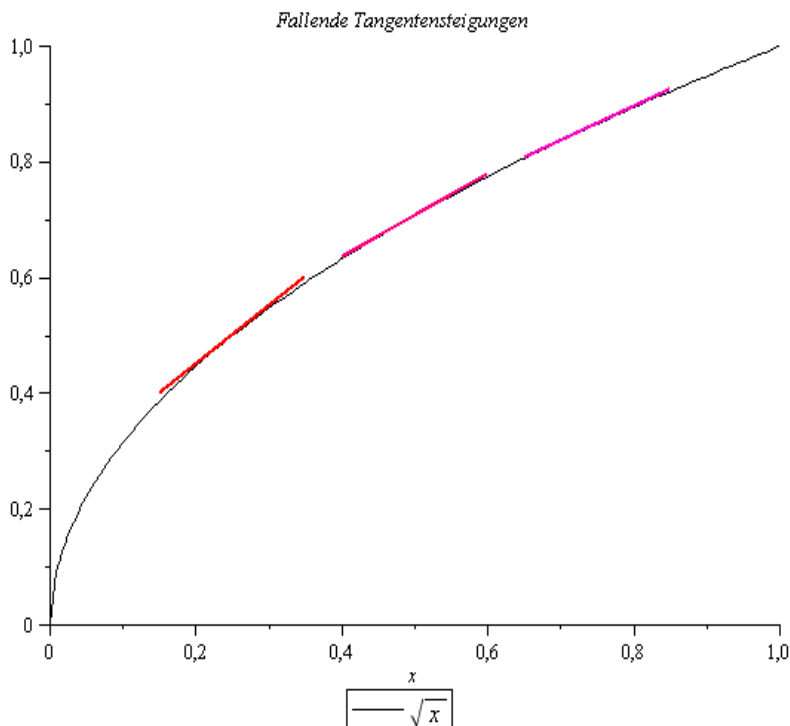
Wir befassen uns nun zunächst genauer mit der 2. Ableitung und erinnern uns daran, wie das Vorzeichen der Ableitung mit dem Vorzeichen zusammenhängt. Wenden wir die Ergebnisse auf f' an, so erhalten wir mit der Bezeichnung I für ein Intervall:

- 1) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I \Leftrightarrow f'$ monoton wachsend auf I
- 2) $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I \Leftrightarrow f'$ monoton fallend auf I

Wachsende Tangentensteigungen



Die Steigung der Tangenten ist mit zunehmendem x monoton wachsend, $f''(x) \geq 0$. Der Graph beschreibt eine Linkskurve.



Die Steigung der Tangenten ist mit zunehmendem x monoton fallend, $f''(x) \leq 0$. Der Graph beschreibt eine Rechtskurve.

Dieses Krümmungsverhalten wird nun exakter definiert. Anschließend geben wir an, wie man dies im Falle der zweimaligen Differenzierbarkeit mit Hilfe der zweiten Ableitung untersuchen kann.

Definition: Eine Funktion f heißt konvex auf einem Intervall I , falls jede Strecke, die zwei beliebige Punkte des Graphen verbindet, oberhalb oder auf dem Graphen verläuft, was einer Linkskurve des Graphen entspricht.

Eine Funktion f heißt konkav auf einem Intervall I , falls jede Strecke, die zwei beliebige Punkte des Graphen verbindet, unterhalb oder auf dem Graphen verläuft, was einer Rechtskurve des Graphen entspricht.

Aus den oben angegebenen geometrischen Überlegungen kann man folgendes einsehen.

Satz: Die Funktion f sei auf einem Intervall I zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$1) f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in I \Leftrightarrow f \text{ ist konvex auf } I$$

$$2) f''(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in I \Leftrightarrow f \text{ ist konkav auf } I$$

In vielen ökonomischen Modellen ist die Unterscheidung zwischen konvexen und konkaven Funktionen, zusammen mit dem Monotonieverhalten von Bedeutung.

Beispiel: Bei einem Einkommen zwischen 4000 € und 10000 € sollen die Abgaben

$$s(x) = 4 \cdot 10^{-5} x^2 - 5 \cdot 10^{-2} x \text{ betragen.}$$

$$\text{Es gilt: } s'(x) = 8 \cdot 10^{-5} x - 5 \cdot 10^{-2}$$

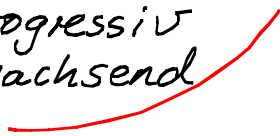



$$s'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 8 \cdot 10^{-5} x - 5 \cdot 10^{-2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{8} \cdot 10^3$$

Also ist $s'(x)$ insbesondere auf $[4000, 10000]$ monoton wachsend.

$$\text{Weiter ist } s''(x) = 8 \cdot 10^{-5} \geq 0$$

Damit ist s monoton wachsend und konvex auf $[4000, 10000]$. In diesem Zusammenhang spricht man auch von progressivem Wachstum.

	$f' \geq 0$ (f wachsend)	$f' \leq 0$ (f fallend)
$f'' \geq 0$ (f konvex)	progressiv wachsend 	degressiv fallend 
$f'' \leq 0$ (f konkav)	degressiv wachsend 	progressiv fallend 

Beispiel: Wir untersuchen folgende kubische Kostenfunktion.

$$C(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x + 1, \quad x \geq 0.$$

$$\text{Es gilt } C'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

$$C''(x) = x - 2$$

$$\text{Weiter ist } C'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Da der Graph von C' eine nach oben geöffnete Parabel und $x=2$ die einzige Nullstelle ist, gilt

$$C'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \geq 0.$$

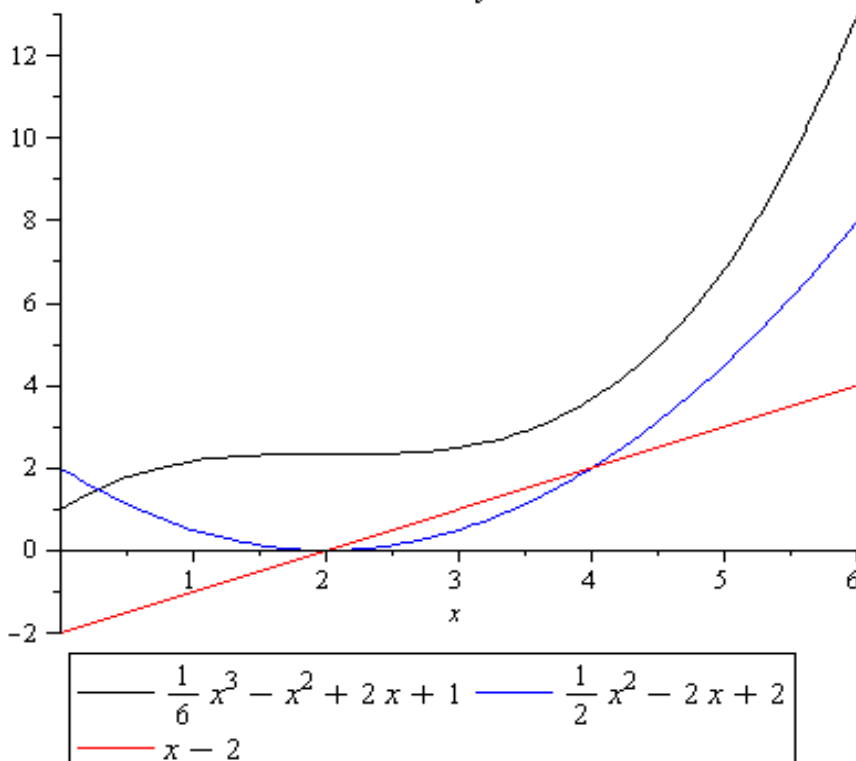
Somit ist $C(x)$ insgesamt monoton wachsend.

Ferner ist $C''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ und

$$C''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2,$$

d.h. $C(x)$ ist konkav auf $[0, 2]$ und konvex auf $[2, \infty)$.

Kubische Kostenfunktion



Beispiel: Wir betrachten eine allgemeine Produktionsfunktion in Abhängigkeit vom Kapital $K > 0$:

$$Y(K) = A \cdot K^a \text{ mit } A > 0 \text{ konstant}$$

und $a > 0, a \neq 1$.

$$Y'(K) = A \cdot a \cdot K^{a-1}$$

$$Y''(K) = A \cdot a(a-1) K^{a-2}$$

Es gilt: $Y'(K) \geq 0$ für alle $a > 0$ und $K > 0$, also ist $Y(K)$ monoton wachsend.

$$Y''(K) \geq 0 \Leftrightarrow a > 1$$

$$Y''(K) \leq 0 \Leftrightarrow a < 1$$

Also ist $Y(K)$ konkav für $0 < a < 1$ und konvex für $a > 1$ mit $K > 0$.

lokale und globale Extrema

In vielen ökonomischen Anwendungen treten Fragen nach optimalen Lösungen auf. Beispiele hierfür sind:

Wie lassen sich Kapital und Arbeitskraft in einem Unternehmen so einsetzen, dass der Gewinn maximiert oder die Kosten minimiert werden?

Wie viel Dünger sollte eingesetzt werden, um in einem landwirtschaftlichen Betrieb einen möglichst hohen Gewinn zu erzielen?

Bei zugrundeliegenden mathematischen Modellen in Form von Funktionen bedeutet dies, maximale bzw. minimale Funktionswerte zu bestimmen und Stellen, an denen diese angenommen werden. Bevor wir auf konkrete Beispiele eingehen können, müssen wir uns zunächst mit dem mathematischen Werkzeug, insbesondere im Zusammenhang mit den Methoden der Differentialrechnung, befassen.

Definition: Sei $f: D_f \rightarrow W_f$ und $x_0 \in D_f$.

1) globale Extrema

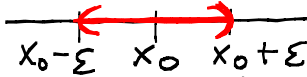
a) f hat an der Stelle x_0 ein globales Minimum $f(x_0)$, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D_f$.

b) f hat an der Stelle x_0 ein globales Maximum $f(x_0)$, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D_f$.

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe Optimal-, Extremalstellen und Optimal-, Extremwert.

2) Lokale (relative) Extrema

Zu $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit $U_\varepsilon(x_0)$ das offene Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.



a) f hat an der Stelle x_0 ein lokales (relatives) Minimum $f(x_0)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

b) f hat an der Stelle x_0 ein lokales (relatives) Maximum $f(x_0)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe lokale (relative) Extremalstellen und Extremwerte.

Wir beschäftigen uns nun mit Kriterien, wann Minima und Maxima existieren und mit Methoden, wie man diese findet. Ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die Existenz liefert der folgende Satz.

Satz: Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in [a, b]$, in dem f ein Minimum besitzt und (mindestens) ein $x_1 \in [a, b]$, in dem f ein Maximum besitzt, d. h.

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ für alle } x \in [a, b].$$

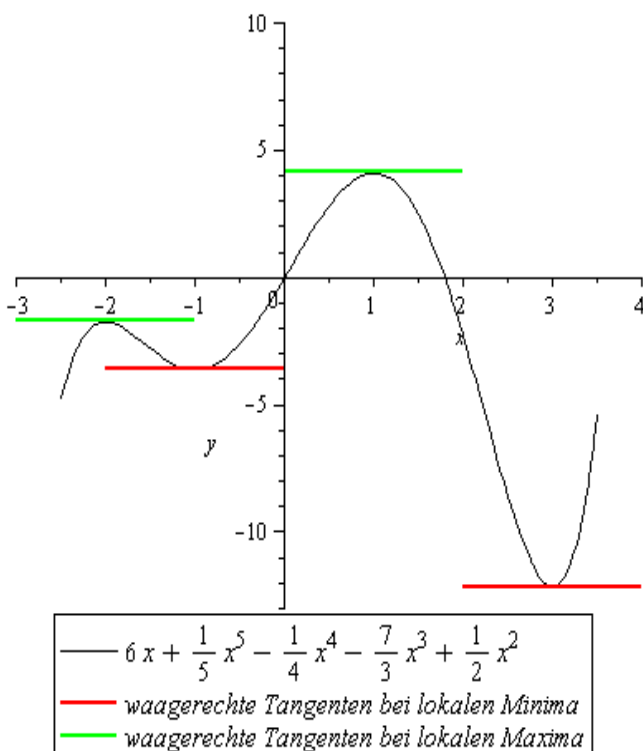
Zur Bestimmung globaler Extrema sind folgende Punkte abzuarbeiten:

- Bestimmung aller lokalen Extrema
- gegebenenfalls Untersuchung der Funktion
 - an Intervallrändern
 - für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$
 - an Definitionslücken

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit der Bestimmung lokaler Extrema mit Hilfe der Methoden der Differentialrechnung, d.h. unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die zu untersuchende Funktion.

Anschaulich sollte zunächst folgendes klar sein.

Bei einem lokalen Minimum ist die Funktion vor dem Minimum fallend und danach wachsend. Ist f differenzierbar, so heißt dies, dass die Tangentensteigung vor dem Minimum kleiner oder gleich Null, im Minimum gleich Null und danach größer oder gleich Null ist. Weiter sieht man, dass der



Graph der Funktion im Bereich des Minimums eine Linkskurve beschreibt, d.h. f konvex ist, was sich mit dem Vorzeichen der 2. Ableitung beschreiben lässt.

Bei einem lokalen Maximum ist die Funktion vor dem Maximum wachsend und danach fallend. Ist f differenzierbar, so heißt dies, dass die Tangentensteigung vor dem Maximum

größer oder gleich Null, im Maximum gleich Null und danach kleiner oder gleich Null ist. Weiter sieht man, dass der Graph von f im Bereich des Maximums eine Rechtskurve beschreibt, d.h. f konkav ist, was sich mit dem Vorzeichen der 2. Ableitung beschreiben lässt.

Wir fassen diese anschaulichen Überlegungen in einem Satz zusammen, der einen Überblick über die wichtigsten Kriterien zum Auffinden lokaler Extrema liefert.

Dabei bezeichnen wir Punkte $(x_0, f(x_0))$, in denen $f'(x_0) = 0$ ist (d.h. Punkte mit waagerechter Tangente bzw. Punkte, in denen die momentane Änderungsrate Null ist) als stationäre Punkte.

Satz:

1) Notwendige Bedingung für lokale Extrema.

Eine differenzierbare Funktion f besitzt an einer lokalen Extremalstelle x_0 stets eine waagerechte Tangente, d. h. es gilt $f'(x_0) = 0$.

2) Untersuchung mit Hilfe der 1. Ableitung

Ist f eine differenzierbare Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein stationärer Punkt von f , dann gilt:

a) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

b) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

3) Untersuchung mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung

Ist f eine zweimal differenzierbare Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein stationärer Punkt von f , dann gilt:

a) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

b) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$, dann

besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

- c) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ ein Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente, dazu später mehr).
- 4) Untersuchung mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung
Ist f eine zweimal differenzierbare Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein stationärer Punkt von f , dann gilt:
- a) Ist $f''(x_0) > 0$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.
- b) Ist $f''(x_0) < 0$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.
- c) Ist $f''(x_0) = 0$, dann liefert das Kriterium keine Aussage.

Beispiel: Wir bestimmen alle lokalen Extrema von

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2.$$

Es gilt $f'(x) = 3x^2 + 6x$ und

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

Somit sind $P(0, -2)$ und $Q(-2, 2)$ stationäre Punkte von f und damit Kandidaten für lokale Extrema.

Weiter gilt $f''(x) = 6x + 6$ und

$$f''(0) = 6 > 0 \text{ und } f''(-2) = -6 < 0.$$

Aus $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum $f(0) = -2$ besitzt.

Aus $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) < 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = -2$ ein lokales Maximum $f(-2) = 2$ besitzt.

Beispiel: Wir bestimmen alle lokalen Extrema von

$$f(x) = x^2 \cdot 2^x.$$

Zunächst sei daran erinnert, dass $2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln 2}$ gilt, d.h. $\frac{d}{dx}(2^x) = \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$.

$$\text{Damit gilt } f'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot \ln 2 \cdot 2^x = (2x + \ln 2 \cdot x^2) \cdot 2^x$$

$$\text{und } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x + x^2 \cdot \ln 2) \cdot 2^x = 0 \quad | : 2^x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(2 + x \cdot \ln 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{\ln 2}$$

Somit sind $P(0, 0)$ und $Q(-\frac{2}{\ln 2}, \frac{4}{(\ln 2)^2} \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}})$ stationäre Punkte von f und damit Kandidaten für lokale Extrema.

Weiter gilt $f''(x) = (2 + 2 \cdot \ln 2 \cdot x) \cdot 2^x + (2x + \ln 2 \cdot x^2) \cdot \ln 2 \cdot 2^x$
 $= (2 + 4 \cdot \ln 2 \cdot x + (\ln 2)^2 \cdot x^2) \cdot 2^x$ und

$$f''(0) = 2 > 0 \text{ und}$$

$$f''(-\frac{2}{\ln 2}) = (2 + 4 \cdot \ln 2 \cdot \frac{-2}{\ln 2} + (\ln 2)^2 \cdot \frac{4}{(\ln 2)^2}) \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}} = -2 \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}} < 0.$$

Aus $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$

folgt, dass f an der Stelle

$x = 0$ ein lokales Minimum

$f(0) = 0$ besitzt.

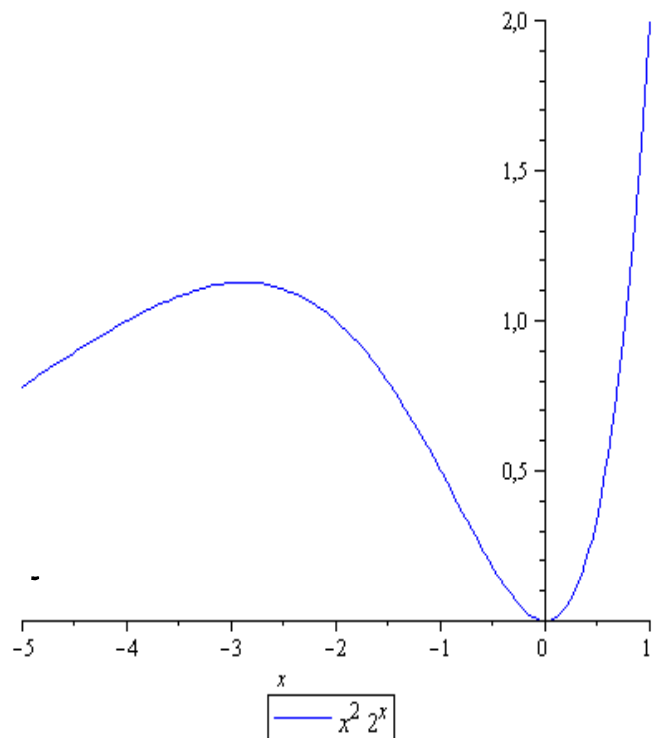
Aus $f'(-\frac{2}{\ln 2}) = 0$ und $f''(-\frac{2}{\ln 2}) < 0$

folgt, dass f an der Stelle

$x = -\frac{2}{\ln 2}$ ein lokales Maximum

$$f(-\frac{2}{\ln 2}) = \frac{4}{(\ln 2)^2} \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}}$$

besitzt.



Wir erinnern uns daran, dass wir zur Bestimmung globaler Extrema gegebenenfalls auch Grenzwerte betrachten müssen, wenn Intervallrandpunkte nicht zum Definitionsbereich gehören, wenn die Funktion Definitionslücken hat oder das Verhalten für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ untersucht werden muss.

In diesem Zusammenhang treten häufig Quotienten von Funktionen auf, in denen bei Grenzbetrachtungen sowohl die Zähler- als auch die Nennerfunktion beide gegen Null oder beide gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ streben. Man kann dann nicht so einfach auf das Verhalten der Quotientenfunktion schließen. Dies hängt wesentlich vom Verhältnis des Wachstumsverhaltens der Zähler- und Nennerfunktion ab.

Beispiel:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ist ein (zunächst unbestimmter) Ausdruck vom Typ " $\frac{0}{0}$ ".

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$ ist ein (zunächst unbestimmter) Ausdruck vom Typ " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Häufig gelingt es, Ausdrücke vom Typ " $\frac{0}{0}$ " bzw. " $\frac{\infty}{\infty}$ " durch die folgende Regel zu bestimmen.

Regel von l'Hospital: f und g seien in x_0 differenzierbare Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ wenn } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.}$$

Der Satz gilt auch für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ und einseitige Grenzwerte.

Achtung! Die Voraussetzungen müssen geprüft werden. Sind diese nicht erfüllt, so erhält man in der Regel falsche Ergebnisse.

Beispiel:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ist vom Typ $\frac{0}{0}$.

Somit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$ ist vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$.

Somit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot e^x} = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ ist vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$.

Somit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

4) Sei $a > 1$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{a^x}$ ist vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$.

Somit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\ln a \cdot a^x}$ wieder vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$.

Somit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\ln a \cdot a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(\ln a)^2 \cdot a^x} = 0$

Entsprechend kann man vorgehen, um zu zeigen, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ ist für $n \in \mathbb{N}$ und $a > 1$.

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz x^n . Kurz: "Exponentiale ertränken Potenzen".

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$ ist vom Typ $0 \cdot (-\infty)$. Indem wir

$x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ schreiben, erhalten wir

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ vom Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.

Somit: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$.

Beispiel: Wir betrachten noch einmal die Funktion $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ und untersuchen, ob die Funktion globale Extrema besitzt. Wir hatten bereits festgestellt, dass f an der Stelle $x=0$ ein lokales Minimum $f(0)=0$ und an der Stelle $x = -\frac{2}{\ln 2}$ ein lokales Maximum $f\left(-\frac{2}{\ln 2}\right) = \frac{4}{(\ln 2)^2} \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}}$ besitzt. Weiter gilt nun $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot 2^x = \infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot 2^x$ ist vom Typ " $\infty \cdot 0$ ". Durch Umschreiben

in $x^2 \cdot 2^x = \frac{x^2}{2^{-x}}$ erhalten wir

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot 2^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2^{-x}}$ vom Typ " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

$$\begin{aligned} \text{Somit: } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot 2^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-\ln 2 \cdot 2^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(\ln 2)^2 \cdot 2^{-x}} = 0 \end{aligned}$$

Damit besitzt f an der Stelle $x=0$ ein globales Minimum $f(0)=0$. f besitzt aber wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ kein globales Maximum.

Beispiel: Der Student Xaver Fidelius ist in seinem letzten Studienjahr und hat 6000 € zur Verfügung. Im Folgejahr werden es 36000 € sein. Er plant für sein letztes Studienjahr einen Konsum von c_1 , für das Folgejahr einen Konsum von c_2 so, dass die Nutzenfunktion

$$U = \ln(1+c_1) + \frac{1}{1.03} \ln(1+c_2) \quad , \quad c_1, c_2 > 0$$

maximiert wird. Dazu hat er die Möglichkeit Geld mit einem Zinssatz von 10% zu leihen, damit er in seinem letzten Studienjahr mehr als

6000 € ausgeben kann. Den geliehenen Betrag von $c_1 - 6000$ muss er dann im nächsten Jahr zusammen mit den Zinsen zurückzahlen.

Wir überlegen zunächst, wie c_1 und c_2 zueinander in Beziehung stehen.

$$c_2 = 36000 - \underbrace{\left(1 + \frac{10}{100}\right)(c_1 - 6000)}_{\text{geliehenes Geld + Zinsen}} = 42600 - 1.1 \cdot c_1$$

Damit $c_2 \geq 0$ bleibt, muss $c_1 \leq \frac{42600}{1.1} = \frac{426000}{11}$ sein.

Wir setzen den Ausdruck für c_2 in die Nutzenfunktion ein und erhalten

$$\begin{aligned} u &= \ln(1+c_1) + \frac{1}{1.03} \ln(1 + 42600 - 1.1 \cdot c_1) \\ &= \ln(1+c_1) + \frac{1}{1.03} \ln(42601 - 1.1 \cdot c_1) \end{aligned}$$

nur noch in Abhängigkeit von c_1 .

Wir untersuchen die Funktion mit Hilfe ihrer 1. Ableitung nach c_1 .

$$\begin{aligned} \frac{du}{dc_1} &= \frac{1}{1+c_1} + \frac{1}{1.03} \cdot \frac{1}{42601 - 1.1 \cdot c_1} \cdot (-1.1) \\ &= \frac{1}{1+c_1} - \frac{1.1}{1.03 \cdot (42601 - 1.1 \cdot c_1)} \\ &= \frac{1.03 \cdot (42601 - 1.1 \cdot c_1) - 1.1 \cdot (1+c_1)}{(1+c_1) \cdot 1.03 \cdot (42601 - 1.1 \cdot c_1)} \\ &= \frac{43877.93 - 2.233c_1}{\underbrace{(1+c_1)}_{>0} \cdot 1.03 \cdot \underbrace{(42601 - 1.1c_1)}_{=1+c_2 > 0}} \end{aligned}$$

Da der Nenner stets größer als Null ist, hängt das Vorzeichen von $\frac{du}{dc_1}$ nur vom Zähler ab.

Es gilt:

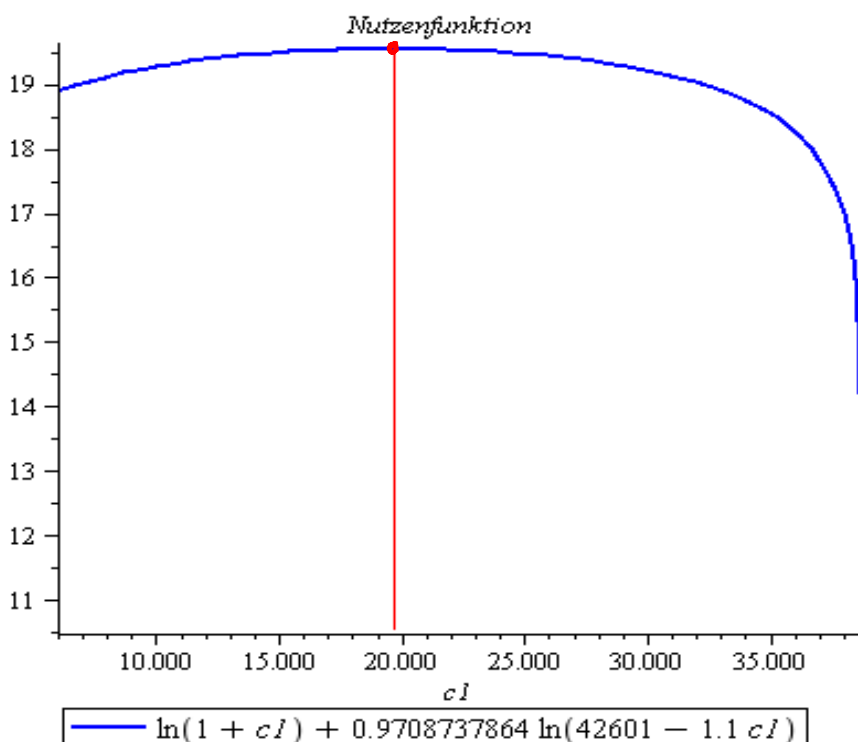
$$\frac{dU}{dc_1} > 0 \Leftrightarrow c_1 < \frac{43877.93}{2.233}$$

$$\frac{dU}{dc_1} = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{43877.93}{2.233}$$

$$\frac{dU}{dc_1} < 0 \Leftrightarrow c_1 > \frac{43877.93}{2.233}$$

Somit ist U streng monoton wachsend $[6000, c_1^*]$ und streng monoton fallend auf $(c_1^*, \frac{426000}{11}]$ mit $c_1^* = \frac{43877.93}{2.233} \approx 19649.77$.

U besitzt also an der Stelle c_1^* ein absolutes Maximum. Insgesamt wird der Student nach diesen Überlegungen einen Betrag von $c_1^* - 6000 \approx 13649.77$ leihen, im letzten Studienjahr $c_1^* \approx 19649.77$ ausgeben und im Folgejahr $c_2^* = 42600 - 1.1 \cdot c_1^* \approx 20985.26$.



Definition: Sei f eine Funktion. Punkte, an denen der Graph der Funktion von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder umgekehrt übergeht, heißen Wendepunkte. An Wendepunkten wechselt also das Verhalten der Funktion von konkav nach konvex bzw. umgekehrt. Wendepunkte mit waagerechter Tangente heißen Sattelpunkte.

Die wichtigsten Kriterien zum Auffinden von Wendestellen sind in dem folgenden Satz zusammengefasst.

Satz:

1) Notwendige Bedingung

Besitzt eine zweimal differenzierbare Funktion an einer Stelle x_0 eine Wendestelle, so gilt $f''(x_0) = 0$.

2) Untersuchung mit Hilfe der 2. Ableitung

Sei f zweimal differenzierbar und $f''(x_0) = 0$. Dann gilt: Wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, dann ist $(x_0, f(x_0))$ Wendepunkt von f .

3) Untersuchung mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung

Ist die Funktion f dreimal differenzierbar und gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ Wendepunkt von f .

Beispiel: Wir bestimmen Wendepunkte von

$$f(x) = \frac{1}{10}x^6 - x^4.$$

$$\text{Es gilt: } f'(x) = \frac{3}{5}x^5 - 4x^3$$

$$f''(x) = 3x^4 - 12x^2 = 3x^2(x^2 - 4) = 3x^2(x-2)(x+2)$$

$$\text{Also ist: } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

Somit sind die Punkte $P(0,0)$, $Q(2, -\frac{48}{5})$ und $R(-2, -\frac{48}{5})$ mögliche Kandidaten für Wendepunkte.

Weiter gilt: $f'''(x) = 12x^3 - 24x$

$$f'''(0) = 0, f'''(2) = 48, f'''(-2) = -48$$

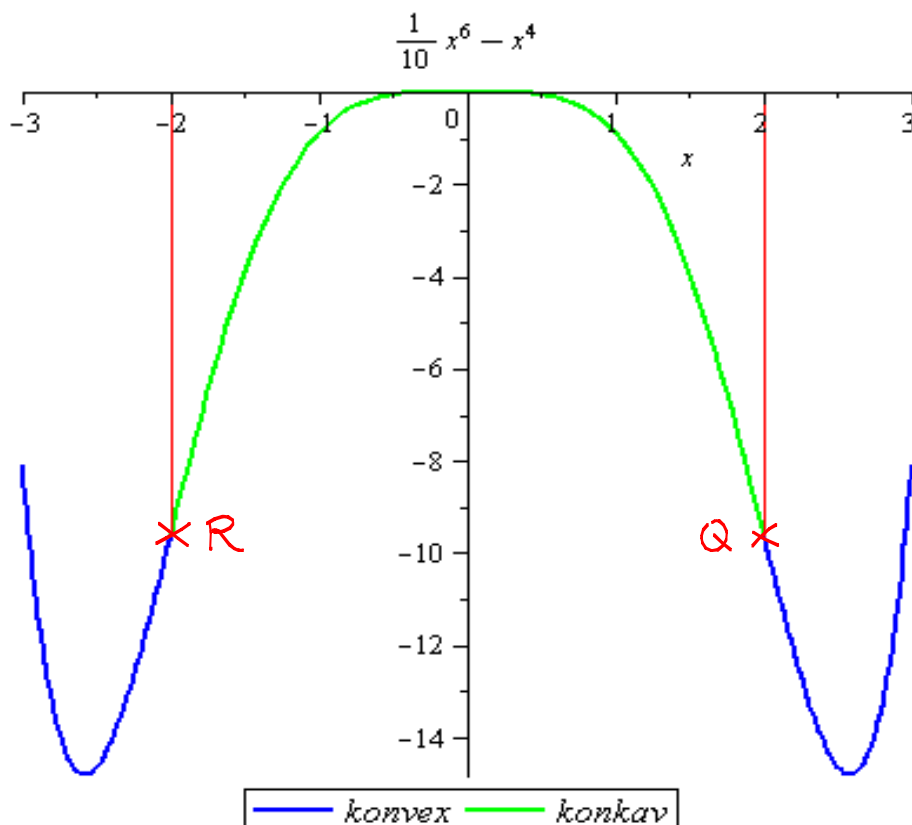
Somit gilt:

$f''(2) = 0$ und $f'''(2) \neq 0$, also ist $Q(2, -\frac{48}{5})$ Wendepunkt von f .

$f''(-2) = 0$ und $f'''(-2) \neq 0$, also ist $R(-2, -\frac{48}{5})$ Wendepunkt von f .

Aus $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 0$ können wir nichts schließen. Wir müssen daher das Vorzeichen von f'' links und rechts um die Stelle 0 untersuchen.

Für $x \in (-2, 0)$ gilt $f''(x) < 0$ und für $x \in (0, 2)$ ebenfalls $f''(x) < 0$. Somit hat f'' an der Stelle 0 keinen Vorzeichenwechsel, d.h. in im Bereich von $P(0,0)$ konkav. $P(0,0)$ ist somit kein Wendepunkt.



10. Integralrechnung

Häufig gibt es Problemstellungen, in denen eine Funktion aus der Kenntnis ihrer Ableitung bestimmt werden muss. Dies ist Gegenstand der Integralrechnung, die auch als Umkehrung zur Differentialrechnung betrachtet werden kann.

Anwendungen der Integralrechnung sind z.B.

- Flächenberechnungen
- Bestimmung der Kostenfunktion aus der Grenzkostenfunktion
- Bestimmung des mittleren Einkommens von Personen mit einem Einkommen zwischen a und b .
- Bestimmung der Gesamtnachfrage nach einem Gut aus der Nachfragefunktion

Bevor wir uns beispielhaft solchen Anwendungsproblemen zuwenden können, müssen wir uns mit den Grundlagen der Integralrechnung vertraut machen.

Unbestimmte Integrale

Wir behandeln zunächst folgende Fragestellung:

Zu einer gegebenen Funktion f sind Funktionen F gesucht, so dass $F' = f$ gilt.

Beispiel: $f(x) = x^2$

Aus der Differentialrechnung wissen wir, dass $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$ gilt. Also gilt für $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, dass $F'(x) = x^2 = f(x)$ ist.

Solche Funktionen F heißen Stammfunktionen von f .
Genauer definieren wir:

Definition: Sei I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Jedes $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ heißt eine Stammfunktion von f auf I .

Beispiel: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7$ ist ebenfalls Stammfunktion von $f(x) = x^2$, da $F'(x) = x^2 = f(x)$ gilt.

Zwei Funktionen, die dieselbe Ableitung besitzen, können sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, da nur die Ableitung einer Konstanten verschwindet. Ist also F Stammfunktion von f , dann ist auch $F + C$ für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ Stammfunktion von f . Weitere Stammfunktionen gibt es nicht.

Die Menge aller Stammfunktionen von f fasst man unter folgendem Begriff zusammen.

Definition: Sei F eine (beliebige) Stammfunktion von f . Dann heißt die Menge aller Stammfunktionen von f

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

unbestimmtes Integral von f .

(\int ist das Integralzeichen, $f(x)$ der Integrand und C die Integrationskonstante. Aus dx ist ersichtlich, dass x die Integrationsvariable ist.)

Beispiel: Die Grenzkostenfunktion (1. Ableitung der Kostenfunktion) eines Unternehmens sei $K'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Weiter sei bekannt, dass die Fixkosten 200 sind. Gesucht ist die zugehörige Kostenfunktion.

Wir bestimmen zunächst $\int (3x^2 + 2x + 1) dx$.

Da $\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 + x) = 3x^2 + 2x + 1 = K'(x)$ ist, gilt

$$\int (3x^2 + 2x + 1) dx = x^3 + x^2 + x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Mit den vorgegebenen Fixkosten von 200 ermitteln wir daraus die Kostenfunktion $K(x) = x^3 + x^2 + x + 200$ des Unternehmens.

Aus der Definition des unbestimmten Integrals folgt, dass die Ableitung eines unbestimmten Integrals mit dem Integranden übereinstimmt, d.h.

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x),$$

denn: Ist F Stammfunktion zu f , dann gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = \frac{d}{dx} (F(x) + C) = F'(x) = f(x).$$

Mit Hilfe dieser Aussage lassen sich nun einige wichtige Integrale von Grundfunktionen unmittelbar bestätigen, wobei sich die folgenden Aussagen stets auf den jeweiligen Definitionsbereich der Funktion beziehen.

Wichtige Integrale von Grundfunktionen

1) Für $a \neq -1$ gilt: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$

denn: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \right) = x^a$

2) $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

denn:

1. Fall: $x > 0$. Dann gilt $|x| = x$, also $\ln|x| = \ln x$ und

$$\frac{d}{dx} (\ln x + C) = x^{-1}$$

2. Fall: $x < 0$. Dann gilt $|x| = -x$, also $\ln|x| = \ln(-x)$.

Mit der Kettenregel erhält man

$$\frac{d}{dx} (\ln(-x) + C) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = x^{-1}$$

$$3) \int e^x dx = e^x + C, \text{ denn: } \frac{d}{dx} (e^x + C) = e^x$$

$$4) \int \ln(x) dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\text{denn: } \frac{d}{dx} (x \cdot \ln x - x + C) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

Im Kapitel Differentialrechnung haben wir gesehen, dass wir durch konsequentes Anwenden der Differentiationsregeln auch komplizierte Funktionen differenzieren können. Die Bestimmung unbestimmter Integrale sogar einfacher Funktionen kann dagegen sehr schwierig sein. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$, die bei der Gaußschen Normalverteilung in der Statistik eine wesentliche Rolle spielt. Man kann zwar zeigen, dass $\int e^{-x^2} dx$ existiert, das Ergebnis lässt sich aber nicht in einer "einfachen Form" durch unsere Standardfunktionen ausdrücken.

Wir werden jedoch einige mathematische Methoden behandeln, mit deren Hilfe man schon eine Menge häufig vorkommender Fälle behandeln kann.

Neben den folgenden einfachen Integrationsregeln werden wir uns mit der Methode der partiellen Integration und der Substitution beschäftigen, die in engem Zusam-

menhang mit der Produktregel und der Kettenregel der Differentialrechnung stehen.

Elementare Integrationsregeln

1) Konstante Faktoren

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

2) Integral einer Summe

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

3) "Lineare Substitution" (Begriffsbildung s.u.)

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt mit $a \neq 0$:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

(Lineare Funktion von x)

$$\text{denn: } \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} F(ax+b) + C \right) = \frac{1}{a} \cdot a \cdot F'(ax+b) = f(ax+b)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + x - 3) dx &= 2 \cdot \int x^2 dx + \int x dx - 3 \cdot \int 1 dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 3 \cdot x + C \end{aligned}$$

$$\int \left(\frac{2}{x} - 4 \cdot e^x \right) dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx - 4 \cdot \int e^x dx = 2 \ln|x| - 4e^x + C$$

$$\int (2x-5)^{184} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{185} (2x-5)^{185} + C$$

$$\int \frac{1}{(4x-7)} dx = \frac{1}{4} \ln|4x-7| + C$$

$$\int \ln\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}x \right) + C = x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - x + C$$

$$a > 0 \wedge a \neq 1: \int \log_a x \, dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \, dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln x \, dx$$

$$= \frac{1}{\ln a} (x \ln x - x) + C$$

$$a \neq 0: \int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$a > 0 \wedge a \neq 1: \int a^x \, dx = \int e^{(\ln a) \cdot x} \, dx = \frac{1}{\ln a} \cdot e^{(\ln a) \cdot x} + C = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$$

Partielle Integration

Aus der Regel für die Differentiation eines Produktes zweier Funktionen $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ lässt sich eine sehr wichtige und häufig anzuwendende Integrationsregel herleiten.

Indem man auf beiden Seiten der Produktregel das unbestimmte Integral bildet und beachtet, dass $f(x) \cdot g(x)$ eine Stammfunktion zu $(f(x) \cdot g(x))'$ ist, erhält man

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) g(x) \, dx + \int f(x) g'(x) \, dx.$$

Durch Umordnen erhält man daraus die Formel der partiellen Integration

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

In den folgenden Beispielen werden wir sehen, wie sich diese Regel verwenden lässt.

Prinzipiell lässt sich die Formel für die partielle Integration sinnvoll anwenden, wenn

- 1) $g(x)$ bestimmt werden kann und das neue Integral auf der rechten Seite leichter zu bestimmen ist als das

ursprüngliche Integral.

2) $g(x)$ bestimmt werden kann und man eine Gleichung für das unbekannte Integral erzeugen kann.

Beispiele: $\int x \cdot e^x dx$

Zunächst müssen wir überlegen, welche der Funktionen $f(x)$ und welche $g'(x)$ sein soll.

Prinzipiell hat man dafür zwei Möglichkeiten.

1. Nehmen wir $f(x) = e^x$ und $g'(x) = x$, dann ist $f'(x) = e^x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Wenn wir dies in die Formel für die partielle Integration einsetzen, erhalten wir auf der rechten Seite ein Integral, das nicht einfacher, sondern komplizierter ist als das ursprüngliche. Diese Wahl ist also ungeeignet.

2. Nehmen wir $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$, dann ist $f'(x) = 1$ und $g(x) = e^x$. Einsetzen in die Formel für die partielle Integration liefert

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

\downarrow
 $f(x)$

\downarrow
 $g'(x)$

\downarrow
 $f(x)$

\downarrow
 $g(x)$

\downarrow
 $f'(x)$

\downarrow
 $g(x)$

Wichtig!

Wie man ohne viel "Rumprobieren" die Rollen von $f(x)$ und $g'(x)$ verteilt, lernt man am besten durch ÜBEN!

Beispiel: $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$

Wenn wir hier $f(x) = e^{3x}$ und $g'(x) = x^2$ wählen, ist $f'(x) = 3e^{3x}$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^3$, d.h. "das neue Integral" wird schwieriger.

Wenn wir dagegen $f(x) = x^2$ und $g'(x) = e^{3x}$ wählen, wird $f'(x) = 2x$ und $g(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \cdot e^{3x} dx &= x^2 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int 2x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} dx \\
 \begin{array}{cccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 f(x) & g'(x) & f'(x) & g(x)
 \end{array} & & & \\
 &= \frac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3} \int x \cdot e^{3x} dx & \text{(noch mal partiell} \\
 & \begin{array}{cccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 f(x) & g'(x) & f'(x) & g(x)
 \end{array} & \text{integrieren!)} \\
 &= \frac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3} \left\{ x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int 1 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} dx \right\} \\
 & \begin{array}{cccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 f(x) & g(x) & f'(x) & g(x)
 \end{array} \\
 &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x e^{3x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C \\
 &= \frac{1}{3}e^{3x} \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \right) + C
 \end{aligned}$$

Probe möglich durch Differenzieren der rechten Seite! Die Ableitung muss den Integranden ergeben!

Beispiel: $\int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx$ für $x > 0$.

Wir wählen $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \ln x$. Somit

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx &= \ln x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx \\
 \begin{array}{cccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 g'(x) & f(x) & f'(x) & g(x)
 \end{array} & & &
 \end{aligned}$$

Wir haben nun auf der rechten Seite das ursprüngliche Integral stehen mit einem anderen Vorfaktor $(c-1)$.

Damit haben wir eine Gleichung für das unbekannte Integral hergeleitet, die wir nun nach dem unbekannten Integral auflösen können.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx \quad | + \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = (\ln x)^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + \frac{1}{2} C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Mit der Umbenennung von $\frac{1}{2} C_1 = C$ erhalten wir insgesamt:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

Integration durch Substitution

Auch die Kettenregel der Differentialrechnung lässt sich verwenden, um eine wichtige Integrationsmethode herzuleiten. Ist F Stammfunktion von f , so liefert uns die Kettenregel $(F(g(x)) + C)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Geht man auf beiden Seiten zum unbestimmten Integral über und beachtet, dass $\int (F(g(x)) + C)' \, dx = F(g(x)) + C$ ist, erhält man die Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C = \int f(u) \, du$$

mit $u = g(x)$.

Beispiel: $\int 9x^2 (3x^3 - 1)^{16} \, dx$

Wir substituieren $u = 3x^3 - 1$.

Dann gilt: $\frac{du}{dx} = 9x^2 \Rightarrow du = 9x^2 \, dx$

Damit erhält man mit anschließender Rücksubstitution

$$\int 9x^2 (3x^3 - 1)^{16} dx = \int u^{16} du = \frac{1}{17} u^{17} + C$$

$$= \frac{1}{17} (3x^3 - 1)^{17} + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} dx, \quad x > -2.$$

Wir substituieren $u = x^3 + 8$.

$$\text{Dann gilt: } \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{1}{3} du = x^2 dx$$

Damit erhält man mit anschließender Rücksubstitution

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 8} + C$$

Zwei häufig vorkommende Spezialfälle lassen sich allgemein angeben:

1) Ist F Stammfunktion zu f und $a \neq 0$, so gilt

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (\text{s.o.})$$

2) Ist g differenzierbar, dann gilt

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

Mit der Substitution $u = g(x)$, d.h. $du = g'(x) dx$ erhält

$$\text{man } \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |g(x)| + C$$

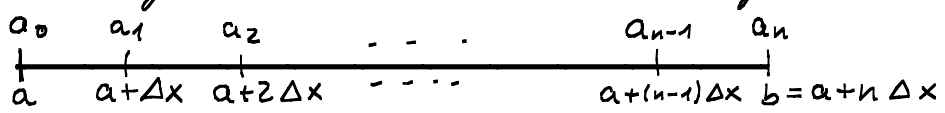
Beispiel:

$$\int \frac{\overbrace{7x^6 + 6x - 9}^{g'(x)}}{\underbrace{x^7 + 3x^2 - 9x + 10}_{g(x)}} dx = \ln |x^7 + 3x^2 - 9x + 10| + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{\overbrace{6e^{2x}}^{g'(x)}}{\underbrace{1-3e^{2x}}_{g(x)}} dx = -\frac{1}{6} \ln|1-3e^{2x}| + C$$

Bestimmte Integrale

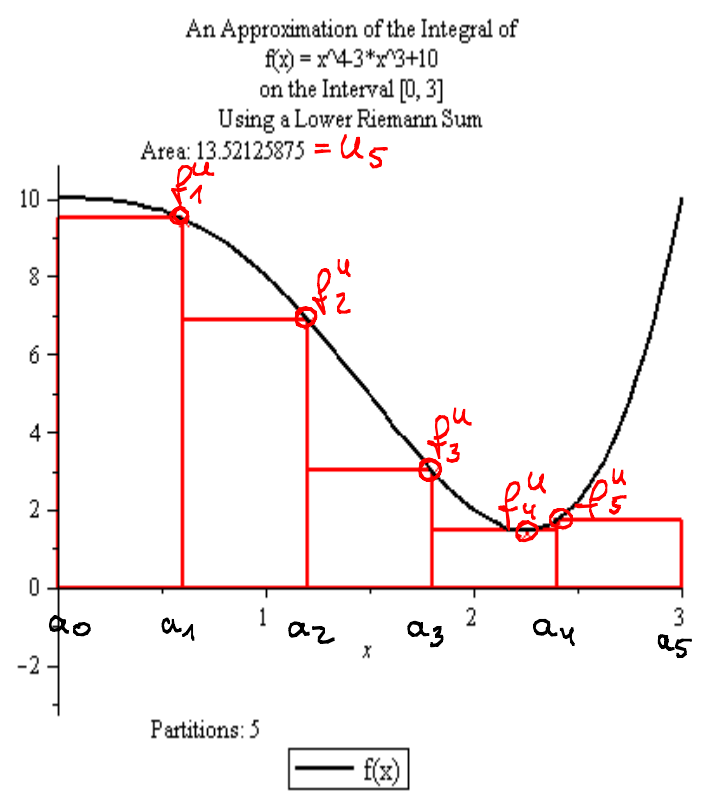
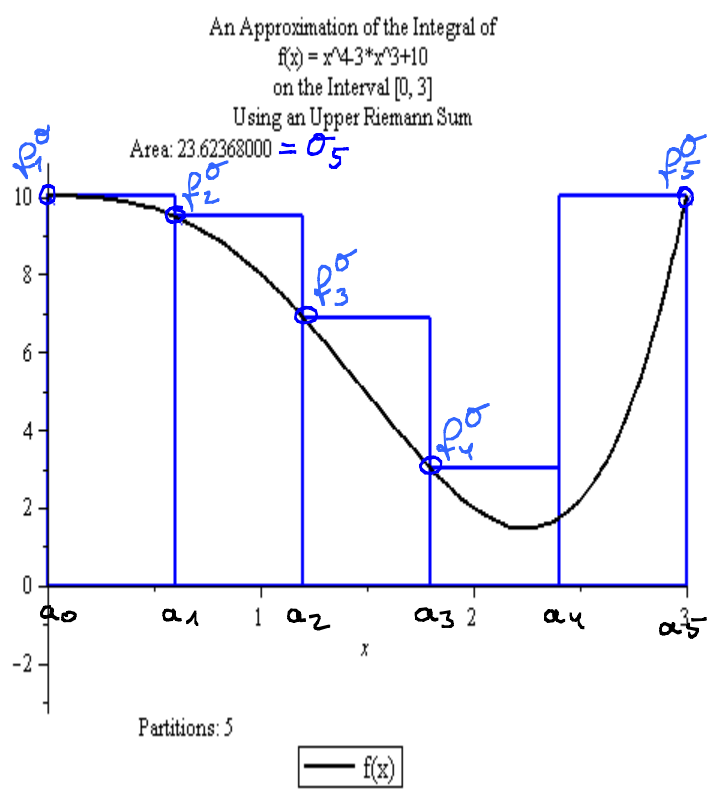
Im folgenden setzen wir voraus, dass $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist auf $[a, b]$. Wir teilen das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.



D.h. $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$

Sei nun zunächst $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Mit f_j^u bezeichnen wir den minimalen Funktionswert und mit f_j^o den maximalen Funktionswert auf dem Intervall $[a_{j-1}, a_j]$, $j = 1, \dots, n$.



Für die Summe der Rechteckflächen gilt dann:

$$O_n = \Delta x \cdot f_1^o + \Delta x \cdot f_2^o + \dots + \Delta x \cdot f_n^o = \Delta x \cdot \sum_{j=1}^n f_j^o \quad (\text{Obersumme})$$

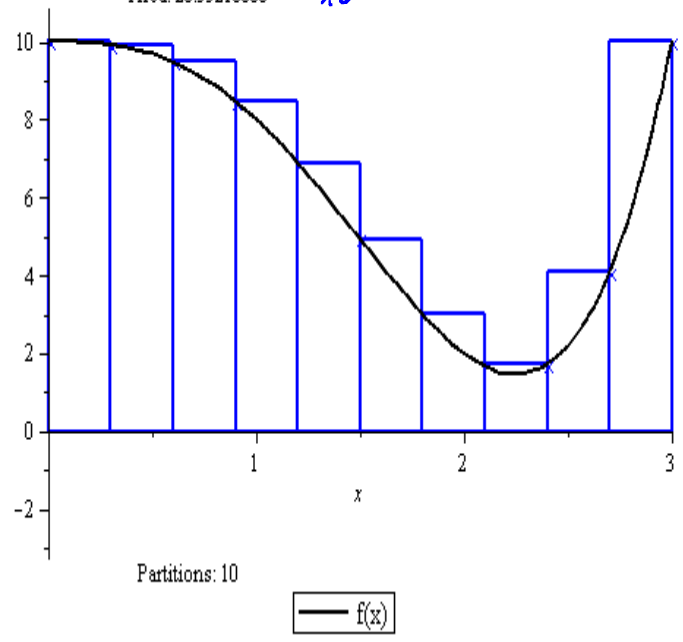
$$U_n = \Delta x \cdot f_1^u + \Delta x \cdot f_2^u + \dots + \Delta x \cdot f_n^u = \Delta x \cdot \sum_{j=1}^n f_j^u \quad (\text{Untersumme})$$

σ_n ist eine obere Schranke und u_n eine untere Schranke für den Inhalt der Fläche A zwischen dem Graphen von f und der x -Achse über dem Intervall $[a, b]$, d. h. $u_n \leq A \leq \sigma_n$.

Lässt man nun die Anzahl n der Teilintervalle wachsen, d. h. Δx kleiner werden, so kann man (bei genügend gutartigen Funktionen) beobachten, dass u_n und σ_n immer dichter aneinanderrücken (siehe Bieder unten).

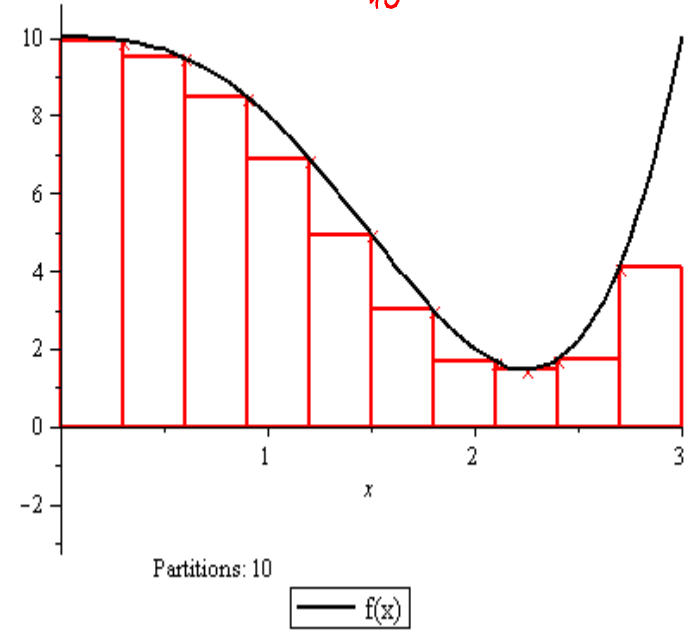
An Approximation of the Integral of $f(x) = x^4 \cdot 3 \cdot x^3 + 10$ on the Interval $[0, 3]$ Using an Upper Riemann Sum

Area: 20.55216000 = σ_{10}



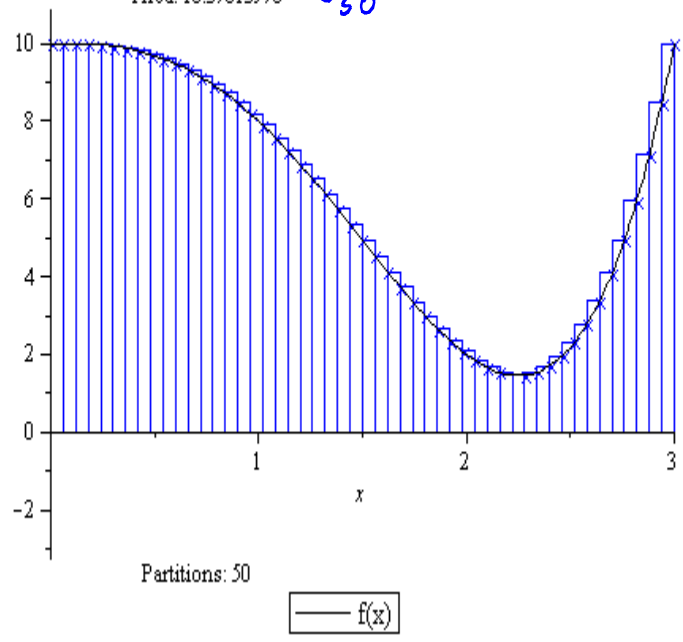
An Approximation of the Integral of $f(x) = x^4 \cdot 3 \cdot x^3 + 10$ on the Interval $[0, 3]$ Using a Lower Riemann Sum

Area: 15.48879938 = u_{10}



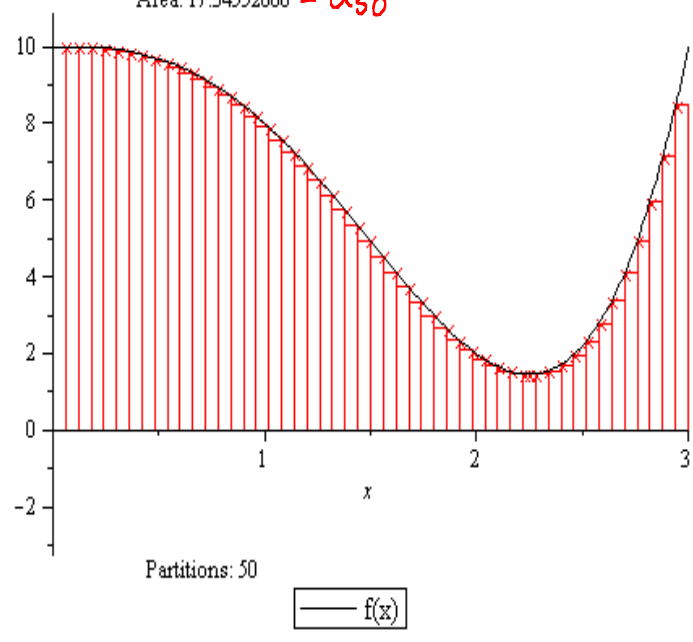
An Approximation of the Integral of $f(x) = x^4 \cdot 3 \cdot x^3 + 10$ on the Interval $[0, 3]$ Using an Upper Riemann Sum

Area: 18.37013978 = σ_{50}



An Approximation of the Integral of $f(x) = x^4 \cdot 3 \cdot x^3 + 10$ on the Interval $[0, 3]$ Using a Lower Riemann Sum

Area: 17.34552060 = u_{50}



Definition: Falls die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ existieren und denselben Grenzwert G besitzen, dann heißt

$$G = \int_a^b f(x) dx$$

bestimmtes Integral von $f(x)$ über $[a, b]$.

Die Funktion f heißt dann integrierbar über $[a, b]$.

Man kann zeigen, dass eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion stets über $[a, b]$ integrierbar ist.

Den Zusammenhang zu den vorher behandelten unbestimmten Integralen und Stammfunktionen liefert der folgende wichtige Satz. Gleichzeitig liefert er auch eine Berechnungsvorschrift für bestimmte Integrale.

Satz (Hauptsatz der Integralrechnung)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und F eine (beliebige) Stammfunktion von f . Dann existiert das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

(Zur Abkürzung schreibt man auch $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.)

Jedes Integral $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ ist eine Stammfunktion zu $f(x)$.

Beispiel: $\int_1^4 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^4 = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = 21$

$$\int_1^2 \ln x dx = x \cdot (\ln x - 1) \Big|_1^2 = 2(\ln 2 - 1) - 1 \cdot (\underbrace{\ln 1}_{=0} - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 3 = -\ln 3$$

Wie wir aus der Herleitung gesehen haben, berechnet man für eine Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ mit

dem bestimmten Integral die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse auf dem Intervall $[a, b]$. Hat $f(x)$ wechselndes Vorzeichen, so gehen in $\int_a^b f(x) dx$ die Flächenanteile unterhalb der x -Achse negativ ein. Mit $\int_a^b |f(x)| dx$ berechnet man die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse, wobei alle Flächenanteile positiv zählen.

Für die konkrete Berechnung benötigt man häufig, dass für eine über $[a, b]$ integrierbare Funktion und $a < c < b$ gilt: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Beispiel: Sei $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x+3)(x+1)(x-1)(x-2)$.

Wir berechnen das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[-3, 2]$.

$$\int_{-3}^2 (x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) dx = \left. \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right|_{-3}^2 = -\frac{125}{2}$$

Zur Bestimmung der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse im Intervall $[-3, 2]$ berechnen wir

$$\int_{-3}^2 |f(x)| dx = \int_{-3}^{-1} (-f(x)) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 (-f(x)) dx$$

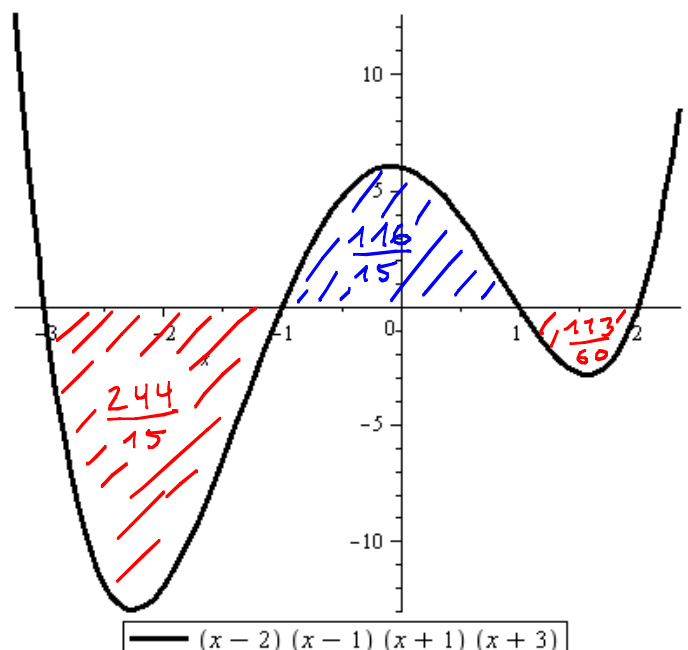
$$= \left(-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x \right) \Big|_{-3}^{-1}$$

$$+ \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_{-1}^1$$

$$+ \left(-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{244}{15} + \frac{116}{15} + \frac{113}{60}$$

$$= \frac{1553}{60}$$



$$\text{--- } (x-2)(x-1)(x+1)(x+3)$$

Wir kommen nun noch einmal auf Integrationsregeln zurück, die wir im Zusammenhang mit den unbestimmten Integralen besprochen haben und überlegen, wie diese bei der Berechnung bestimmter Integrale anzuwenden sind.

Partielle Integration bei bestimmten Integralen

Da $f(x)g(x)$ Stammfunktion von $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ist, gilt:

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Umstellung der Gleichung liefert die Formel für die partielle Integration bei bestimmten Integralen

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Beispiel:

$$\int_0^T (a+bt)e^{-\tau t} dt \quad \text{mit } a, b, \tau \neq 0.$$

Mit $f(t) = a+bt$, $g'(t) = e^{-\tau t}$, d.h. $f'(t) = b$, $g(t) = -\frac{1}{\tau}e^{-\tau t}$ erhalten wir

$$\int_0^T (a+bt)e^{-\tau t} dt = (a+bt) \cdot \left(-\frac{1}{\tau}e^{-\tau t}\right) \Big|_0^T - \int_0^T b \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\tau t} dt$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f'(t) & g'(t) & f(t) & g(t) \end{array}$$

$$= -\frac{1}{\tau} \left\{ (a+bT)e^{-\tau T} - a \right\} + \frac{1}{\tau} b \cdot \left(-\frac{1}{\tau}e^{-\tau t}\right) \Big|_0^T$$

$$= -\frac{1}{\tau} \left\{ (a+bT)e^{-\tau T} - a \right\} - \frac{1}{\tau^2} b (e^{-\tau T} - 1)$$

Substitution bei bestimmten Integralen

Führt man in einem bestimmten Integral eine Substitution durch, so ist zu beachten, dass auch die Integrationsgrenzen geändert werden müssen. Es gilt die Regel für die Substitution bei bestimmten Integralen

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad (u = g(x)),$$

denn, ist $F'(u) = f(u)$, dann gilt

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Beispiel: $\int_0^1 x^5 \sqrt{4-x^3} dx$

Wir substituieren $u = 4 - x^3 \Leftrightarrow x^3 = 4 - u$

Dann ist $\frac{du}{dx} = -3x^2 \Rightarrow -\frac{1}{3} du = x^2 dx$

Untere Grenze: $x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 4 - 0^3 = 4$

Oberer Grenze: $x_2 = 1 \Rightarrow u_2 = 4 - 1^3 = 3$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^5 \sqrt{4-x^3} dx &= \int_0^1 x^3 \sqrt{4-x^3} x^2 dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_4^3 (4-u) \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \int_3^4 (4u^{1/2} - u^{3/2}) du \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 4 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{2}{5} u^{5/2} \right\} \Big|_3^4 = \frac{1}{9} (64 - 12\sqrt{7}) + \frac{2}{15} (\sqrt{243} - 32) \end{aligned}$$

Beispiel: $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$

Substitution: $u = e^x, du = e^x dx$

Grenzen: $x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = e^0 = 1$

$x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = e^2$

$$\begin{aligned} &= \int_1^{e^2} \frac{1}{1+u} du = \ln|1+u| \Big|_1^{e^2} \\ &= \ln(1+e^2) - \ln 2 \end{aligned}$$

Bei der Durchführung von Substitutionen kann es passieren, dass die neue untere Grenze größer ist als die neue obere Grenze. Dann kann man verwenden, dann gilt:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Achtung! Beim Vertauschen der Grenzen kommt ein Faktor (-1) dazu.

Beispiel:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^3 - e^x} dx$$

$$= \int_{e(e-1)(e+1)}^{e^2(e-1)} \left(-\frac{1}{u}\right) du$$

$$= \int_{e^2(e-1)}^{e(e-1)(e+1)} \frac{1}{u} du$$

$$= \ln|u| \Big|_{e^2(e-1)}^{e(e-1)(e+1)}$$

$$= \ln(e(e-1)(e+1)) - \ln(e^2(e-1))$$

$$= \underbrace{\ln e}_{=1} + \ln(\cancel{e-1}) + \ln(e+1) - 2 \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} - \ln(\cancel{e-1})$$

$$= \ln(e+1) - 1$$

$$\text{Substitution: } u = e^3 - e^x$$

$$\frac{du}{dx} = -e^x \Rightarrow -du = e^x dx$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = e^3 - e = e(e^2 - 1) = e(e-1)(e+1)$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = e^3 - e^2 = e^2(e-1)$$

$$\text{Es ist } u_2 < u_1$$

III Analysis in zwei Variablen

11. Funktionen mehrerer Variablen

In den vorausgehenden Kapiteln zum Thema Analysis haben wir uns ausschließlich mit der Untersuchung von Funktionen einer Variablen beschäftigt. Eine realistische Beschreibung ökonomischer Zusammenhänge erfordert aber häufig mehrere Variablen. Die Nachfrage eines Verbrauchers nach einem Gut wie z.B. Butter hängt nicht nur vom Preis, sondern auch vom Einkommen und den Preisen sogenannter Substitute (z.B. Margarine) ab. Wir werden uns daher in den folgenden Kapiteln mit der Untersuchung von Funktionen mehrerer Variablen beschäftigen.

Dies setzt die Kenntnisse der Inhalte der letzten Kapitel voraus!

Zum Einstieg betrachten wir zwei Beispiele ökonomischer Fragestellungen im Zusammenhang mit Funktionen mehrerer Variablen.

Beispiel: In einem landwirtschaftlichen Betrieb hängt die Produktion, d.h. die Anzahl Y produzierter Einheiten vom investierten Kapital K , dem Arbeitseinsatz L und der verwendeten Anbaufläche T ab.

Häufig wird ein solcher Zusammenhang durch eine Cobb-Douglas-Funktion, d.h. eine Funktion des Typs

$$Y = A \cdot K^a \cdot L^b \cdot T^c$$

mit positiven Konstanten A, a, b, c , beschrieben.

Fragestellungen können z.B. sein:

- Wie ändert sich die Anzahl der produzierten Einheiten, wenn das Kapital erhöht wird und wie stark ist die Änderung?
- Was passiert, wenn wir gleichzeitig das Kapital verringern, aber den Arbeitseinsatz und die Anbaufläche erhöhen?

Beispiel: Ein Unternehmen produziert zwei Güter, wobei das 1. Gut zum Preis p , das 2. Gut zum Preis q pro Einheit verkauft wird.

Die Kosten für die Herstellung und den Verkauf von x Einheiten des 1. Gutes und y Einheiten des 2. Gutes seien $\alpha x^2 + \beta y^2$.

Die Gewinnfunktion des Unternehmens lautet somit

$$G = px + qy - (\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Man kann z.B. untersuchen, bei welchen Werten für x und y der Gewinn maximal wird.

Auch bei den folgenden Kapiteln können wir im Zusammenhang mit Funktionen von der Vorstellung ausgehen, dass es sich z.B. um Nachfrage-, Angebots-, Kosten-, Produktions-, Konsum- oder Gewinnfunktionen handelt.

Da einerseits die meisten Schwierigkeiten beim Übergang von einer zu zwei Variablen entstehen, andererseits die Graphen von Funktionen, die man sich zunächst als mehr oder weniger gekrümmte Flächen im dreidimensionalen Raum vorstellen kann, mit Hilfe geeigneter Software veranschaulicht werden können, werden wir Funktionen von zwei Variablen behandeln.

Grundlegende Begriffe und Definitionen

Definition: Eine reelle Funktion f von zwei Variablen ist eine Zuordnung, die jedem geordneten Paar (x_1, x_2) aus einer Menge $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert, zuordnet.

D_f heißt Definitionsbereich von f , die Menge aller Funktionswerte

W_f heißt Wertebereich von f .

$$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow W_f \subseteq \mathbb{R}, (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2)$$

Bei Funktionen von zwei Variablen schreiben wir häufig auch (x, y) statt (x_1, x_2) .

Bezeichnung: Ist f eine Funktion von zwei Variablen x und y , so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle (x, y) mit $z = f(x, y)$. x und y heißen dann unabhängige Variable oder Argumente von f und z abhängige Variable.

In den Wirtschaftswissenschaften verwendet man auch die Bezeichnungen exogene Variablen für x und y und endogene Variable für z .

Bemerkung: Auch bei Funktionen von zwei oder mehr Variablen ist bei der Definition des Funktionsbegriffs die Forderung nach der Eindeutigkeit der Zuordnung wichtig.

Definitionsbereich: Wir vereinbaren, analog zu dem Vorgehen für Funktionen einer Variablen, dass der Definitionsbereich aus allen geordneten Zahlenpaaren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bestehen soll, für die die Funktion berechnet werden kann, es sei denn, dass ein anderer Definitionsbereich durch die Aufgabenstellung vorgegeben ist.

Da der Definitionsbereich nun eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist, ist die Bestimmung häufig komplizierter.

Beispiel: Wir bestimmen den Definitionsbereich von

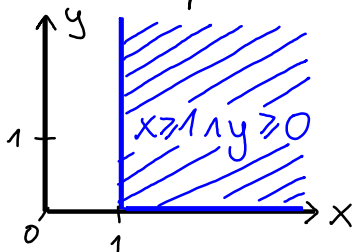
$$f(x, y) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y}.$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Argumente definiert ist, muss gelten:

$$(x-1 \geq 0 \wedge y \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 1 \wedge y \geq 0)$$

Somit ist $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \wedge y \geq 0\}$

Skizze des Definitionsbereichs in der xy -Ebene:



Bemerkung: Für das nächste Beispiel benötigen wir folgenden Sachverhalt.

Der Graph von $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$, besteht aus allen Punkten (x, y) in der xy -Ebene, die vom Ursprung den Abstand r haben, also auf dem Rand des Kreises um den Ursprung mit Radius r liegen. Entsprechend liegen die Punkte mit $x^2 + y^2 < r^2$ innerhalb und die mit $x^2 + y^2 > r^2$ außerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius r .

Beispiel:

1) Wir bestimmen den Definitionsbereich von $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

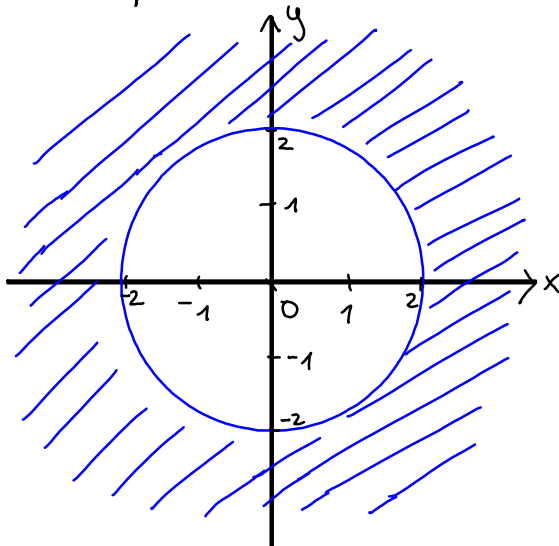
Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ werden, d.h.

$$x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 4$$

Der Definitionsbereich besteht also aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die auf dem Rand oder außerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius 2 liegen, d.h.

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$$

Skizze des Definitionsbereichs:

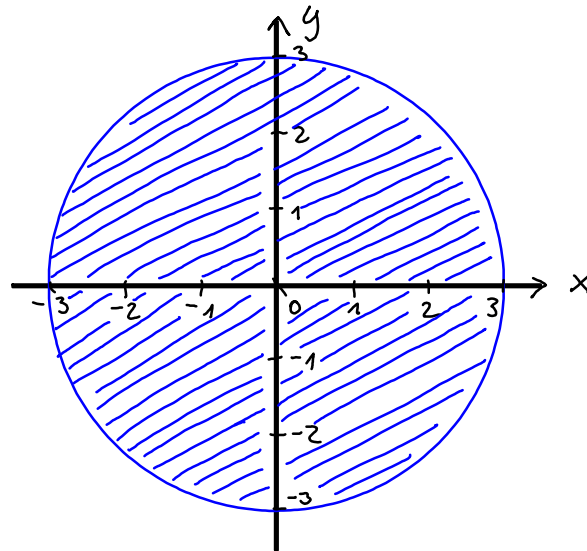


2) Wir bestimmen den Definitionsbereich von $h(x, y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$.

$$\text{Es gilt: } 9 - (x^2 + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9$$

Der Definitionsbereich $D_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ besteht somit aus allen Punkten (x, y) in der xy -Ebene, die auf dem Rand oder innerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius 3 liegen.

Skizze des Definitionsbereichs:



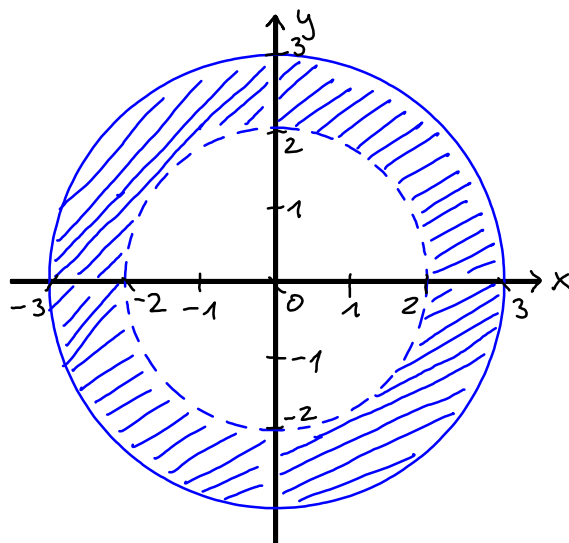
3) Wir bestimmen den Definitionsbereich von $f(x,y) = \frac{\sqrt{9 - (x^2 + y^2)}}{|x^2 + y^2 - 4|} = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$

Der Nenner darf nicht Null werden. Zusammen mit den Überlegungen in 1) und 2) gilt also:

$$\mathcal{D}_f = \{\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_g\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Das ist der Kreisring, der von den Kreisen um den Ursprung mit den Radien 2 und 3 eingeschlossen wird, wobei der Rand des Kreises mit Radius 2 nicht zum Definitionsbereich von f gehört.

Skizze des Definitionsbereichs:



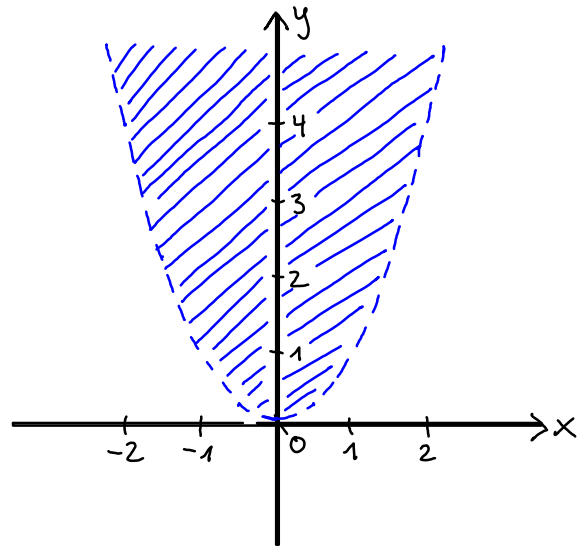
Bemerkung: Die Gleichung $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, $r > 0$, beschreibt einen Kreis um den Mittelpunkt (x_0, y_0) mit Radius r .

Beispiel: Wir bestimmen den Definitionsbereich von $f(x,y) = \ln(y-x^2)$.

Da der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist, muss gelten: $y-x^2 > 0 \Leftrightarrow y > x^2$

Somit ist $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$

Skizze des Definitionsbereichs:



Lineare, affin lineare Funktionen und Polynome

Bei diesen Funktionen handelt es sich um verhältnismäßig einfache Funktionen, so dass wir hier die Definitionen direkt für den allgemeinen Fall mehrerer Variablen angeben wollen.

Beispiel: Die Nachfrage N nach Zucker in den Vereinigten Staaten zwischen 1929 und 1935 wird näherungsweise beschrieben durch

$$N(p, w, t) = 108.83 - 6.0294 \cdot p + 0.164 \cdot w - 0.4217t$$

mit den drei Variablen p (Preis für Zucker), w (ein Produktionsindex) und t (Zeit, wobei $t=0$ dem Jahr 1929 entspricht).

Die Variablen p, w und t erscheinen hier nur in der 1. Potenz und werden nur mit Konstanten multipliziert. Hinzu kommt noch eine additive Konstante. Solche Funktionen heißen affin-lineare Funktionen.

Definition: Eine Funktion der Form $f(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$

mit beliebigen reellen Konstanten a_0, a_1, a_2 heißt affin-lineare Funktion in den beiden Variablen x_1 und x_2 .

Falls $a_0 = 0$ ist, heißt sie lineare Funktion.

Beispiel: $f(x_1, x_2) = 5 - 7x_1 + \pi x_2$ ist affin linear.

$g(x_1, x_2) = \sqrt{2}x_1 + e \cdot x_2$ ist linear.

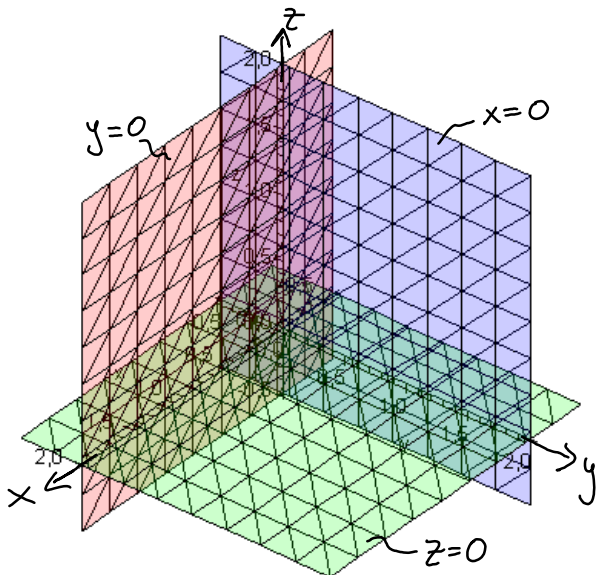
Definition: Eine Summe von Ausdrücken der Form $c \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2}$ mit nichtnegativen, ganzzahligen Potenzen k_1 und k_2 heißt Polynom. Der Grad des Polynoms ist die maximal vorkommende Summe der auftretenden Potenzen.

Beispiel: $f(x_1, x_2) = -2 + x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2 - x_2^3$ ist ein Polynom vom Grad 3.

$g(x_1, x_2) = \sqrt{2}x_1^4 - 27x_1 x_2^2 + \pi x_1^4 x_2$ ist ein Polynom vom Grad 5.

Geometrische Darstellung von Funktionen zweier Variablen

Bei der Analyse von Funktionen einer Variablen haben wir gesehen, dass es häufig sehr nützlich ist, Funktionsgraphen in einem Koordinatensystem in der Ebene darzustellen. Funktionen von zwei Variablen lassen sich ebenfalls durch ihre Graphen, die Flächen im dreidimensionalen Raum bilden, visualisieren. Grundlage bildet wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem, diesmal mit 3 Koordinatenachsen, die jeweils zueinander orthogonal sind. Jeder Punkt im dreidimensionalen Raum ist durch Angabe der Koordinaten als Tripel (x_0, y_0, z_0) reeller Zahlen festgelegt.



Die Gleichung $z=0$ wird von allen Punkten in einer Koordinatenebene, die von der x- und der y-Achse aufgespannt wird, erfüllt (xy-Ebene).

Analog xz-Ebene für $y=0$ und yz-Ebene für $x=0$.

Ähnlich, wie die Koordinatenachsen die Ebene in 4 Quadranten unterteilt, wird der dreidimensionale Raum durch die Koordinatenebenen in 8 Oktanten eingeteilt. Der Oktant $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$ heißt auch der nicht-negative Oktant.

Definition: Unter dem Graphen einer Funktion $z = f(x,y)$ versteht man die Menge $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{D}_f, z = f(x,y)\}$.

Ist $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}_f$ eine Stelle im Definitionsbereich von f , so bestimmt man dazu den zugehörigen Funktionswert $z_0 = f(x_0, y_0)$, der sich anschaulich als "Höhe" interpretieren lässt. Um eine Vorstellung vom Funktionsgraphen zu bekommen, muss man allerdings hinreichend viele Funktionswerte bestimmen. Eine zusätzliche Schwierigkeit besteht in der projizierten Darstellung in der Zeichenebene, da wir nicht jedesmal ein 3D-Modell bauen wollen. Tatkraftige Unterstützung erhält man von leistungsfähigen Computerprogrammen.

Einfach (auch ohne Computerprogramm) zu zeichnen sind lineare und affine Funktionen im \mathbb{R}^3 , d.h. Funktionen der Form $z = f(x,y) = ax + by + c$. Die Graphen solcher Funktionen sind Ebenen im \mathbb{R}^3 . Um sich eine Vorstellung von der Lage einer solchen Ebene im \mathbb{R}^3 zu verschaffen, ermittelt man z.B. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Durch diese ist die Ebene eindeutig festgelegt.

Beispiel: $z = 4 - 4x - 2y$

Schnittpunkt mit der x -Achse, d.h. $y=0 \wedge z=0$, also

$$0 = 4 - 4x \Leftrightarrow x = 1$$

Der Schnittpunkt mit der x -Achse ist also $(1, 0, 0)$.

Schnittpunkt mit der y -Achse, d.h. $x=0 \wedge z=0$, also

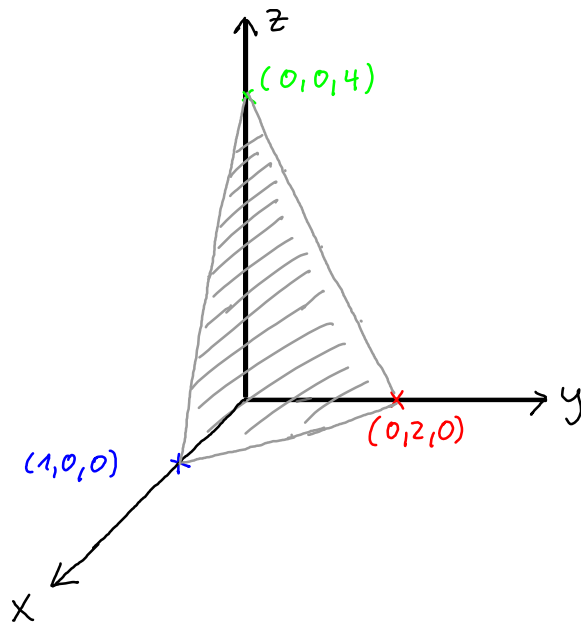
$$0 = 4 - 2y \Leftrightarrow y = 2$$

Der Schnittpunkt mit der y -Achse ist also $(0, 2, 0)$.

Schnittpunkt mit der z -Achse, d.h. $x=0 \wedge y=0$, also

$$z=4$$

Der Schnittpunkt mit der z -Achse ist also $(0,0,4)$.



Allgemein lässt sich jede Ebene im \mathbb{R}^3 durch eine Gleichung der Form

$$px + qy + rz = m$$

beschreiben. Für $r \neq 0$ kann man die Gleichung nach z auflösen und erhält eine Funktionsgleichung der oben angegebenen Form.

Beispiel: Xantippe Fröhlich hat einen Betrag von 100 € für den Kauf von drei Gütern zur Verfügung, deren Preise 15 €, 10 € und 20 € pro Einheit sind. Kauft Xantippe Fröhlich x Einheiten des 1., y Einheiten des 2. und z Einheiten des 3. Gutes, dann betragen die Gesamtkosten

$$15x + 10y + 20z.$$

Wenn die gesamten 100 € ausgegeben werden sollen, muss somit gelten:

$$15x + 10y + 20z = 100.$$

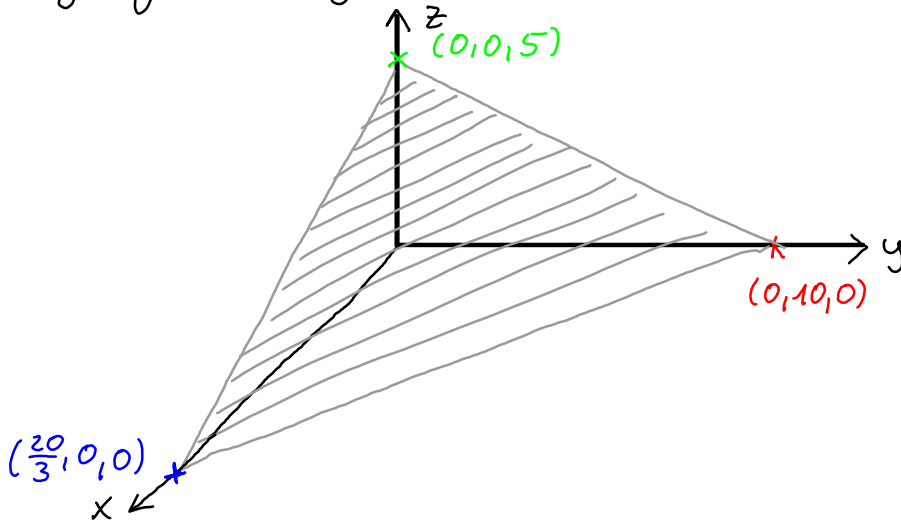
Sinnvollerweise sind hier die Bedingungen $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ zu stellen.

Auflösen der Gleichung nach z liefert: $z = 5 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y$.

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind

$$\left(\frac{20}{3}, 0, 0\right), (0, 10, 0), (0, 0, 5).$$

Alle Punkte des Dreiecks mit den Eckpunkten $(\frac{20}{3}, 0, 0)$, $(0, 10, 0)$ und $(0, 0, 5)$ erfüllen die Gleichung $z = 5 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y$ und die Zusatzbedingungen $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.



Wir betrachten das Beispiel aus einem allgemeineren Blickwinkel.

Beispiel: Für positive Konstanten p, q, r und m sei die Gleichung

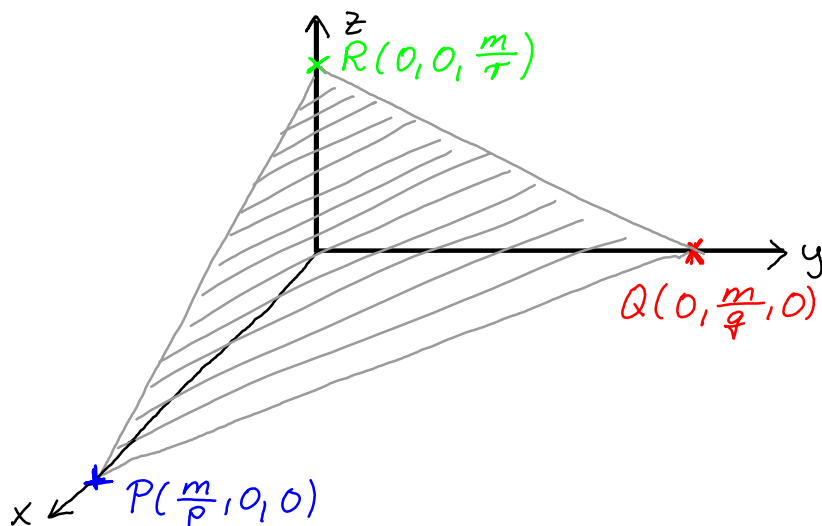
$$px + qy + rz = m$$

gegeben. Diese Gleichung kann folgendermaßen ökonomisch interpretiert werden. Eine Person habe einen Betrag m für den Kauf von drei Gütern zur Verfügung, deren Preise p, q und r pro Einheit betragen.

Kauft die Person x Einheiten des 1., y Einheiten des 2. und z Einheiten des 3. Gutes, dann betragen die Gesamtkosten

$$px + qy + rz.$$

Die Gleichung $px + qy + rz = m$ ist daher die Budgetgleichung. Nur solche Tripel (x, y, z) können gekauft werden, die die Budgetgleichung erfüllen. Die zugehörige Ebene heißt Budgetebene. Hat man zusätzlich die Bedingungen $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, so hat man als Teil dieser Ebene das Dreieck mit den Eckpunkten $P(\frac{m}{p}, 0, 0)$, $Q(0, \frac{m}{q}, 0)$, $R(0, 0, \frac{m}{r})$.



Darf auch weniger als das vorgegebene Budget m ausgegeben werden, so erhält man die Budgetmenge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : px + qy + rz \leq m, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Sie bildet anschaulich einen dreidimensionalen Körper, der durch die Koordinatenebenen und die Budgetebene begrenzt wird.

Niveaulinien, Höhenlinien

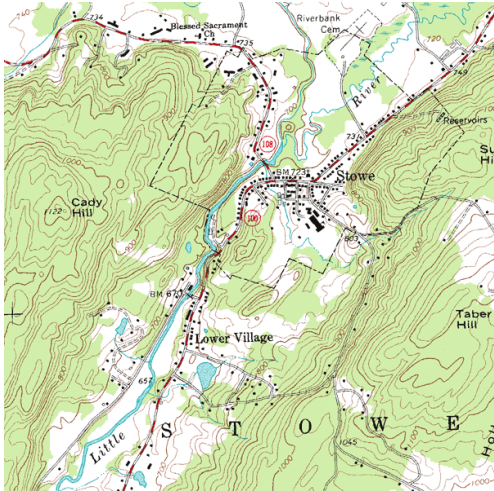
Eine weitere Möglichkeit der Visualisierung besteht in der Ermittlung und Darstellung von Niveaulinien. Die Niveaulinie (Höhenlinie) einer Funktion f zum Niveau (zur Höhe) c besteht aus allen Punkten $(x, y) \in D_f$, die die Gleichung $f(x, y) = c$ erfüllen. Es handelt sich somit um Linien, die Punkte mit gleichem Funktionswert miteinander verbinden.

In konkreten Anwendungen haben die Niveaulinien oft spezielle Namen.

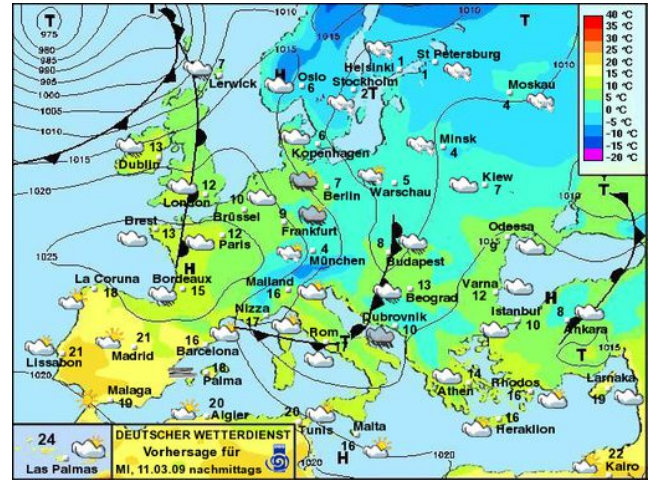


Modell einer Hotelanlage mit Höhenlinienprofil in einer Gebirgslandschaft in der Nähe der Chinesischen Mauer

Auf Landkarten findet man Höhenlinien, d.h. Linien mit gleicher Höhe über dem Meeresspiegel.



Auf Wetterkarten findet man sogenannte Isobaren, d.h. Linien mit konstantem Luftdruck.



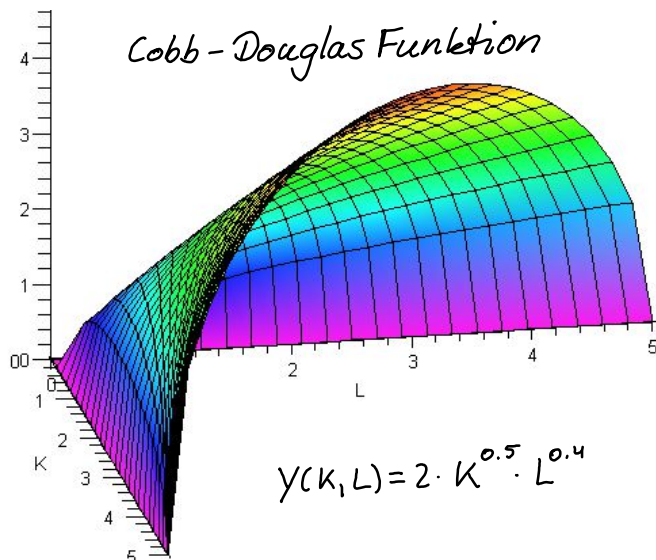
In ökonomischen Anwendungen findet man z.B. die Begriffe

- Isokostenlinien: Sie stellen die möglichen Kombinationen von Einsatzmengen zweier Produktionsfaktoren wie z.B. Kapital und Arbeit dar, die die gleichen Kosten verursachen.
- Isoguanten: Sie stellen die möglichen Kombinationen zweier Produktionsfaktoren dar, die den gleichen Output erzeugen.

Beispiel: Der produzierte Output Y eines Unternehmens sei in Abhängigkeit vom Kapital K und vom Arbeitseinsatz L durch die Cobb-Douglas Funktion

Funktion
gegeben.

$$Y(K, L) = 2 \cdot K^{0.5} \cdot L^{0.4}, \quad K, L \geq 0,$$



Zur Bestimmung der Niveaulinien interessieren uns diejenigen Wertepaare (K, L) , für die $Y(K, L)$ mit einer Konstanten c übereinstimmt. Da nach Voraussetzung $K, L \geq 0$, muss $c \geq 0$ sein.

$$Y(K, L) = c \Leftrightarrow 2 \cdot K^{0.5} \cdot L^{0.4} = c$$

Wir wollen die Niveaulinien im KL -Koordinatensystem darstellen.

Zunächst gilt: $c = 0 \Leftrightarrow (K = 0 \vee L = 0)$

Für $c > 0$, d.h. $(K > 0 \wedge L > 0)$ lösen wir die obige Gleichung nach K auf:

$$\begin{aligned} 2 \cdot K^{0.5} \cdot L^{0.4} = c &\Leftrightarrow K^{0.5} = \frac{c}{2} \cdot L^{-0.4} \\ &\Leftrightarrow K = \frac{c^2}{4} \cdot L^{-0.8} \end{aligned}$$

Für unterschiedliche Werte von c ergeben sich nun Gleichungen für verschiedene Niveaulinien, z.B.:

$$c = 1: K = \frac{1}{4} \cdot L^{-0.8}$$

$$c = 2: K = L^{-0.8}$$

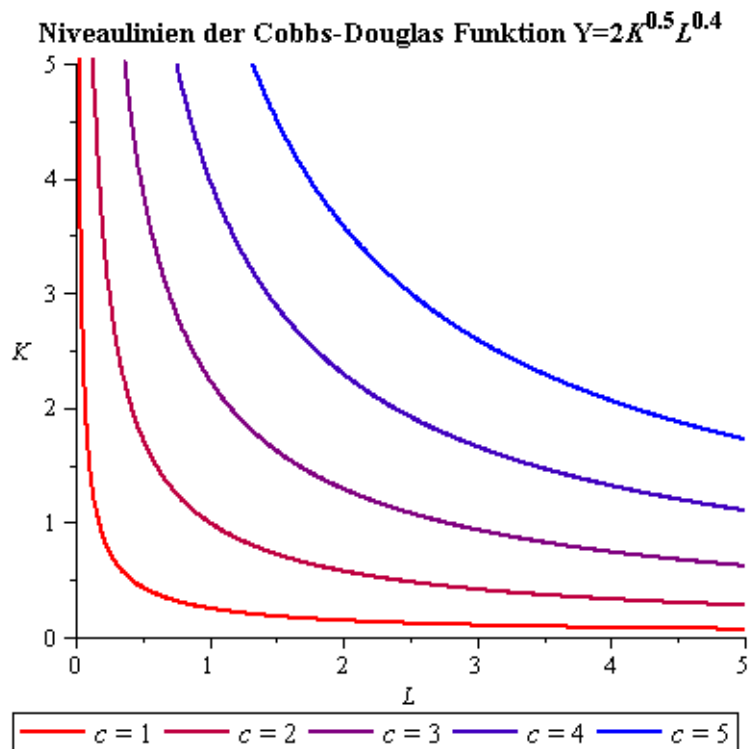
$$c = 3: K = \frac{9}{4} \cdot L^{-0.8}$$

Zu vorgegebenem Output

$Y(K, L) = c$ kann man nun

auf den Isoquanten "entlangwandern", um die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten von Kapital K und Arbeitseinsatz L abzulesen, die zu diesem Output führen.

So ergeben z.B. die Kombinationen $(1, 1)$ und $(\frac{1}{16}, 32)$ denselben Wert 2 für den Output.

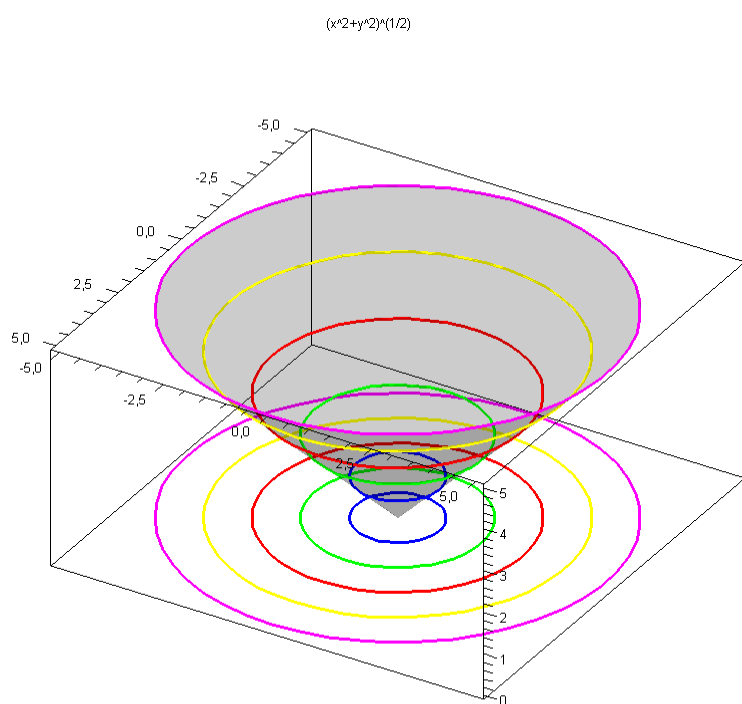


Beispiel: Sei $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Zur Bestimmung der Niveaulinien interessieren uns diejenigen Wertepaare (x,y) , für die $f(x,y)$ mit einer Konstanten c übereinstimmt. Nach Definition der Funktion muss $c \geq 0$ sein.

$$\text{Für } c \geq 0 \text{ gilt: } f(x,y) = c \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = c \Leftrightarrow x^2+y^2 = c^2$$

Hier lohnt es nicht, nach y aufzulösen, da man erkennt, dass die Gleichung $x^2+y^2 = c^2$ einen Kreis um den Ursprung mit Radius c beschreibt.



c=1 c=2 c=3 c=4 c=5

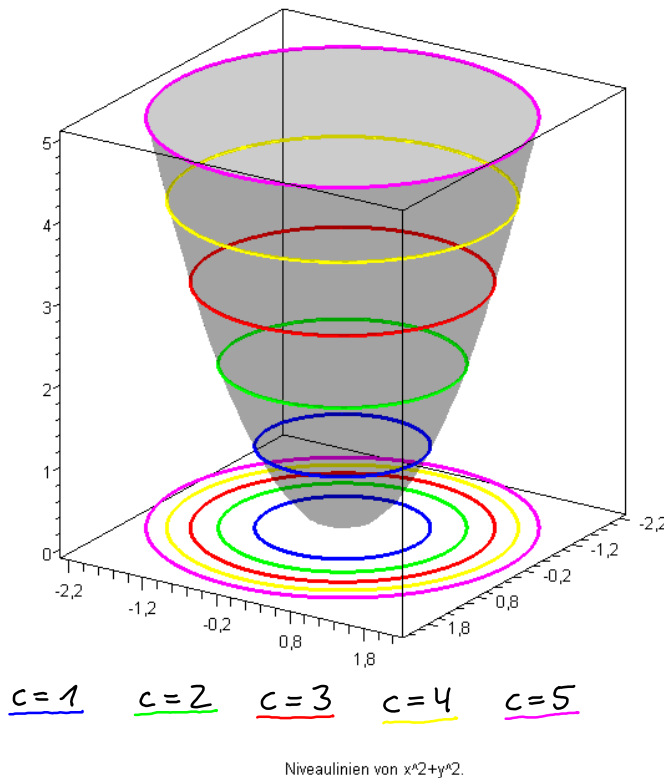
In der nebenstehenden Graphik sind neben dem Graphen von $f(x,y)$, ein Kreiskegel mit Spitze im Ursprung, auch die Niveaulinien für $c=1, 2, 3, 4, 5$ eingezeichnet.

Beispiel: Sei $f(x,y) = x^2+y^2$.

Auch hier suchen wir wieder zur Bestimmung der Niveaulinien die Wertepaare (x,y) , für die die Funktion mit einer Konstanten c übereinstimmt. Nach Definition der Funktion muss wieder $c \geq 0$ sein.

$$\text{Für } c \geq 0 \text{ gilt: } f(x,y) = c \Leftrightarrow x^2+y^2 = c$$

Die Niveaulinien sind auch hier wieder Kreise um den Ursprung, diesmal aber mit Radius \sqrt{c} .



Beispiel: Wir zeigen, dass alle Wertepaare (x,y) , für die $x \cdot y = 2$ erfüllt ist, auf einer Niveaulinie der Funktion $f(x,y) = \frac{3(xy+1)^2}{x^4 y^4}$ liegen.

Dazu setzen wir $x \cdot y = 2$ in die Funktion ein und erhalten:

$$\frac{3(xy+1)^2}{(xy)^4} = \frac{3(2+1)^2}{2^4} = \frac{27}{16}$$

Alle Wertepaare (x,y) mit $xy=2$, d.h. $y=2 \cdot \frac{1}{x}$, liegen somit auf derselben Niveaulinie mit der "Höhe" $c = \frac{27}{16}$.

Allgemein gilt wegen $\mathbb{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ ein entsprechendes Resultat auch für alle Wertepaare (x,y) mit $x \cdot y = K$, K Konstante, $K \neq 0$.

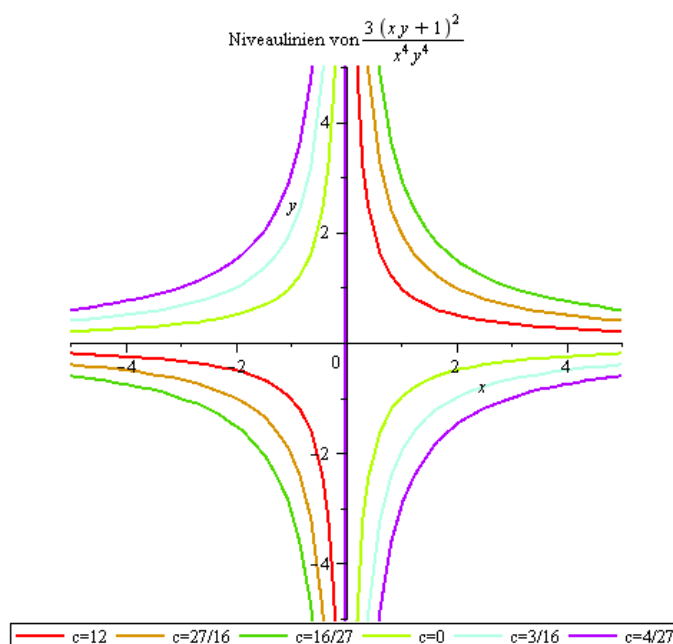
Dies liegt daran, dass der Wert von $f(x,y)$ nur vom Wert des Produktes $x \cdot y$ abhängt. So erhält man z.B. durch Einsetzen von $x \cdot y = K$ in die Funktion $f(x,y)$ für

$$K = -3 \text{ die Niveaulinie } y = -3 \cdot \frac{1}{x} \text{ zur "Höhe" } c = \frac{4}{27}$$

$$K = -2 \text{ die Niveaulinie } y = -2 \cdot \frac{1}{x} \text{ zur "Höhe" } c = \frac{3}{16}$$

$$K = -1 \text{ die Niveaulinie } y = -\frac{1}{x} \text{ zur "Höhe" } c = 0$$

$$\begin{array}{lll}
 K=1 & \text{die Niveaulinie} & y = \frac{1}{x} \quad \text{zur "Höhe"} \quad c=12 \\
 K=2 & \text{die Niveaulinie} & y = 2 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{zur "Höhe"} \quad c = \frac{27}{16} \\
 K=3 & \text{die Niveaulinie} & y = 3 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{zur "Höhe"} \quad c = \frac{16}{27}
 \end{array}$$



Stetigkeit von Funktionen von zwei Variablen

Bereits bei Funktionen von einer Variablen hatten wir festgehalten, dass Stetigkeit durch die anschauliche Beschreibung "Zeichnen des Graphen, ohne den Stift absetzen zu müssen" unter mathematischen Gesichtspunkten völlig unzureichend ist. Für Funktionen von zwei Variablen ist eine solche Beschreibung offenkundig unmöglich.

Eine sinnvolle Betrachtung ist nur mit Hilfe von Grenzwerten möglich.

Definition: $z_0 \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $f(x,y)$ für (x,y) gegen (x_0, y_0) , wenn für alle Folgen $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ mit $(x_m, y_m) \in \mathbb{D}_f$ und $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y_0$ gilt, dass $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m, y_m) = z_0$ ist.

Man schreibt dann $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = z_0$.

$f(x,y)$ heißt stetig im Punkt (x_0, y_0) , wenn $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}_f$ und $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ ist.

Beispiel: Wir betrachten als Beispiel die sogenannte Parabelfalte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & , x \neq 0 \vee y \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist hier die Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ problematisch

Wir untersuchen die Funktionswerte zu speziellen Linien im Definitionsbereich, die durch $(0, 0)$ verlaufen. Speziell gilt:

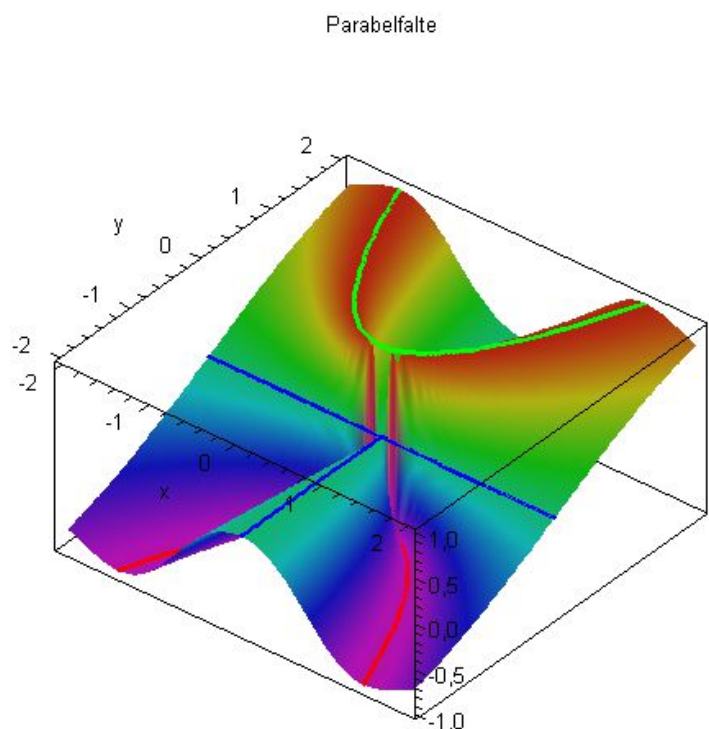
- für $x=0$: $f(0, y) = 0$
- für $y=0$: $f(x, 0) = 0$
- für $y=x^2$ mit $x \neq 0$: $f(x, x^2) = \frac{2x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = 1$
- für $y=-x^2$ mit $x \neq 0$: $f(x, -x^2) = \frac{2 \cdot x^2 \cdot (-x^2)}{x^4 + (-x^2)^2} = -1$

Somit gilt z.B. $f(x, x^2) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$

oder auch $f(x, -x^2) \rightarrow -1$ für $x \rightarrow 0$

aber nach Definition der Funktion $f(0, 0) = 0$, d.h. die Funktion ist unstetig an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Die Überlegungen zeigen auch, dass es im Allgemeinen nicht reicht, das Verhalten in Richtung der Koordinatenachsen zu überprüfen.

Man sieht hier übrigens recht deutlich, dass die Darstellung solcher Unstetigkeiten auch mit leistungsfähigen Computerprogrammen beschränkt ist.



12. Differentialrechnung für Funktionen von zwei Variablen

Wir erinnern uns zunächst an einige Zusammenhänge für Funktionen von einer Variablen, die wir in Kapitel 9 behandelt haben.

Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion einer Variablen, so versteht man unter dem Differenzenquotienten den Ausdruck

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Der Differenzenquotient gibt die durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall von x bis $x+h$ an. Geometrisch ist dies die Steigung der Sekanten durch die Punkte $P_0(x, f(x))$ und $P_h(x+h, f(x+h))$.

Den Differentialquotienten bzw. die 1. Ableitung erhält man aus dem Differenzenquotienten, indem man den Grenzwert für $h \rightarrow 0$ bildet,

d.h.

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Der Differentialquotient gibt die momentane Änderungsrate von f an der Stelle x an. Geometrisch ist dies die Steigung der Tangenten an den Graphen von f an der Stelle x .

"Stellt" man sich auf den Graphen einer Funktion von einer Variablen, so hat man nur eine mögliche "Richtung", auf dem Graphen "entlang zu wandern", nämlich in x -Richtung. Es geht dann entweder rauf, runter oder bleibt auf derselben Höhe.

Bei einer Funktion von zwei Variablen ist dies anders. "Steht" man auf dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen (man kann sich z.B. einfach eine Gebirgslandschaft vorstellen), so kann man prinzipiell in beliebig viele Richtungen "wandern". Während es in einer Richtung steil bergauf geht, geht es in einer anderen Richtung möglicherweise sanft bergab oder bleibt auf gleicher Höhe. Es ist nun naheliegend, die Betrachtungen zunächst auf spezielle, ausgewählte Richtungen, nämlich die der Koordinatenrichtungen

einzuschränken und die durchschnittlichen bzw. momentanen Änderungsraten in x - bzw. y -Richtung zu untersuchen. Dazu hält man eine Variable fest und lässt nur Änderungen in der anderen Variablen zu.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^3 + x - y}{x^4 + y^4 + 3} + 1.$$

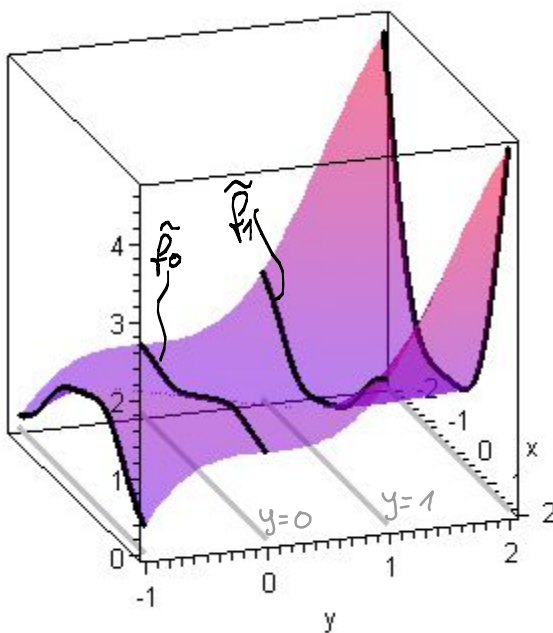
Wenn wir für y einen festen Wert vorgeben, erhalten wir eine Funktion, die nur von x abhängt, z. B.

$$y = 0: \tilde{f}_0(x) = f(x, 0) = \frac{x}{x^4 + 3} + 1$$

Der Graph von \tilde{f}_0 ist der Schnitt des Graphen von $f(x, y)$ mit der Ebene, die senkrecht zur xy -Ebene durch die Gerade $y=0$ in der xy -Ebene verläuft.

$$y = 1: \tilde{f}_1(x) = f(x, 1) = \frac{x^4 + x - 1}{x^4 + 4} + 1$$

Der Graph von \tilde{f}_1 ist der Schnitt des Graphen von $f(x, y)$ mit der Ebene, die senkrecht zur xy -Ebene durch die Gerade $y=1$ in der xy -Ebene verläuft.



In der xy -Ebene sind einige Parallelen zur x -Achse in grau eingezeichnet.

Die schwarzen Kurven entsprechen den Einschränkungen der Funktion auf diese Parallelen im Definitionsbereich.

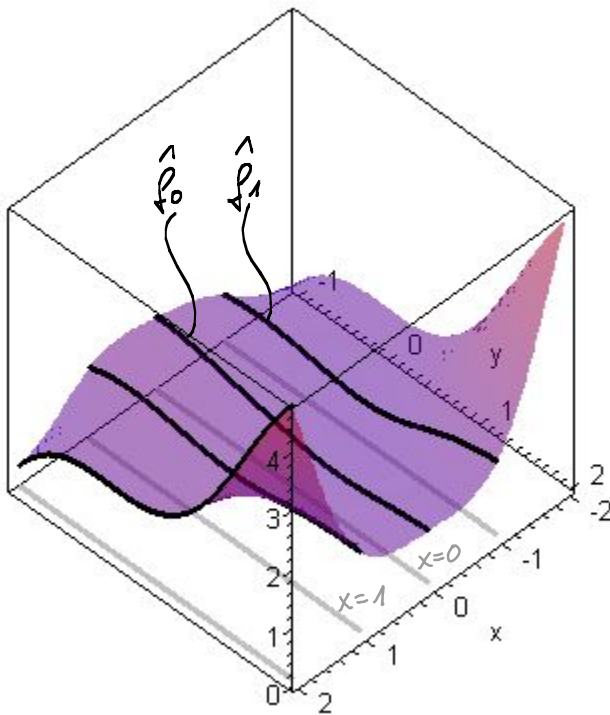
Entsprechend kann man x fest vorgeben und erhält dann eine Funktion, die nur von y abhängt, z.B.

$$x = 0: \hat{f}_0(y) = f(0, y) = \frac{-y}{y^4 + 3} + 1$$

Der Graph von \hat{f}_0 ist der Schnitt des Graphen von $f(x, y)$ mit der Ebene, die senkrecht zur xy -Ebene durch die Gerade $x=0$ in der xy -Ebene verläuft.

$$x = 1: \hat{f}_1(y) = f(1, y) = \frac{y^3 + 1 - y}{y^4 + 4} + 1$$

Der Graph von \hat{f}_1 ist der Schnitt des Graphen von $f(x, y)$ mit der Ebene, die senkrecht zur xy -Ebene durch die Gerade $x=1$ in der xy -Ebene verläuft.



In der xy -Ebene sind einige Parallelen zur y -Achse in grau eingezeichnet. Die schwarzen Kurven entsprechen den Einschränkungen der Funktion auf diese Parallelen im Definitionsbereich.

Partielle Ableitungen für Funktionen von zwei Variablen

Die vorstehenden Überlegungen führen uns auf die Definition von partieller Differenzierbarkeit und partieller Ableitung. Die partielle Ableitung einer Funktion f von zwei Variablen nach x bedeutet gerade die Ableitung von f nach x , wenn y konstant gehalten wird. Entsprechend ist die partielle Ableitung nach y gerade die Ableitung von f nach y , wenn x konstant

gehalten wird. Grenzwert halten wir fest:

Definition: Sei f eine Funktion mit $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x^*, y^*) \in \mathbb{D}_f$.

1) f heißt an der Stelle (x^*, y^*) partiell differenzierbar bzgl. x , wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x^* + \Delta x, y^*) - f(x^*, y^*)}{\Delta x}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f_x(x^*, y^*)$ oder mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)$ bezeichnet und heißt 1. partielle Ableitung von f nach x an der Stelle (x^*, y^*) .

Ist f an jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{D}_f$ partiell nach x differenzierbar, so heißt f_x bzw. $\frac{\partial f}{\partial x}$ erste partielle Ableitung von f nach x .

2) f heißt an der Stelle (x^*, y^*) partiell differenzierbar bzgl. y , wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x^*, y^* + \Delta y) - f(x^*, y^*)}{\Delta y}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f_y(x^*, y^*)$ oder mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)$ bezeichnet und heißt 1. partielle Ableitung von f nach y an der Stelle (x^*, y^*) .

Ist f an jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{D}_f$ partiell nach y differenzierbar, so heißt f_y bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$ erste partielle Ableitung von f nach y .

3) Ist die Funktion f an allen Stellen $(x, y) \in \mathbb{D}_f$ sowohl nach x als auch nach y partiell differenzierbar, so heißt die Funktion partiell differenzierbar.

Sind zusätzlich die partiellen Ableitungen f_x und f_y stetig, so heißt f stetig partiell differenzierbar.

Wir hatten noch einmal fest, dass mit den vorangegangenen Überlegungen und Definitionen folgt, dass f_x die momentane Änderungsrate bzgl. x bei konstant gehaltenem y und f_y die momentane Ände-

ungsrate bzgl. y bei konstant gehaltenem x bedeutet.

Die Bestimmung der partiellen Ableitungen einer Funktion von zwei Variablen ist nicht allzu schwierig, wenn man die Ableitungsregeln für Funktionen einer Variablen beherrscht!

Will man $\frac{\partial f}{\partial x}$ bestimmen, so denkt man sich y als Konstante und differenziert f nach der Variablen x so, als ob f nur von x abhängen würde. Entsprechendes gilt für $\frac{\partial f}{\partial y}$. Somit werden alle Ableitungsregeln, die wir bereits besprochen haben, hier wieder verwendet.

Konkret bedeutet dies folgendes:

Regeln für die Berechnung partieller Ableitungen unter der Voraussetzung, dass die auftretenden Ableitungen existieren.

Faktoren, die nicht von der Variablen abhängen, nach der differenziert wird, bleiben erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial x} (c(y) \cdot u(x, y)) = c(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (c(x) \cdot u(x, y)) = c(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

Summenregel: Die partielle Ableitung einer Summe (Differenz) ist die Summe (Differenz) der partiellen Ableitungen.

$$\frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) + v(x, y)) = u_x(x, y) + v_x(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) + v(x, y)) = u_y(x, y) + v_y(x, y)$$

Produktregel:

$$\frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) \cdot v(x, y)) = u_x(x, y) \cdot v(x, y) + u(x, y) \cdot v_x(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) \cdot v(x, y)) = u_y(x, y) \cdot v(x, y) + u(x, y) \cdot v_y(x, y)$$

Quotientenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u(x,y)}{v(x,y)} \right) = \frac{u_x(x,y) \cdot v(x,y) - u(x,y) \cdot v_x(x,y)}{[v(x,y)]^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u(x,y)}{v(x,y)} \right) = \frac{u_y(x,y) \cdot v(x,y) - u(x,y) \cdot v_y(x,y)}{[v(x,y)]^2}$$

Einfache Kettenregel: $f(x,y) = u(v(x,y))$, $v: D_v \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u: D_u \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_x(x,y) = \frac{du}{dv}(v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

("äußere" · "innere" Ableitung)

$$f_y(x,y) = \frac{du}{dv}(v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

Beispiel: Wir bestimmen die partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) = x^3y + 2x^2y^2 - 7x + 3y^2 - xy$$

Für die Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial x}$ betrachten wir y als konstant und x als variabel.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2 \cdot 2xy^2 - 7 - 1 \cdot y = 3x^2y + 4xy^2 - 7 - y$$

Für die Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial y}$ betrachten wir x als konstant und y als variabel.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 \cdot 1 + 2x^2 \cdot 2y + 3 \cdot 2y - x \cdot 1 = x^3 + 4x^2y + 6y - x$$

Beispiel: $f(x,y) = \frac{x^2y + 1}{x^2y^2 + y^4 + 2} = \frac{u(x,y)}{v(x,y)}$

Es gilt: $u_x(x,y) = 2xy$ $v_x(x,y) = 2xy^2$

$u_y(x,y) = x^2$ $v_y(x,y) = 2x^2y + 4y^3$

Somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy(x^2y^2 + y^4 + 2) - (x^2y + 1) \cdot 2xy^2}{(x^2y^2 + y^4 + 2)^2} \\ &= \frac{2xy(x^2y^2 + y^4 + 2 - x^2y^2 - y)}{(x^2y^2 + y^4 + 2)^2} = \frac{2xy(y^4 - y + 2)}{(x^2y^2 + y^4 + 2)^2} \end{aligned}$$

Speziell z.B. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$ Zum Vergleich: $f(x,1) = \frac{x^2+1}{x^2+3}$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^2+1}{x^2+3} \right\} = \frac{2x(x^2+3) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^2(x^2y^2+y^4+2) - (x^2y+1) \cdot (2x^2y+4y^3)}{(x^2y^2+y^4+2)^2} \\ &= \frac{x^4y^2+x^2y^4+2x^2-2x^4y^2-4x^2y^4-2x^2y-4y^3}{(x^2y^2+y^4+2)^2} \\ &= \frac{-x^4y^2-3x^2y^4+2x^2-2x^2y-4y^3}{(x^2y^2+y^4+2)^2}\end{aligned}$$

Speziell z.B. $\frac{\partial f}{\partial y}(2,y) = \frac{-16y^2-12y^4+8-8y-4y^3}{(4y^2+y^4+2)^2}$

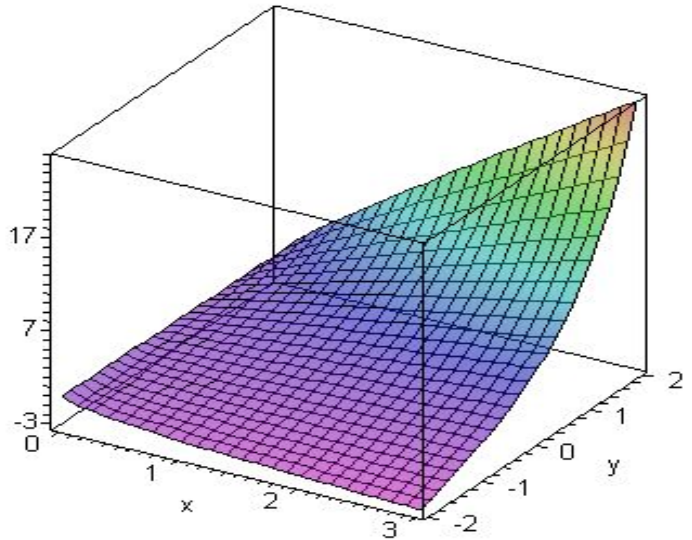
Zum Vergleich: $f(2,y) = \frac{4y+1}{4y^2+y^4+2}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy} \left\{ \frac{4y+1}{4y^2+y^4+2} \right\} &= \frac{4(4y^2+y^4+2) - (4y+1)(8y+4y^3)}{(4y^2+y^4+2)^2} \\ &= \frac{-16y^2-12y^4+8-8y-4y^3}{(4y^2+y^4+2)^2}\end{aligned}$$

Beispiel: $f(x,y) = y\sqrt{x} + x \cdot e^y$, $\mathbb{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= y \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + e^y \\ &= \frac{y}{2\sqrt{x}} + e^y\end{aligned}$$

$$f_y(x,y) = \sqrt{x} + x \cdot e^y$$

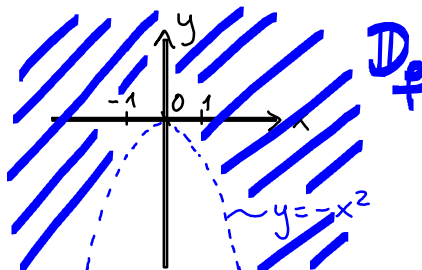


Beispiel: $f(x,y) = xy \cdot \ln(x^2+y)$

Da der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist, gilt

$$\mathbb{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x^2\}$$

Skizze des Definitionsbereichs



Es gilt: $f(x,y) = x \cdot y \cdot u(v(x,y))$ mit $u(v) = \ln(v)$, $v(x,y) = x^2 + y$
 Nach der einfachen Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ \ln(x^2 + y) \} = \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \{ \ln(x^2 + y) \} = \frac{1}{x^2 + y} \cdot 1$$

Nun können wir die partiellen Ableitungen von f mit der Produktregel bestimmen:

$$f_x(x,y) = y \left\{ 1 \cdot \ln(x^2 + y) + x \cdot \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x \right\} = y \left\{ \ln(x^2 + y) + \frac{2x^2}{x^2 + y} \right\}$$

$$f_y(x,y) = x \left\{ 1 \cdot \ln(x^2 + y) + y \cdot \frac{1}{x^2 + y} \right\} = x \left\{ \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} \right\}$$

Beispiel: $f(x,y) = \frac{x-y}{e^{xy}} = \frac{u(x,y)}{v(x,y)}$

Es gilt: $u_x(x,y) = 1$, $v_x(x,y) = y \cdot e^{xy}$

$u_y(x,y) = -1$, $v_y(x,y) = x \cdot e^{xy}$

Somit erhalten wir für die partiellen Ableitungen von f :

$$f_x(x,y) = \frac{1 \cdot e^{xy} - (x-y) \cdot y \cdot e^{xy}}{(e^{xy})^2} = \frac{e^{xy}(1 - (x-y)y)}{(e^{xy})^2} = \frac{1 - (x-y)y}{e^{xy}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{-1 \cdot e^{xy} - (x-y) \cdot x \cdot e^{xy}}{(e^{xy})^2} = \frac{e^{xy}(-1 - (x-y)x)}{(e^{xy})^2} = \frac{-1 - (x-y)x}{e^{xy}}$$

Beispiel: Eine Untersuchung der Nachfrage $N(p,m)$ nach Milch in Abhängigkeit vom relativen Preis $p > 0$ und dem Familieneinkommen $m > 0$ ergab den Zusammenhang

$$N(p,m) = A \cdot \frac{m^{2.08}}{p^{1.5}} = A \cdot p^{-1.5} \cdot m^{2.08},$$

mit einer Konstanten $A > 0$.

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen der Nachfragefunktion.

$$\frac{\partial N}{\partial p}(p,m) = A \cdot (-1.5) \cdot p^{-2.5} \cdot m^{2.08}, \quad \frac{\partial N}{\partial m}(p,m) = A \cdot 2.08 \cdot p^{-1.5} \cdot m^{1.08}$$

Da A, p und m positiv sind, ist $\frac{\partial N}{\partial p}(p,m) < 0$, $\frac{\partial N}{\partial m}(p,m) > 0$, d.h. mit wachsendem Preis nimmt die Nachfrage bei einem festen Einkommen ab und bei wachsendem Einkommen nimmt die Nachfrage bei einem festen Preis zu.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Für eine Funktion f von zwei Variablen x und y sind die ersten partiellen Ableitungen wieder Funktionen von x und y .

Sind diese wieder partiell differenzierbar, so können wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung bilden, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

und entsprechend auch partielle Ableitungen höherer Ordnung.

Die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung spielen bei der Bestimmung von Extremalstellen eine wichtige Rolle.

Beispiel: Wir bestimmen alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für $f(x, y) = x^3 \cdot e^{y^2}$.

$$f_x(x, y) = 3x^2 \cdot e^{y^2}$$

$$f_y(x, y) = x^3 \cdot 2y \cdot e^{y^2} = 2x^3 y \cdot e^{y^2}$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x \cdot e^{y^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = 3x^2 \cdot 2y \cdot e^{y^2} = 6x^2 y \cdot e^{y^2}$$

$$f_{yx}(x, y) = 6x^2 y \cdot e^{y^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = 2x^3 (e^{y^2} + y \cdot 2y e^{y^2}) = 2x^3 (1 + 2y^2) \cdot e^{y^2}$$

In diesem Beispiel ist $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, d.h. es spielt keine Rolle, ob wir für die sogenannten gemischten Ableitungen erst nach x und dann nach y oder umgekehrt differenzieren. Wir werden an späterer Stelle hinreichende Bedingungen für diese Vertauschbarkeit angeben.

Beispiel: Wir bestimmen alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung von $f(x, y) = x^y$ mit $x, y > 0$.

Für die Differentiation nach y ist $f(x, y) = e^{\ln(x^y)} = e^{y \ln(x)}$ zu beachten.

$$f_x(x, y) = y \cdot x^{y-1}$$

$$f_y(x, y) = \ln(x) \cdot e^{y \cdot \ln(x)} = \ln(x) \cdot x^y$$

$$f_{xx}(x, y) = y(y-1) \cdot x^{y-2}$$

$$f_{xy}(x, y) = x^{y-1} + y \cdot \ln(x) \cdot x^{y-1} = x^{y-1}(1 + y \cdot \ln(x))$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{1}{x} \cdot x^y + \ln(x) \cdot y \cdot x^{y-1} = x^{y-1}(1 + y \cdot \ln(x))$$

$$f_{yy}(x, y) = [\ln(x)]^2 \cdot x^y$$

Satz von Schwarz: Bei einer gemischten partiellen Ableitung k -ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k -ter Ordnung stetige Funktionen sind.

Bevor wir uns mit einigen ökonomischen Anwendungen befassen, führen wir im Zusammenhang mit partiellen Ableitungen noch zwei Bezeichnungen ein, die uns an späterer Stelle im Zusammenhang mit der Bestimmung relativer Extrema nützlich sein werden.

Gradient und Hesse-Matrix

Definition: Fasst man die partiellen Ableitung erster Ordnung einer Funktion

$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zu einem Vektor zusammen, so erhält man den

Gradienten von f : $\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$.

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung werden in einer quadratischen 2×2 -Matrix, der Hesse-Matrix angeordnet.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Beispiel: $f(x, y) = e^{x+2y} + y \cdot \ln(x^2+1)$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} + \frac{2xy}{x^2+1} \\ 2e^{x+2y} + \ln(x^2+1) \end{pmatrix}, \text{ z.B. } \text{grad } f(1, 0) = \begin{pmatrix} e \\ 2e + \ln(2) \end{pmatrix}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} + 2y \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & 2e^{x+2y} + \frac{2x}{x^2+1} \\ 2e^{x+2y} + \frac{2x}{x^2+1} & 4e^{x+2y} \end{pmatrix}, \text{ z.B. } H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} e & 2e+1 \\ 2e+1 & 4e \end{pmatrix}$$

Ökonomische Anwendungen partieller Ableitungen

Beispiel: Wir betrachten eine landwirtschaftliche Produktionsfunktion

$Y(K, L)$, wobei Y die Anzahl produzierter Einheiten in Abhängigkeit vom investierten Kapital K und Arbeitseinsatz L bezeichnet.

$\frac{\partial Y}{\partial K}(K, L)$ ist die momentane Änderungsrate des Outputs bzgl. K , wenn L konstant gehalten wird und wird Grenzprodukt des Kapitals genannt.

Entsprechend heißt $\frac{\partial Y}{\partial L}(K, L)$ Grenzprodukt der Arbeit.

Wir nehmen nun an, dass die Produktionsfunktion eine Cobb-Douglas Funktion ist, d.h.

$$Y(K, L) = A \cdot K^a \cdot L^b, \quad K, L > 0$$

mit positiven Konstanten A, a, b . Dann ist das

Grenzprodukt des Kapitals: $Y_K(K, L) = A \cdot a \cdot K^{a-1} L^b$

Grenzprodukt der Arbeit: $Y_L(K, L) = A \cdot b \cdot K^a L^{b-1}$

Unter der Annahme, dass K und L positiv sind, sind die Grenzprodukte ebenfalls positiv. Das heißt, dass eine Erhöhung des Kapitals bei konstant gehaltenem Arbeitseinsatz und unveränderter Anbaufläche zu einer Erhöhung der produzierten Mengen führt.

Entsprechend führt eine Erhöhung des Arbeitseinsatzes bei konstantem Kapitaleinsatz ebenfalls zu einer Erhöhung der produzierten Mengen.

Weiter gilt z.B. $Y_{KK}(K, L) = A \cdot a(a-1) K^{a-2} L^b$.

Für $a < 1$ ist $Y_{KK}(K, L) < 0$. Das bedeutet ein abnehmendes Grenzprodukt des Kapitals. Eine Erhöhung des Kapitals führt zwar zu einer Erhöhung des Outputs ($Y_K > 0$), der Anstieg geschieht aber mit abnehmender Rate ($Y_{KK} < 0$) (degressives Wachstum!).

Für $a > 1$ ist $Y_{KK}(K, L) > 0$. Das bedeutet zunehmendes Grenzprodukt

des Kapitals. Eine Erhöhung des Kapitals führt zu einer Erhöhung des Outputs ($Y_K > 0$), der Anstieg geschieht mit einer zunehmenden Rate ($Y_{KK} > 0$) (progressives Wachstum!)

Beispiel: Es sei x ein Index des Gesamtbetrags der Güter, die in einer Gesellschaft produziert und konsumiert werden und s ein Maß für den Verschmutzungsgrad der Umwelt. Weiter nehmen wir an, dass $u(x, s)$ eine Funktion ist, die das gesamte Wohlbefinden der Gesellschaft misst. Wir überlegen, welche Vorzeichen für $u_x(x, s)$ und $u_s(x, s)$ zu erwarten sind, und was Ökonomen gewöhnlich für das Vorzeichen von $u_{xs}(x, s)$ annehmen.

Es ist sicher plausibel, anzunehmen, dass bei konstanter Umweltbelastung das Wohlbefinden steigt, wenn die Menge der Güter steigt, d.h. $u_x(x, s) > 0$. Entsprechend wird bei konstant gehaltener Menge der Güter das Wohlbefinden bei wachsender Umweltbelastung abnehmen, d.h. $u_s(x, s) < 0$. Wenn man nun von $u_x(x, s)$ die partielle Ableitung nach s betrachtet, untersucht man, ob das Wachstum der Zufriedenheit bei zunehmender Umweltbelastung stärker oder geringer ist. Man kann erwarten, dass der Anstieg im Wohlbefinden durch mehr Güter bei steigender Umweltbelastung geringer wird, d.h. $u_{xs}(x, s) < 0$.

(Die Steigerung des Wohlbefindens durch ein zweites Stück Kuchen ist in einem verräucherten Raum sicher geringer als in einem Raum mit frischer Luft.)

Ein Beispiel für eine Funktion mit solcher Eigenschaften, die als Modell für die oben genannte Aufgabenstellung aber sicher zu einfach wäre, ist

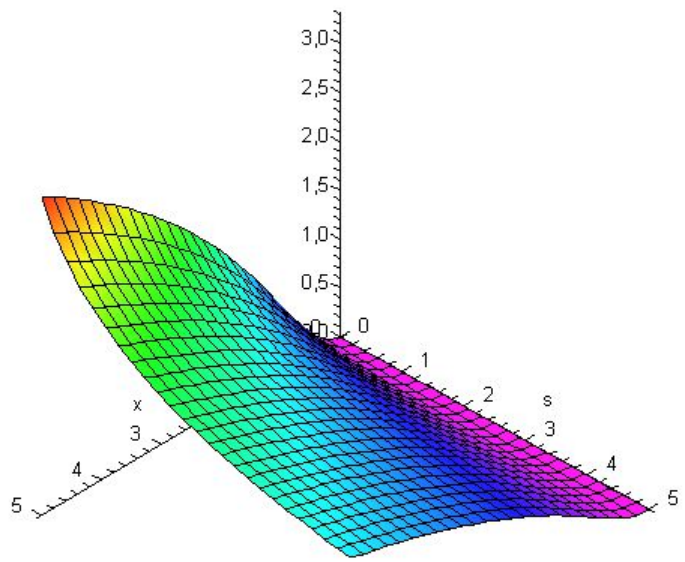
$$u(x, s) = \frac{1}{1+s} \cdot \ln(x^2+1), \quad x, s \geq 0.$$

Für $x, s > 0$ gilt:

$$u_x(x, s) = \frac{1}{1+s} \cdot \frac{2x}{x^2+1} > 0$$

$$u_s(x, s) = -\frac{1}{2(1+s)^3} \cdot \ln(x^2+1) < 0$$

$$u_{xs}(x, s) = -\frac{1}{2(1+s)^3} \cdot \frac{2x}{x^2+1} < 0$$

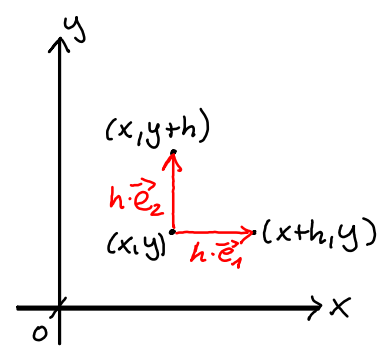


Richtungsableitung und Eigenschaften des Gradienten

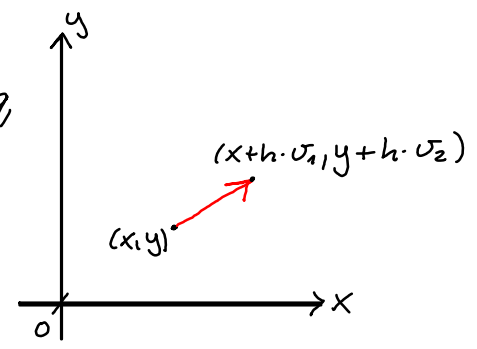
Bisher haben wir nur momentane Änderungsraten in Richtung der Koordinatenachsen, d.h. partielle Ableitungen betrachtet. Dies wollen wir nun verallgemeinern. Dazu betrachten wir zunächst wieder den Fall $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Bei den partiellen Ableitungen betrachtet man die Änderung der Funktion in Richtung der kartesischen Einheitsvektoren, d.h. in Richtung von $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h \cdot 1, y+h \cdot 0) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h \cdot 0, y+h \cdot 1) - f(x, y)}{h}$$



Wir lassen nun auch andere Richtungsvektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ zu. Damit ergibt sich verallgemeinernd folgende Definition für die Richtungsableitung, d.h. für die momentane Änderungsrate einer Funktion bzgl. \vec{v} mit $|\vec{v}| = 1$.



Definition: Sei $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Die Richtungsableitung (der Anstieg) von f in Richtung \vec{v} mit $|\vec{v}|=1$ ist definiert als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h \cdot v_1, y+h \cdot v_2) - f(x, y)}{h} = \partial_{\vec{v}} f(x, y),$$

falls der Grenzwert existiert.

Man sieht leicht ein, dass man speziell für $\vec{v} = \vec{e}_1$ bzw. $\vec{v} = \vec{e}_2$ die partiellen Ableitungen erhält, d.h.

$$\partial_{\vec{e}_1} f(x, y) = f_x(x, y) \text{ und } \partial_{\vec{e}_2} f(x, y) = f_y(x, y).$$

Ist die Funktion stetig partiell differenzierbar, d.h. existieren die partiellen Ableitungen und sind stetig, so lassen sich die Richtungsableitungen sehr einfach mit Hilfe der partiellen Ableitungen berechnen.

Der folgende Satz ist daher für praktische Rechnungen von großer Bedeutung.

Satz: Sei $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung \vec{v} mit $|\vec{v}|=1$:

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f(x, y) &= v_1 \cdot f_x(x, y) + v_2 \cdot f_y(x, y) \\ &= \langle \vec{v}, \text{grad } f(x, y) \rangle \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x, y) = 8 - x^2 - 4y^2$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Es gilt $|\vec{v}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 1$ und $\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -8y \end{pmatrix}$.

Somit ist $\partial_{\vec{v}} f(x, y) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x \\ -8y \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-2x + 8y)$.

An der Stelle $(x^*, y^*) = (1, 1)$ gilt z.B.

$$f_x(1, 1) = -2, \quad f_y(1, 1) = -8, \quad \partial_{\vec{v}} f(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 6 = 3 \cdot \sqrt{2}$$

Beispiel: $f(x, y) = \ln(y^2 - x)$, $\vec{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Es gilt $|\vec{v}| = \frac{1}{5} \sqrt{4^2 + 3^2} = 1$ und $\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y^2 - x} \\ \frac{2y}{y^2 - x} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2 - x} \begin{pmatrix} -1 \\ 2y \end{pmatrix}$.

Somit ist $\partial_{\vec{v}} f(x, y) = \langle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{y^2 - x} \begin{pmatrix} -1 \\ 2y \end{pmatrix} \rangle = \frac{6y - 4}{5(y^2 - x)}$

An der Stelle $(x^*, y^*) = (-1, 2)$ gilt z.B.

$$f_x(-1, 2) = -\frac{1}{5}, \quad f_y(-1, 2) = \frac{4}{5}, \quad \partial_{\vec{v}} f(-1, 2) = \frac{8}{25}$$

Im Folgenden nehmen wir zunächst wieder die Anschauung zu Hilfe und stellen uns vor, dass wir an einer Stelle in einer Gebirgslandschaft stehen und diejenige Richtung suchen, die uns den steilsten Anstieg bzw. Abstieg zeigt. Hierauf lässt sich tatsächlich eine allgemeingültige Antwort geben. Dies ist von großem praktischen Nutzen im Zusammenhang mit Algorithmen zur Lösung von Optimierungsproblemen, wenn man z.B. ausgehend von einem Startpunkt schrittweise immer wieder in Richtung des steilsten Anstiegs bzw. Abstiegs fortschreiten will, um (näherungsweise) zu einem Maximum bzw. Minimum zu gelangen.

Um verstehen zu können, was mathematisch dahinter steckt, muss man wissen, dass es **zwei** Möglichkeiten gibt, innere Produkte (Skalarprodukte) von Vektoren zu berechnen.

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im \mathbb{R}^2 , so gilt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

wobei der kleinere Winkel zu nehmen ist.

Da sich für eine stetig partiell differenzierbare Funktion die Richtungsableitung über das innere Produkt $\langle \vec{v}, \text{grad} f(x, y) \rangle$, $|\vec{v}| = 1$, berechnen lässt, gilt also

$$\partial_{\vec{v}} f(x, y) = \underbrace{|\vec{v}|}_{=1} \cdot |\text{grad} f(x, y)| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \text{grad} f(x, y))$$

Der maximal mögliche Wert für den Cosinus ist 1 bei einem Winkel von 0° und der minimal mögliche Wert ist -1 für einen Winkel von 180° .

Die Richtungsableitung $\partial_{\vec{v}} f(x, y)$ wird also **maximal**, wenn \vec{v} und $\text{grad} f(x, y)$ in **dieselbe Richtung** zeigen und **minimal**, wenn \vec{v} und $\text{grad} f(x, y)$ in die **entgegengesetzte Richtung** zeigen.

Zusammenfassend ergibt sich somit:

Satz: Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs, der negative Gradient zeigt in Richtung des steilsten Abstiegs.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

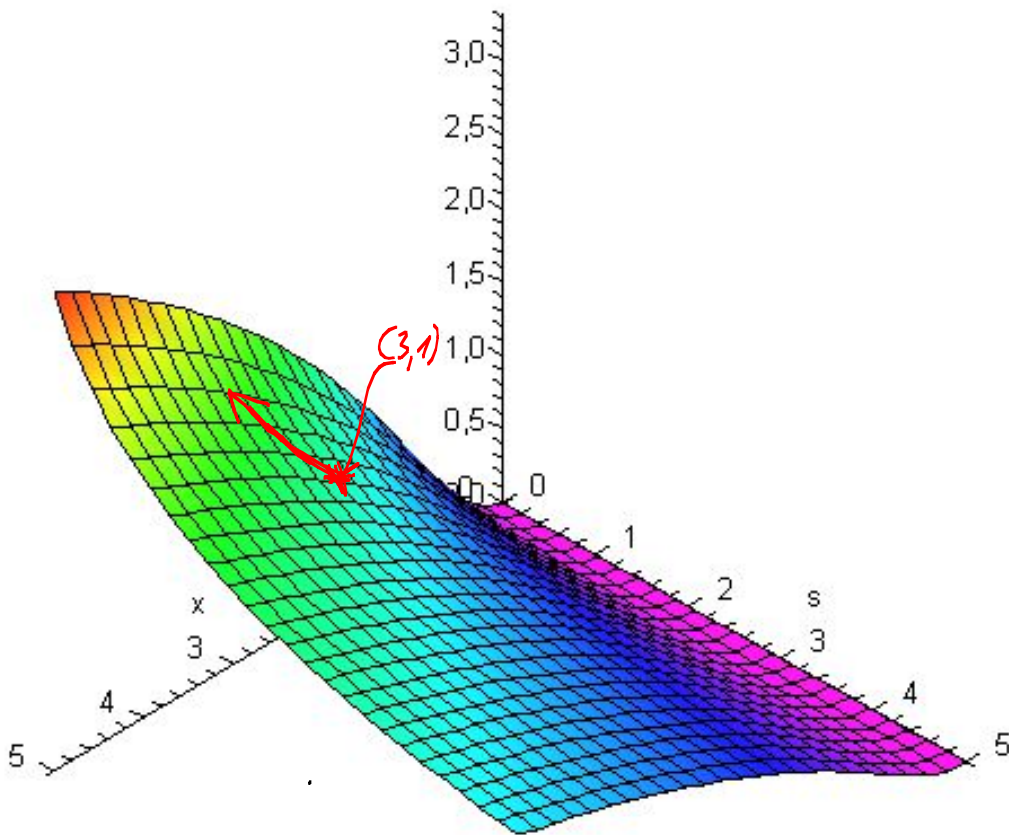
$$u(x,s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}} \ln(x^2+1), \quad x, s \geq 0,$$

die wir schon in einem früheren Beispiel untersucht haben.

Allgemein ist die Richtung des steilsten Anstiegs

$$\text{grad } u(x,s) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+s}} \cdot \frac{2x}{x^2+1}, -\frac{1}{2\sqrt{1+s}^3} \cdot \ln(x^2+1) \right)^T$$

An der Stelle $(x^*, s^*) = (3, 1)$ z.B. $\text{grad } u(3,1) = \left(\frac{3}{10} \cdot \sqrt{2}, -\frac{1}{8} \sqrt{2} \cdot \ln(10) \right) \approx \begin{pmatrix} 0.42 \\ -0.41 \end{pmatrix}$



Eine weitere Eigenschaft des Gradienten erschließt sich mit Hilfe folgender Überlegung. Zeigt \vec{v} in Richtung der Tangenten einer Niveaulinie, so ist die Richtungsableitung in Richtung von \vec{v} gleich Null, da sich der Funktionswert auf einer Niveaulinie nicht ändert. In diesem Fall ist also

$$\partial_{\vec{v}} f(x, y) = \langle \vec{v}, \text{grad} f(x, y) \rangle = 0.$$

Das innere Produkt zweier Vektoren ist aber genau dann Null, wenn die Vektoren orthogonal zueinander sind, also $\vec{v} \perp \text{grad} f(x, y)$.

Zusammenfassend erhalten wir:

Satz: Der Gradient steht senkrecht auf den Niveaulinien.

13. Optimierungsaufgaben ohne Nebenbedingungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Problemstellung, lokale und globale Extrema von Funktionen mehrerer Variablen zu bestimmen.

Wir haben bereits notwendige und hinreichende Bedingungen bei unterschiedlichen Differenzierbarkeitseigenschaften für Funktionen von einer Variablen angegeben. Viele der interessanten ökonomischen Optimierungsprobleme hängen jedoch häufig von einer Vielzahl von Variablen ab. Ein Verbraucher wählt Mengen von vielen verschiedenen Gütern, um einen möglichst großen Nutzen zu erreichen. Ein Unternehmen versucht die Kosten für Lohn, Lagerhaltung, Maschineneinsatz, Transport etc. für ein vorgegebenes Produktionsziel möglichst gering zu halten.

Da auch hier die größten Schwierigkeiten bereits beim Übergang von einer zu zwei Variablen entstehen, und wir für die Behandlung von Funktionen von zwei Variablen die graphischen Möglichkeiten der Darstellung von Funktionsgraphen und Niveaulinien nutzen können, behandeln wir hier Problemstellungen mit zwei unabhängigen Variablen.

Bevor wir die Begriffe lokale und globale Extrema definieren, müssen wir uns zunächst mit einem anderen Thema beschäftigen. Wir erinnern uns an Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen, die prinzipiell offen, halboffen oder abgeschlossen sein können, je nachdem, ob Intervallrandpunkte dazugehören oder nicht.

Bei Funktionen von zwei Variablen ist der Definitionsbereich eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 und kann sehr unterschiedliche Eigenschaften aufweisen. Wichtig in den folgenden Erklärungen sind die Begriffe offene, abgeschlossene, beschränkte und unbeschränkte Mengen, innere Punkte, Randpunkte.

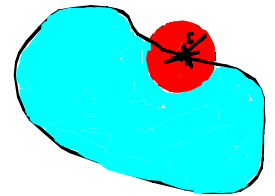
Definition: Sei S eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 .

1) Ein Punkt $(x^*, y^*) \in S$ heißt innerer Punkt von S , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass alle Punkte von $U_\varepsilon(x^*, y^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 < \varepsilon^2\}$ in S liegen. Dabei beschreibt $U_\varepsilon(x^*, y^*)$ die Punkte eines Kreises um (x^*, y^*) mit Radius ε , die **nicht** auf dem Kreisrand liegen.



2) S heißt offen, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

3) Ein Punkt $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ heißt Randpunkt von S , wenn jeder Kreis um (x^*, y^*) sowohl Punkte von S als auch Punkte, die nicht zu S gehören, enthält.

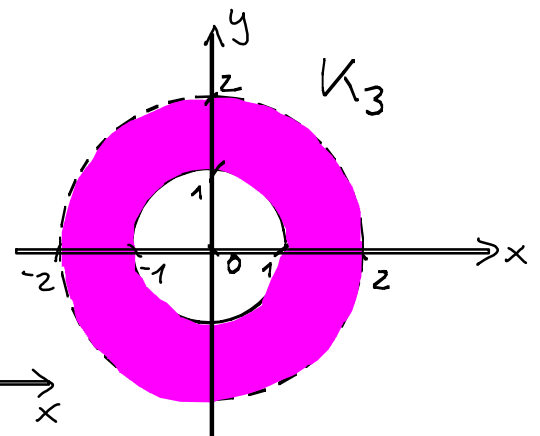
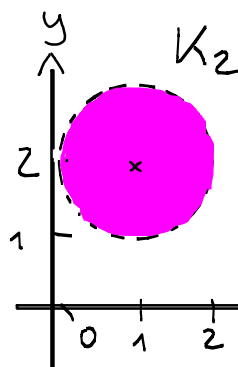
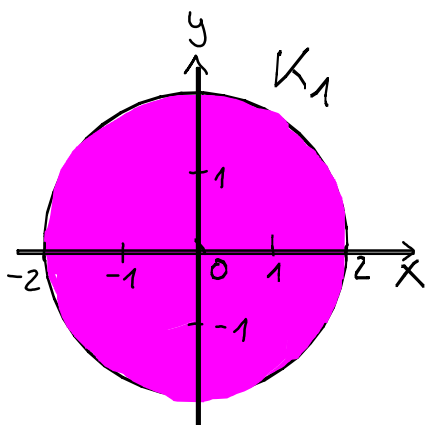


4) S heißt abgeschlossen, wenn das Komplement von S in \mathbb{R}^2 , d.h. die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus S$, offen ist. Anschaulich bedeutet dies, dass jeder Randpunkt von S zu S gehört.

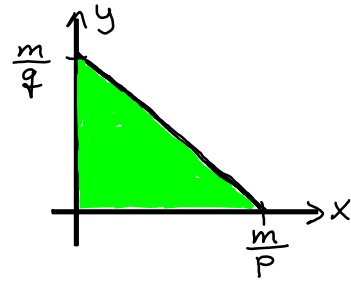
5) S heißt beschränkt, wenn es einen (hinreichend großen) Kreis gibt, der S enthält.

Beispiel:

- 1) $K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, Kreis um $(0, 0)$ mit Radius 2 ist abgeschlossen.
- 2) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 1\}$, Kreis um $(1, 2)$ mit Radius 1 ist offen.
- 3) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.



Beispiel: Die (Budget-)Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : px + qy \leq m, x \geq 0, y \geq 0\}$ mit Preisen p und q , Mengen x und y für zwei Güter und Einkommen $m > 0$ ist abgeschlossen. Die Randpunkte von B sind gerade die Seiten des Dreiecks, das durch B beschrieben wird.



Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns nun dem Hauptthema dieses Kapitels zu und geben zunächst eine Erweiterung der Begriffe bzgl. globaler und lokaler Extrema für Funktionen von zwei Variablen an.

Definition: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x^*, y^*) \in D_f$.

1) Globale Extrema

a) f hat an der Stelle (x^*, y^*) ein globales Minimum $f(x^*, y^*)$, wenn

$$f(x, y) \geq f(x^*, y^*) \text{ für alle } (x, y) \in D_f.$$

b) f hat an der Stelle (x^*, y^*) ein globales Maximum $f(x^*, y^*)$, wenn

$$f(x, y) \leq f(x^*, y^*) \text{ für alle } (x, y) \in D_f.$$

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe Optimal-, Extremalstellen und Optimal-, Extremwerte.

2) Lokale (relative) Extrema

Zu $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit $U_\varepsilon(x^*, y^*)$ die offene Kreisscheibe um (x^*, y^*) mit Radius ε , d.h. $U_\varepsilon(x^*, y^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 < \varepsilon^2\}$.



a) f hat an der Stelle (x^*, y^*) ein lokales (relatives) Minimum $f(x^*, y^*)$, wenn es

ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x, y) \geq f(x^*, y^*)$ für alle $(x, y) \in U_\varepsilon(x, y) \cap D_f$.

b) f hat an der Stelle (x^*, y^*) ein lokales (relatives) Maximum $f(x^*, y^*)$, wenn es

ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x, y) \leq f(x^*, y^*)$ für alle $(x, y) \in U_\varepsilon(x, y) \cap D_f$.

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe lokale (relative) Extremalstellen und Extremwerte bzw. Extrema.

Wir beschäftigen uns nun mit Kriterien, wann Minima und Maxima existieren und mit Methoden, wie man diese findet. In diesem Zusammenhang erinnern wir uns zunächst an ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von Extremwerten für Funktionen von einer Variablen, das wir im letzten Semester kennengelernt haben.

Satz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$.

Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in [a, b]$, in dem f ein Minimum besitzt und (mindestens) ein $x_1 \in [a, b]$, in dem f ein Maximum besitzt, d.h.

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Dieses Resultat lässt sich nun auf Funktionen von zwei Variablen übertragen, wenn man die Voraussetzungen geeignet verallgemeinert.

Satz: Sei $f: \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf \mathcal{D}_f , wobei $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$, \mathcal{D}_f abgeschlossen und beschränkt sein soll. Dann existiert (mindestens) ein $(x^*, y^*) \in \mathcal{D}_f$, in dem f ein Minimum besitzt und (mindestens) ein (x^{**}, y^{**}) , in dem f ein Maximum besitzt, d.h.

$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y) \leq f(x^{**}, y^{**}) \text{ für alle } (x, y) \in \mathcal{D}_f.$$

Wichtig zu bemerken ist, dass der Satz ein hinreichendes Kriterium liefert. Weiter muss \mathcal{D}_f nicht der maximal mögliche Definitionsbereich sein, sondern wesentlich ist, dass die Voraussetzungen an \mathcal{D}_f (nichtleer, abgeschlossen, beschränkt) erfüllt sind. Bei dem Resultat handelt es sich um einen reinen Existenzsatz ohne Angabe eines Verfahrens, wie die Extrema zu bestimmen sind.

Im Allgemeinen sind zur Bestimmung globaler Extrema prinzipiell folgende Punkte abzuarbeiten:

- Bestimmung aller lokalen Extrema im Innern

- gegebenenfalls Untersuchung der Funktion
 - an Randpunkten des Definitionsbereichs
 - Grenzbetrachtungen, wenn Variablen gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ gehen
 - an Definitionslücken

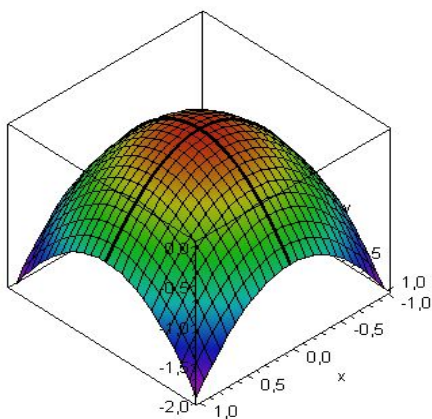
Sind Minimum und Maximum einer Funktion zu bestimmen, die auf einer abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge des \mathbb{R}^2 definiert und dort stetig ist, so müssen alle lokalen Extrema im Inneren und die größten bzw. kleinsten Funktionswerte auf dem Rand untersucht werden.

Wir werden uns insbesondere damit befassen, wie man unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Funktion lokale Extrema im Inneren eines Definitionsbereiches bestimmen kann.

Anschaulich kann man sich zunächst folgendes klarmachen.

Steht man in einer "Gebirgslandschaft" an einem lokalen Minimum, so bedeutet dies, dass der Weg dorthin (lokal) aus einer beliebigen Richtung kommend monoton fallend und danach monoton wachsend ist. Entsprechend ist der Weg (lokal) zu einem lokalen Maximum zunächst monoton wachsend und ab dem Maximum monoton fallend.

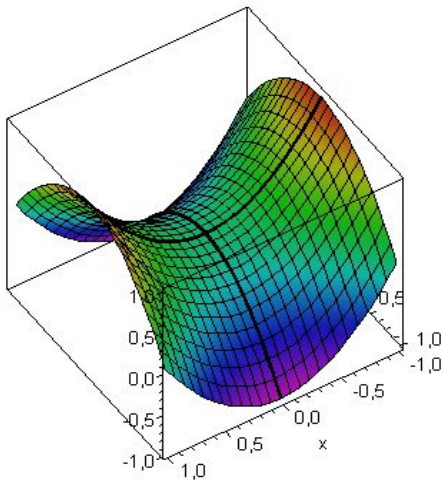
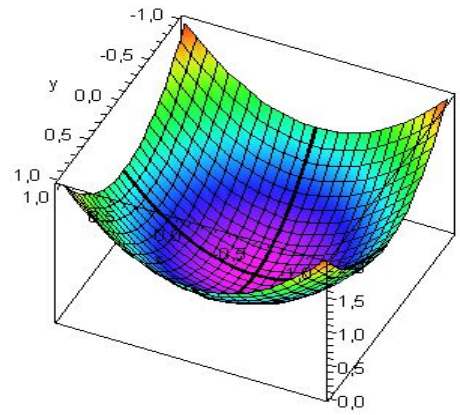
Insbesondere gilt: Ist $f(x^*, y^*)$ lokales Minimum bzw. Maximum, dann ist $f(x^*, y^*)$ insbesondere auch ein lokales Minimum bzw. Maximum auf denjenigen Kurven, die durch den Schnitt von $f(x, y)$ mit den Ebenen durch $x = x^*$ bzw. $y = y^*$ beschrieben werden. Existieren die partiellen Ableitungen, so müssen diese an der Stelle (x^*, y^*) Null sein.



Maximum an der Stelle $(x^*, y^*) = (0, 0)$.

Die Kurven auf der Fläche durch den Punkt $(0, 0, f(0, 0))$ in Richtung x - bzw. y -Achse sind durch dickere schwarze Linien hervorgehoben. Beide Kurven sind konkav.

Minimum an der Stelle $(x^*, y^*) = (0, 0)$.
 Die Kurven auf der Fläche durch den Punkt $(0, 0, f(0, 0))$ in Richtung x - bzw. y -Achse sind durch dickere schwarze Linien hervorgehoben. Beide Kurven sind konvex.



Auch in dieser Graphik sind die Kurven auf der Fläche durch $(0, 0, f(0, 0))$ in Richtung x - bzw. y -Achse durch dickere schwarze Linien gekennzeichnet. Man erkennt, dass man bei der Kurve in x -Richtung an der Stelle $(0, 0)$ ein Minimum, bei der in y -Richtung ein Maximum durchläuft. Eine Kurve ist

konvex, die andere konkav. Einen solchen Punkt nennt man auch Sattelpunkt. Obwohl die Steigungen beider Kurven an der Stelle $(0, 0)$ Null sind, handelt es sich weder um ein Minimum noch um ein Maximum.

Damit haben wir anschaulich folgendes überlegt.

Notwendige Bedingung für relative Extrema

Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Weiter besitze f an der Stelle (x^*, y^*) im Inneren von D_f ein relatives Extremum. Dann gilt:

$f_x(x^*, y^*) = 0$ und $f_y(x^*, y^*) = 0$, kurz $\text{grad } f(x^*, y^*) = \vec{0}$.

Bemerkung: 1) Anschaulich bedeutet die Bedingung, dass die durch f beschriebene Fläche an einem Extremum eine zur xy -Ebene parallele Tangentialebene besitzt. (Vgl. auch Lineare Approximation: Wenn $\text{grad } f(x^*, y^*) = \vec{0}$, dann ist $t(x, y) = f(x^*, y^*)$ die Gleichung der Tangentialebene.)

2) Die Bedingung $\text{grad } f(x^*, y^*) = \vec{0}$ ist eine notwendige Bedingung, sie ist nicht hinreichend.

3) Punkte (x^*, y^*) , für die die notwendige Bedingung $\text{grad } f(x^*, y^*) = \vec{0}$ erfüllt ist, heißen stationäre Punkte.

4) Man spricht auch von notwendiger Bedingung 1. Ordnung, weil hier die partiellen Ableitungen 1. Ordnung betrachtet werden.

Zum Auffinden innerer lokaler Extrema einer stetig partiell differenzierbaren Funktion müssen also zunächst alle stationären Punkte bestimmt werden. Dazu muss ein in der Regel nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden, was ziemlich kompliziert sein kann. Es ist leider nicht möglich, ein "stets funktionierendes Kochrezept" anzugeben. **Es hilft nur umfangreiches Üben** 😊 Wie man nach Auffinden stationärer Punkte entscheiden kann, ob es sich um Extremalstellen handelt, werden wir behandeln, nachdem wir einige Beispiele gerechnet haben.

Beispiel: Wir bestimmen die stationären Punkte von $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$.

$$\text{Es gilt: } \text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 3y - 3x^2 \\ 3x - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) y - x^2 = 0 \\ 2) x - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Auflösen von 1) nach } y: y = x^2$$

$$\text{Einsetzen von } y = x^2 \text{ in 2): } x - x^4 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Die zugehörigen y -Werte erhalten wir aus 1).

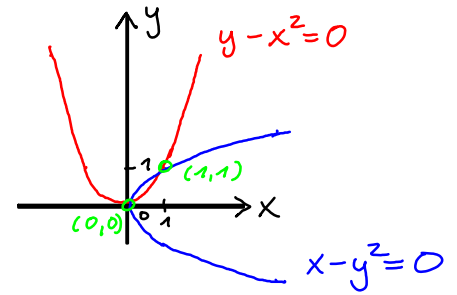
$$x = 0 \text{ in 1): } y = 0$$

$$x = 1 \text{ in 1): } y = 1$$

Die Funktion besitzt also die beiden stationären Punkte $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$.

Sie sind "Kandidaten" für lokale Extremalstellen.

Manchmal kann es auch hilfreich sein, die durch die Bedingung $\text{grad } f(x,y) = \vec{0}$ gegebenen Kurven in der xy -Ebene zu skizzieren.



Beispiel: Sei $f(x,y) = x \cdot \ln(x^2 + y^2)$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\text{grad } f(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

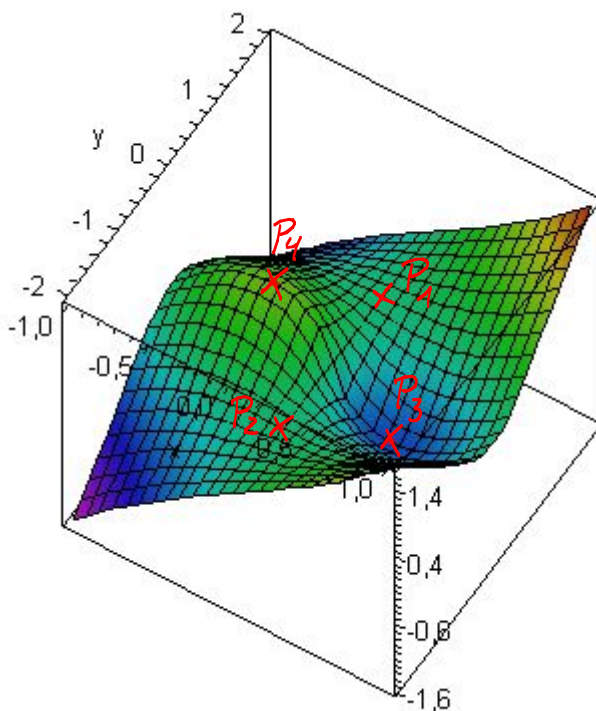
$$\text{grad } f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0 \\ 2) \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Auflösen von 2): $\frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=0$, aber nicht beide gleichzeitig Null (vgl. Nenner)

Einsetzen $x=0$ in 1): $\ln(y^2) = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{y = 1 \vee y = -1}$

Einsetzen $y=0$ in 1): $\ln(x^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = e^{-2} \Leftrightarrow \underline{x = e^{-1} \vee x = -e^{-1}}$

Die Funktion besitzt also die vier stationären Punkte $P_1(0,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(e^{-1},0)$, $P_4(-e^{-1},0)$.



Wie man an der Graphik erkennen kann, handelt es sich nur bei P_3 und P_4 um lokale Extremalstellen.

Beispiel: $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} -4x + 4 \\ -2y + 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) -4x + 4 = 0 \\ (2) -2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$P(1, 2)$ ist somit einziger stationärer Punkt. In diesem speziellen Beispiel kann man recht einfach feststellen, dass f an der Stelle $(1, 2)$ ein Maximum besitzt, das sogar global ist.

Dazu bringt man die Funktion mittels quadratischer Ergänzung auf die Form $f(x, y) = a_1(x - b_1)^2 + a_2(y - b_2)^2 + C$, d.h.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -2(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) - 3 + 2 + 4 \\ &= -2(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 3 \end{aligned}$$

Da die quadratischen Terme $(x - 1)^2$ und $(y - 2)^2$ stets nicht negativ sind und mit negativen Faktoren multipliziert werden, wird f maximal für $(x - 1)^2 = 0$ und $(y - 2)^2 = 0$, d.h. $x = 1$, $y = 2$.

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

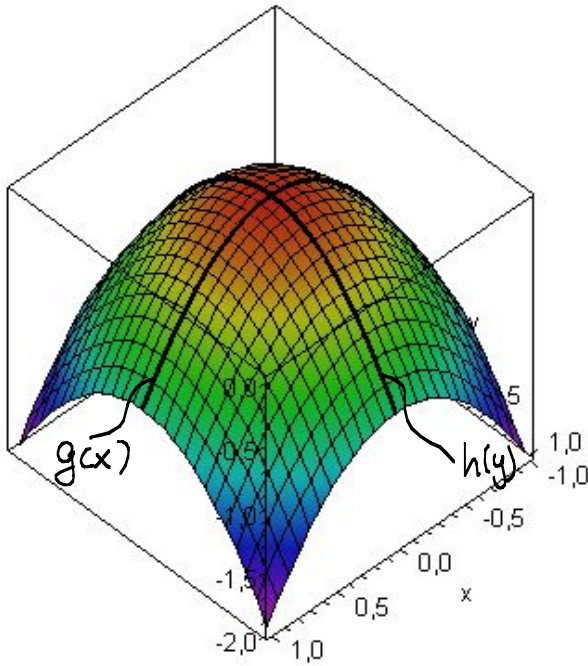
Wie wir gesehen haben, müssen stationäre Punkte nicht Extremalstellen einer Funktion sein, sondern es können z.B. auch Sattelpunkte vorliegen.

Wir suchen nun nach hinreichenden Kriterien für die Entscheidung, ob an einem stationären Punkt ein lokales Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt. Dazu stellen wir zunächst folgende Überlegung an.

Sei (x^*, y^*) ein stationärer Punkt einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ im Inneren von D_f .

Wir betrachten zunächst den Fall, dass f an der Stelle (x^*, y^*) ein lokales Maximum besitzt.

Die Funktionen $g(x) = f(x, y^*)$ und $h(y) = f(x^*, y)$ beschreiben das Verhalten von f entlang der Geraden $y = y^*$ bzw. $x = x^*$.



$g(x)$ bzw. $h(y)$ müssen in x^* bzw. y^* ein lokales Maximum besitzen, d.h. sie müssen konkav sein.

Anders ausgedrückt:

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x^*) = f_{xx}(x^*, y^*) \leq 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^2}{dy^2} h(y^*) = f_{yy}(x^*, y^*) \leq 0.$$

Gilt sogar $\frac{d^2}{dx^2} g(x^*) < 0$ und $\frac{d^2}{dy^2} h(y^*) < 0$, dann garantiert dies, dass g und h tatsächlich

in x^* bzw. y^* lokale Maxima (sogar strikte) besitzen. Anders ausgedrückt garantieren die Bedingungen $f_{xx}(x^*, y^*) < 0$ und $f_{yy}(x^*, y^*) < 0$, dass f ein lokales Maximum hat in den Richtungen durch (x^*, y^*) , die parallel zur x - bzw. y -Achse sind. Dies sagt aber noch nichts aus über das Verhalten von f , wenn wir uns von (x^*, y^*) aus in andere als diese beiden Richtungen bewegen.

Wir erinnern uns daran, dass man unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Richtungsableitung von f in Richtung \vec{v} , $|\vec{v}|=1$, als

$$\partial_{\vec{v}} f(x, y) = \langle \text{grad } f(x, y), \vec{v} \rangle = f_x(x, y) \cdot v_1 + f_y(x, y) \cdot v_2$$

berechnen kann.

Differenziert man dieses noch einmal in Richtung \vec{v} , so erhält man

$$\partial_{\vec{v}}^2 f(x, y) = \langle \text{grad}(f_x(x, y) \cdot v_1 + f_y(x, y) \cdot v_2), \vec{v} \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) \cdot v_1 + f_{xy}(x, y) \cdot v_2 \\ f_{xy}(x, y) \cdot v_1 + f_{yy}(x, y) \cdot v_2 \end{pmatrix}, \vec{v} \right\rangle$$

$$= f_{xx}(x, y) v_1^2 + 2 f_{xy}(x, y) v_1 v_2 + f_{yy}(x, y) v_2^2$$

$$= \vec{v}^T H_f(x, y) \vec{v}$$

Ist nun $\vec{v}^T H_f(x^*, y^*) \vec{v} < 0$, dann garantiert dies, dass f ein lokales Maximum in Richtung \vec{v} besitzt. Wenn dies für alle \vec{v} mit $|\vec{v}|=1$ oder äquivalent dazu für alle $\vec{v} \neq \vec{0}$ erfüllt ist, haben wir tatsächlich die Garantie für ein (striktes) lokales Maximum.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass die Bedingung $\vec{v}^T H_f(x^*, y^*) \vec{v} < 0$ für alle $\vec{v} \neq \vec{0}$ gerade die Definition für die negative Definitheit der Hesse-Matrix $H_f(x^*, y^*)$ von f an der Stelle (x^*, y^*) ist. In der Linearen Algebra haben wir auch gesehen, wie man die negative Definitheit mit dem Hurwitz-Kriterium prüfen kann, das für den Fall einer 2×2 -Matrix in der unten stehenden Bedingung für lokale Extrema direkt eingesetzt wird.

Im Falle lokaler Minima führen analoge Überlegungen (konkav durch konvex ersetzen) auf die Vorzeichenbedingung $\vec{v}^T H_f(x^*, y^*) \vec{v} > 0$ für alle $\vec{v} \neq \vec{0}$, d.h. die positive Definitheit der Hesse-Matrix $H_f(x^*, y^*)$ an der Stelle (x^*, y^*) .

Wir fassen die Ergebnisse nun zusammen. Dazu bezeichnen wir noch mit

$$\Delta_f(x^*, y^*) = \det H_f(x^*, y^*) = f_{xx}(x^*, y^*) \cdot f_{yy}(x^*, y^*) - f_{xy}^2(x^*, y^*)$$

die Determinante der Hesse-Matrix

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

Sei $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und (x^*, y^*) aus dem Inneren von \mathbb{D}_f ein stationärer Punkt von f . Dann gilt:

1) Ist $\Delta_f(x^*, y^*) > 0$, dann besitzt f an der Stelle (x^*, y^*) ein (striktes) lokales Extremum.

a) Ist zusätzlich $f_{xx}(x^*, y^*) < 0$ (oder $f_{yy}(x^*, y^*) < 0$), dann liegt ein relatives Maximum vor.

b) Ist zusätzlich $f_{xx}(x^*, y^*) > 0$ (oder $f_{yy}(x^*, y^*) > 0$), dann liegt ein relatives Minimum vor.

- 2) Ist $\Delta_f(x^*, y^*) < 0$, dann besitzt f an der Stelle (x^*, y^*) einen Sattelpunkt.
 3) Ist $\Delta_f(x^*, y^*) = 0$, so lässt sich mit diesem Kriterium keine Aussage machen.

Bemerkung: $f_{xx}(x^*, y^*) > 0$ und $\Delta_f(x^*, y^*) > 0$ bedeutet nach dem Hurwitz-Kriterium, dass $H_f(x^*, y^*)$ positiv definit ist; $f_{xx}(x^*, y^*) < 0$ und $\Delta_f(x^*, y^*) > 0$ dagegen, dass $H_f(x^*, y^*)$ negativ definit ist.

Wir wenden das hinreichende Kriterium nun auf die vorher bereits betrachteten Beispiele an.

Beispiel: $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$.

Die stationären Punkte von f sind $P_1(0, 0)$ und $P_2(1, 1)$.

Es gilt: $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$, $\Delta_f(x, y) = 36xy - 9$

Da $\Delta_f(0, 0) = -9 < 0$ ist, besitzt f an der Stelle $(0, 0)$ einen Sattelpunkt.

Wegen $f_{xx}(1, 1) = -6 < 0$ und $\Delta_f(1, 1) = 27 > 0$ folgt, dass f an der Stelle $(1, 1)$ ein lokales Maximum $f(1, 1) = 1$ besitzt.

Beispiel: $f(x, y) = x \cdot \ln(x^2 + y^2)$, $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Die stationären Punkte von f sind $P_1(0, 1)$, $P_2(0, -1)$, $P_3(e^{-1}, 0)$, $P_4(-e^{-1}, 0)$.

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Es gilt: $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Delta_f(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} (4x^2(x^2 + 3y^2)(x^2 - y^2) - 4y^2(y^2 - x^2)^2) \\ &= \frac{4(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4} (x^4 + 3x^2y^2 - x^2y^2 + y^4) = \frac{4(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^4} = 4 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Da $\Delta_f(0,1) = -4 < 0$ und $\Delta_f(0,-1) = -4 < 0$, besitzt f an den Stellen $(0,1)$ und $(0,-1)$ Sattelpunkte.

Wegen $f_{xx}(e^{-1}, 0) = 2e > 0$ und $\Delta_f(e^{-1}, 0) = 4e^2 > 0$ folgt, dass f an der Stelle $(e^{-1}, 0)$ ein lokales Minimum $f(e^{-1}, 0) = -2e^{-1}$ besitzt.

Wegen $f_{xx}(-e^{-1}, 0) = -2e < 0$ und $\Delta_f(-e^{-1}, 0) = 4e^2 > 0$ folgt, dass f an der Stelle $(-e^{-1}, 0)$ ein lokales Maximum $f(-e^{-1}, 0) = 2e^{-1}$ besitzt.

14. Handwerkszeug der Differentialrechnung in mehreren Variablen

In diesem Kapitel werden wir wichtige Methoden für den praktischen Umgang mit Funktionen von zwei Variablen im Zusammenhang mit der Differentialrechnung kennenlernen. Die Anwendungen und Interpretationen werden dabei wenn möglich an Hand ökonomischer Beispiele erläutert.

Bereits in der Analysis I haben wir gesehen, wie wichtig die Kettenregel für die Berechnung von Ableitungen ist. Wir werden uns daher auch für Funktionen von zwei Variablen mit einer sehr allgemeinen Kettenregel beschäftigen, die im Spezialfall wieder die uns bereits bekannten Regeln liefert. Häufig gibt es Zusammenhänge, in denen eine Funktion nicht in expliziter Form, sondern implizit durch eine Gleichung gegeben ist. Mit Hilfe der impliziten Differentiation, bei der wiederum die Kettenregel eine wichtige Rolle spielt, können wir solche Funktionen weiter untersuchen.

Die Kettenregel

In vielen ökonomischen Modellen werden verkettete Funktionen verwendet. Dabei handelt es sich um Funktionen von einer oder mehreren Variablen, in denen die Variablen selbst wieder Funktionen von einer oder mehreren Variablen sind.

Im letzten Kapitel haben wir bereits einen Spezialfall behandelt, nämlich $f(x, y) = u(v(x, y))$ mit $u: D_u \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: D_v \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Ziel ist eine Regel für die (partielle) Differentiation einer Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ nach ein bzw. zwei Parametern (Variablen) t bzw. t und s anzugeben, wenn x und y ihrerseits von t bzw. t und s abhängen.

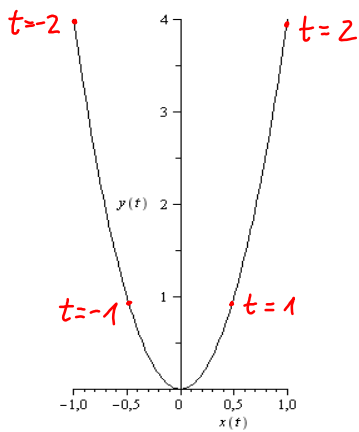
Zur Ergänzung wird die allgemeine Kettenregel für die Differentiation von $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ nach $t_j, j=1, 2, \dots, m$, angegeben, wenn x_1, \dots, x_n von den Parametern $t_j, j=1, \dots, m$, abhängen.

Bevor wir allgemeine Regeln formulieren, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = x^2y$, wobei die Variablen x und y von einer Variablen t gemäß $x = x(t) = \frac{1}{2}t$, $y = y(t) = t^2$ abhängen. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $(x(t), y(t))$ ein Punkt in der xy -Ebene und $(x(t), y(t), z(t))$ mit $z(t) = f(x(t), y(t))$ ein Punkt der durch die Funktion beschriebenen Fläche.

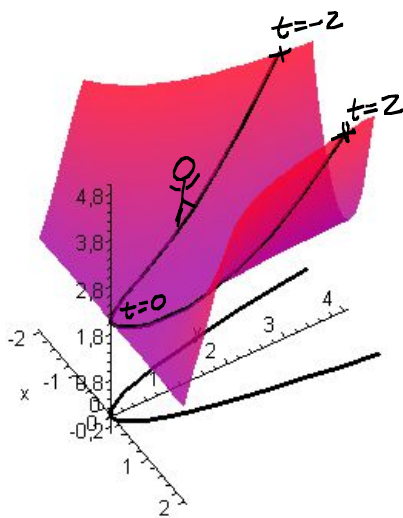
Wir gewinnen zunächst mit Hilfe einer Wertetabelle eine Vorstellung davon, welche Punkte in der xy -Ebene durch $(x(t), y(t))$ beschrieben werden.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$x(t)$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$...
$y(t)$	9	4	1	0	1	4	9	...



Es handelt sich hier also um eine parabelförmige Kurve, bei der man zusätzlich noch Informationen notieren kann, welcher Variablenwert (man sagt auch Parameterwert) von t zu bestimmten Punkten gehört.

Jedem $(x(t), y(t))$ wird nun durch die Funktionsvorschrift ein Funktionswert (eine "Höhe") zugeordnet. Dies bedeutet, dass man Senkrechten zu der



xy -Ebene durch die Kurvenpunkte $(x(t), y(t))$ errichtet und diese mit der durch $f(x,y)$ beschriebenen Fläche schneidet. Dadurch wird aus der Fläche eine Kurve ausgeschnitten, die allerdings in der Regel keine ebene Kurve mehr ist, sondern im Allgemeinen eine Raumkurve.

Untersucht man nun die Funktion in Abhängigkeit vom Parameter t , so bedeutet dies anschaulich, dass man auf dieser Kurve ("einem bestimmten Pfad im Gebirge") entlangwandert. Die Steigung dieser Kurve ist also die Ableitung der Funktion nach t , d.h. die momentane Änderungsrate bzgl. t . Diese berechnen wir zunächst, indem wir in die Funktionsgleichung die Ausdrücke für x und y in Abhängigkeit von t einsetzen.

$$f(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{2}t\right)^2 \cdot t^2 = \frac{1}{4}t^4 = \tilde{f}(t)$$

Da dies nur noch von t abhängt, können wir nun direkt nach t differenzieren, d.h.

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = t^3$$

Um nun den Zusammenhang mit Ableitungen von f genauer analysieren zu können, schreiben wir zunächst einige Ausdrücke getrennt auf.

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = 2t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), y(t)) = 2x(t)y(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y(t)}(x(t), y(t)) = (x(t))^2$$

und berechnen

Äußere Abl. von f nach x

Äußere Abl. von f nach y

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$

Innere Abl. von x nach t

Innere Abl. von y nach t

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}t \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t^2 \cdot 2t = t^3 = \frac{d\tilde{f}}{dt}(x(t), y(t))$$

Statt die Ausdrücke für $x(t)$ und $y(t)$ einzusetzen und anschließend nach t zu differenzieren, erhalten wir dasselbe Ergebnis, wenn wir

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t) \text{ berechnen.}$$

Bevor wir eine allgemeine Regel formulieren, betrachten wir noch ein Beispiel mit etwas komplizierteren Funktionen.

Beispiel: Wir betrachten eine Nachfragefunktion

$$N(p, m) = p^{-1.5} \cdot m^2$$

in Abhängigkeit vom Preis p und Einkommen m .

Wir behandeln nun das Problem, dass sich Preis und Einkommen mit der Zeit t ändern, d.h. Funktionen $p(t), m(t)$ der Zeit t sind,

z.B. $p(t) = 1.05^t, m(t) = 1.07^t$.

Setzt man dies in den Funktionsausdruck für die Nachfrage ein, so erhält man

$$\begin{aligned} N(p(t), m(t)) &= (1.05^t)^{-1.5} \cdot (1.07^t)^2 \\ &= 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} = \tilde{N}(t), \end{aligned}$$

d.h. eine Funktion, die nur von der Variablen (dem Parameter) t abhängt. Die Frage nach der momentanen Änderungsrate der Nachfrage mit der Zeit t lässt sich nun mit den Methoden der Ana-

lysis 1 beantworten, wenn wir beachten, dass gilt:

$$1.05^{-1.5t} = e^{-1.5t \cdot \ln(1.05)}, \quad 1.07^{2t} = e^{2t \cdot \ln(1.07)}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{N}}{dt}(t) &= -1.5 \cdot \ln(1.05) \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} + 1.05^{-1.5t} \cdot 2 \cdot \ln(1.07) \cdot 1.07^{2t} \\ &= \underbrace{(2 \cdot \ln(1.07) - 1.5 \cdot \ln(1.05))}_{\approx 0.06213...} \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} \end{aligned}$$

Die momentane Änderungsrate der Nachfrage in Abhängigkeit von der Zeit ist also in diesem Fall positiv, d.h. die Nachfrage ist bzgl. der Zeit t streng monoton wachsend.

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie man direkt ohne Einsetzen von $p(t)$ und $m(t)$ die momentane Änderungsrate $\frac{dN}{dt}(p, m)$ bestimmen kann. Um den oben erhaltenen Ausdruck genauer analysieren zu können, schreiben wir uns zunächst einige Ableitungsausdrücke wieder explizit auf. Es gilt:

$$\frac{dp}{dt}(t) = \ln(1.05) \cdot 1.05^t$$

$$\frac{dm}{dt}(t) = \ln(1.07) \cdot 1.07^t$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial p(t)}(p(t), m(t)) &= -1.5 \cdot (p(t))^{-2.5} \cdot (m(t))^2 \\ &= -1.5 \cdot 1.05^{-2.5t} \cdot 1.07^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dm(t)}(p(t), m(t)) &= 2 \cdot (p(t))^{-1.5} \cdot m(t) \\ &= 2 \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^t \end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\frac{\partial N}{\partial p(t)}(p(t), m(t)) \cdot \frac{dp}{dt}(t) + \frac{\partial N}{\partial m(t)}(p(t), m(t)) \cdot \frac{dm}{dt}(t)$$

$$= -1.5 \cdot 1.05^{-2.5t} \cdot 1.07^{2t} \cdot \ln(1.05) \cdot 1.05^t$$

$$+ 1.05^{-1.5t} \cdot 2 \cdot 1.07^t \cdot \ln(1.07) \cdot 1.07^t$$

$$= (2 \cdot \ln(1.07) - 1.5 \ln(1.05)) \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} = \frac{dN}{dt}(p(t), m(t))$$

Statt die Ausdrücke für $p(t)$ und $m(t)$ einzusetzen und anschließend nach t zu differenzieren, kann man - analog zum vorhergehenden Beispiel

$$\frac{\partial N}{\partial p(t)}(p(t), m(t)) \cdot \frac{dp}{dt}(t) + \frac{\partial N}{\partial m(t)}(p(t), m(t)) \cdot \frac{dm}{dt}(t) \text{ berechnen.}$$

Man sieht, dass dies formelmäßig genauso aufgebaut ist wie im ersten Beispiel.

Tatsächlich kann man folgende allgemeine Regel formulieren.

Spezielle Kettenregel: Sei $f(x, y)$ stetig partiell differenzierbar und $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{df}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$

Wenn die Funktionen $x(t), y(t)$ explizit gegeben sind, ist es prinzipiell immer möglich, zuerst die Ausdrücke in die Funktion einzusetzen, was aber häufig unpraktisch ist. Mit der Kettenregel lassen sich zunächst allgemeine Darstellungen herleiten, in die man dann gegebenenfalls spezielle Funktionen einsetzen kann.

Beispiel: Wir betrachten wieder die landwirtschaftliche Produktionsfunktion $Y(K, L) = A \cdot K^a \cdot L^b$, wobei nun das Kapital K und der Arbeitseinsatz L Funktionen der Zeit t sein sollen mit $K, L > 0$.

Dann ist (in abgekürzter Schreibweise):

$$\begin{aligned}
 Y_t &= Y_K \cdot K_t + Y_L \cdot L_t \\
 &= Aa K^{a-1} L^b + Ab K^a L^{b-1} \\
 &= A K^a L^b \cdot \left\{ a \cdot \frac{K_t}{K} + b \cdot \frac{L_t}{L} \right\} \\
 &= Y \cdot \left\{ a \cdot \frac{K_t}{K} + b \cdot \frac{L_t}{L} \right\}
 \end{aligned}$$

Wenn wir für $Y \neq 0$ die Gleichung durch Y dividieren, erhalten wir:

$$\frac{Y_t}{Y} = a \cdot \frac{K_t}{K} + b \cdot \frac{L_t}{L} .$$

Die relative Änderungsrate $\frac{Y_t}{Y}$ des Outputs bzgl. der Zeit ist also eine gewichtete Summe der Änderungsraten von Kapital und Arbeitseinsatz.

Beispiel: $u(x, s)$ sei eine Funktion, die das gesamte Wohlbefinden einer Gesellschaft misst, wobei x ein Index für die in der Gesellschaft produzierten und konsumierten Güter und s ein Maß für den Verschmutzungsgrad der Umwelt bezeichnet (vgl. auch Beispiel im letzten Kapitel).

u sei stetig partiell differenzierbar für $x, s > 0$ und für die partiellen Ableitungen gelte $u_x(x, s) > 0$, $u_s(x, s) < 0$.

Wir nehmen nun an, dass der Grad s der Umweltbelastung eine differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion von x ist, d. h.

$$s = s(x) \text{ mit } \frac{ds(x)}{dx} > 0.$$

In diesem Fall ist dann $u(x, s(x)) = \tilde{u}(x)$ eine Funktion, die nur von x abhängt. Wir bestimmen nun allgemein eine notwendige Bedingung dafür, dass $\tilde{u}(x)$ an einer Stelle $x^* > 0$ ein Maximum besitzt.

Notwendige Bedingung für ein Maximum von \tilde{u} an einer Stelle x^* ist (vgl. Analysis I): $\frac{d\tilde{u}}{dx}(x^*) = 0$

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{dx}(x^*) = 0 &\Leftrightarrow \frac{du}{dx}(x^*, s(x^*)) = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x(x^*, s(x^*)) \cdot \frac{dx}{dx}(x^*) + u_s(x^*, s(x^*)) \cdot \frac{ds}{dx}(x^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x(x^*, s(x^*)) + u_s(x^*, s(x^*)) \cdot \frac{ds}{dx}(x^*) = 0 \end{aligned}$$

Als spezielles Beispiel betrachten wir die Funktion

$$u(x, s) = \ln(x^2 + s^2) - 2 \ln(s) \text{ mit } s = s(x) = \sqrt[3]{3x^4 + 16}$$

Für $x > 0$ ist auch $s > 0$ und es gilt:

$$u_x(x, s) = \frac{2x}{x^2 + s^2} > 0, \quad u_s(x, s) = \frac{2s}{x^2 + s^2} - \frac{2}{s} = \frac{-2x^2}{(x^2 + s^2) \cdot s} < 0$$

$$\frac{ds}{dx}(x) = \frac{1}{3} \cdot (3x^4 + 16)^{-2/3} \cdot 12x^3 = \frac{4x^3}{(\sqrt[3]{3x^4 + 16})^2} = \frac{4x^3}{(s(x))^2}$$

Die notwendige Bedingung ergibt in diesem Fall somit:

$$\frac{2x}{x^2 + [s(x)]^2} + \frac{-2x^2}{(x^2 + [s(x)]^2) \cdot s(x)} \cdot \frac{4x^3}{[s(x)]^2} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} : 2 \text{ und auf Hauptnenner} \\ \text{bringen} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot [s(x)]^3 - 4x^5}{(x^2 + [s(x)]^2) \cdot [s(x)]^3} = 0 \quad \left| \cdot \text{Nenner} (\neq 0) \right.$$

$$\Leftrightarrow x \{ [s(x)]^3 - 4x^4 \} = 0$$

Da nach Voraussetzung $x > 0$, erhalten wir daraus nach Einsetzen von $[s(x)]^3 = 3x^4 + 16$ die äquivalente notwendige Bedingung

$$16 - x^4 = 0$$

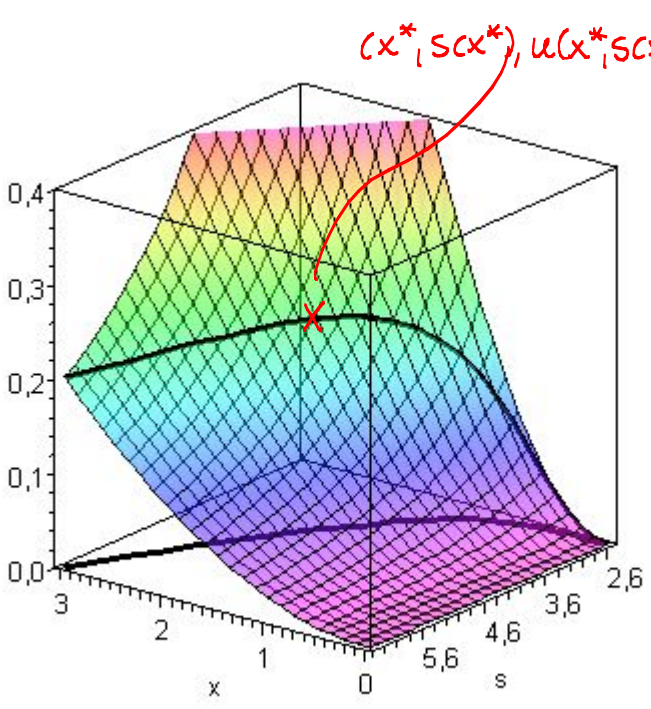
Wieder wegen $x > 0$ ist $x^* = 2$ die einzige Lösung dieser Gleichung.

Nach den obigen Rechnungen ist

$$\frac{du}{dx}(x, sc(x)) = \frac{d\tilde{u}}{dx}(x) = \frac{x(16-x^4)}{(x^2 + [sc(x)]^2) \cdot [sc(x)]^3}$$

> 0 für $x < 2$ und < 0 für $x > 2$
 > 0 für $x > 0$

Somit ist $\tilde{u}(x)$ streng monoton wachsend für $x \in (0, 2)$ und streng monoton fallend für $x \in (2, \infty)$.



Auf der eingezeichneten Linie geht es also bis zur Stelle $(x^*, sc(x^*)) = (2, 4)$ aufwärts und danach abwärts.

Bemerkung: Als zusätzliche Übung können Sie zum Vergleich auch erst $sc(x)$ in $u(x, s)$ einsetzen und das Maximum bestimmen.

Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, dass die Variablen von f von einer Variablen (einem Parameter) abhängen. Wir wenden uns nun dem allgemeineren Fall zu, in dem die Variablen von zwei Parametern abhängen und geben zur Vertiefung die allgemeine Kettenregel für Funktionen von n Variablen an, wo die Variablen von m Parametern abhängen.

Kettenregel bei zwei Parametern: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $x: D_x \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, s) \mapsto x(t, s), y: D_y \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, s) \mapsto y(t, s)$.

Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

wobei hier zur Vereinfachung der Schreibweise die Argumente weggelassen wurden.

Beispiel: Sei $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ mit $x = t^2 - s$, $y = t + 2s^3$

Dann gilt:
$$\frac{\partial f}{\partial t} = 4x \cdot 2t + 6y \cdot 1 = 4(t^2 - s) \cdot 2t + 6(t + 2s^3)$$

$$= 8t^3 - 8st + 6t + 12s^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 4x \cdot (-1) + 6y \cdot 6s^2 = 4(t^2 - s) \cdot (-1) + 6(t + 2s^3) \cdot 6s^2$$

$$= -4t^2 + 4s + 36ts^2 + 72s^5$$

Beispiel: Sei $f(v,w) = \frac{v-w}{v+w}$ mit $v = e^{t+s}$, $w = e^{ts}$

Es gilt:
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$= \frac{(v+w) - (v-w)}{(v+w)^2} \cdot e^{t+s} + \frac{-(v+w) - (v-w)}{(v+w)^2} \cdot s \cdot e^{ts}$$

$$= \frac{2w}{(v+w)^2} \cdot e^{t+s} - \frac{2v}{(v+w)^2} \cdot s \cdot e^{ts}$$

$$= 2 \cdot \frac{e^{ts} \cdot e^{t+s} - e^{t+s} \cdot s \cdot e^{ts}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}$$

$$= 2 \cdot (1-s) \cdot \frac{e^{t+s+ts}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial s}$$

$$= \frac{2w}{(v+w)^2} \cdot e^{t+s} - \frac{2v}{(v+w)^2} \cdot t \cdot e^{ts}$$

$$= 2 \cdot (1-t) \cdot \frac{e^{t+s+st}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}$$

In ökonomischen Problemstellungen kommt es häufiger vor, dass nicht alle Funktionen explizit angegeben sind. Hier ist das Beherrschen der Kettenregel besonders wichtig.

Implizites Differenzieren

Die Kettenregel lässt sich gut für die Untersuchung von Funktionen verwenden, die nicht in expliziter, sondern in impliziter Form gegeben sind. Um mit dem Thema vertraut zu werden, betrachten wir zunächst den Fall einer unabhängigen Variablen x . Explizit bedeutet, dass die abhängige Variable explizit in der Form $y = y(x)$ gegeben ist. Implizit bedeutet, dass der funktionale Zusammenhang von x und $y(x)$ in Form einer Gleichung angegeben ist, die sich möglicherweise gar nicht nach $y(x)$ auflösen lässt.

Das Folgende gilt auch, wenn die durch die Gleichung beschriebene Kurve kein Funktionsgraph ist.

Beispiel: $[y(x)]^3 + 3x^2y(x) - 13 = 0$

Diese Gleichung lässt sich nicht einfach nach y auflösen.

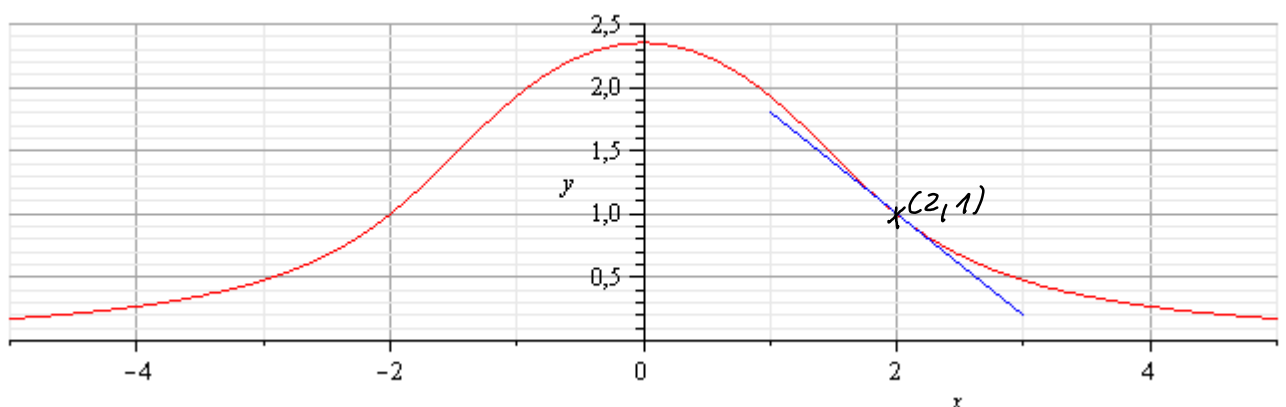
Trotzdem kann man Punkte ermitteln, die auf dem Graphen liegen.

Setzen wir z.B. $x=2$ in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$[y(2)]^3 + 12y(2) - 13 = 0$$

Man sieht leicht ein, dass $y(2) = 1$ die Gleichung erfüllt, d.h. der Punkt $(2, 1)$ liegt auf der durch die Gleichung beschriebenen Kurve.

Tatsächlich beschreibt die Gleichung die in der unten stehenden Graphik eingezeichnete rote Kurve. Bilder von solchen implizit gegebenen Kurven lassen sich im Allgemeinen nur mit leistungsfähigen Programmen erstellen.



Wir möchten nun die Steigung der Tangenten an den Kurvenpunkt $(2, 1)$ bestimmen. Dazu differenzieren wir die Gleichung unter Verwendung der Kettenregel auf beiden Seiten nach x und erhalten:

$$3 [y(x)]^2 \cdot y'(x) + 6x y(x) + 3x^2 y'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow y'(x) \{ 3 [y(x)]^2 + 3x^2 \} = -6x y(x)$$

Für $[y(x)]^2 + x^2 \neq 0$ lässt sich dies nach $y'(x)$ auflösen:

$$y'(x) = - \frac{6x y(x)}{3(x^2 + [y(x)]^2)}$$

Für den Punkt $(2, 1)$ ergibt sich somit $y'(2) = -\frac{4}{5}$ als Steigung der Tangenten durch den Kurvenpunkt $(2, 1)$, die in der oben stehenden Graphik blau eingezeichnet ist.

Beispiel: $x^2 [y(x)]^3 + [y(x) + 1] e^{-x} = x + 2$

Für $x=0$ ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung

$$y(0) + 1 = 2 \Leftrightarrow y(0) = 1$$

Der Punkt $(0, 1)$ liegt also auf der durch die Gleichung beschriebenen Kurve. Um die Steigung der Tangenten an diesen Kurvenpunkt zu ermitteln, differenzieren wir wieder die Gleichung auf beiden Seiten nach x :

$$2x [y(x)]^3 + 3x^2 [y(x)]^2 \cdot y'(x) + y'(x) \cdot e^{-x} - [y(x) + 1] e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow y'(x) \underbrace{\{ 3x^2 [y(x)]^2 + e^{-x} \}}_{>0} = 1 - 2x [y(x)]^3 + [y(x) + 1] e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{1 - 2x [y(x)]^3 + [y(x) + 1] e^{-x}}{3x^2 [y(x)]^2 + e^{-x}}$$

Einsetzen von $x=0, y(0)=1$ liefert: $y'(0) = 3$.

Die Tangente am Kurvenpunkt $(0, 1)$ hat also die Steigung 3.

Prinzipiell kann man für Funktionen von mehreren Variablen analog vorgehen, was wir exemplarisch an einigen Beispielen zeigen.

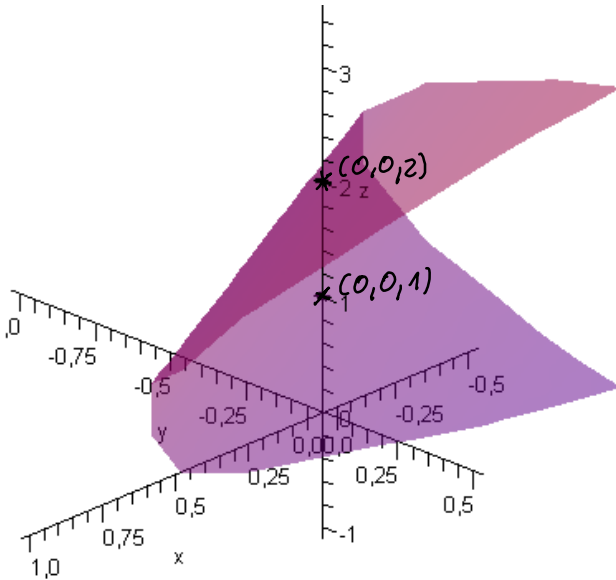
Beispiel: $z(x,y)$ sei implizit gegeben durch die Gleichung

$$x - 2y - 3z(x,y) + [z(x,y)]^2 = -2$$

Setzen wir z.B. $x=y=0$ ein, so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$-3z(0,0) + [z(0,0)]^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow z(0,0) = 1 \vee z(0,0) = 2$$



Die beiden Punkte $(0,0,1)$ und $(0,0,2)$ liegen also auf der durch die Gleichung beschriebenen Fläche.

Damit ist auch klar, dass es sich bei $z(x,y)$ nicht um eine Funktion handelt.

Wir differenzieren die Gleichung auf beiden Seiten partiell nach x und erhalten:

$$1 - 3z_x(x,y) + 2z(x,y) \cdot z_x(x,y) = 0$$

Für $z(x,y) \neq \frac{3}{2}$ lässt sich dies nach $z_x(x,y)$ auflösen:

$$z_x(x,y) = \frac{1}{3 - 2z(x,y)}$$

Im Punkt $(0,0,1)$ ist somit $z_x = 1$, im Punkt $(0,0,2)$ dagegen $z_x = -1$.

Differentiation der Gleichung auf beiden Seiten nach y liefert:

$$-2 - 3z_y(x,y) + 2z(x,y) \cdot z_y(x,y) = 0$$

Für $z(x,y) \neq \frac{3}{2}$ lässt sich dies nach $z_y(x,y)$ auflösen:

$$z_y(x,y) = \frac{2}{2z(x,y) - 3}$$

Im Punkt $(0,0,1)$ ist somit $z_y = -2$, im Kurvenpunkt $(0,0,2)$ ist $z_y = -2$.

Bemerkung: Hier könnte man prinzipiell die Gleichung zunächst nach $z(x,y)$ auflösen; $z(x,y) = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x + 2y}$ und müsste dann beide Vorzeichen der Wurzel beachten.

Beispiel: Die sogenannte Nerlove-Ringstad Produktionsfunktion $Y(K, L)$ ist implizit durch die Gleichung

$$Y(K, L)^{1+c \ln(Y(K, L))} = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta, \quad K, L > 0,$$

mit positiven Konstanten A, α, β definiert.

Wir bestimmen Ausdrücke für die Grenzproduktivitäten von $Y(K, L)$ bzgl. des Kapitals K und bzgl. des Arbeitseinsatzes L , d.h. Ausdrücke für $Y_K(K, L)$ und $Y_L(K, L)$.

In diesem Beispiel ist die linke Seite ziemlich kompliziert. Wir verwenden daher einen Trick, der auch in vielen ähnlichen Situationen hilfreich sein kann. Da beide Seiten der Gleichung positiv sind, können wir auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus anwenden und erhalten daraus unter Verwendung der Rechenregeln für den Logarithmus:

$$[1+c \ln(Y(K, L))] \cdot \ln(Y(K, L)) = \ln(A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta)$$

Diese Gleichung differenzieren wir nun auf beiden Seiten partiell nach K :

$$c \cdot \frac{Y_K(K, L)}{Y(K, L)} \cdot \ln(Y(K, L)) + [1+c \ln(Y(K, L))] \cdot \frac{Y_K(K, L)}{Y(K, L)} = \frac{A \cdot \alpha K^{\alpha-1} L^\beta}{A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y_K(K, L)}{Y(K, L)} \{1+2c \ln(Y(K, L))\} = \frac{\alpha}{K}$$

$$\Leftrightarrow Y_K(K, L) = \frac{\alpha Y(K, L)}{K \{1+2c \ln(Y(K, L))\}}$$

Entsprechend erhalten wir durch partielle Differentiation nach L :

$$Y_L(K, L) = \frac{\beta Y(K, L)}{L \{1+2c \ln(Y(K, L))\}}$$

Als zusätzliche Übung sollten Sie einmal versuchen, die Ausgangsgleichung ohne vorheriges Logarithmieren direkt partiell nach K bzw. L zu differenzieren, um auf die Ausdrücke für $Y_K(K, L)$ und $Y_L(K, L)$ zu kommen. Welchen Trick benötigt man, um die linke Seite zunächst geeignet umzuschreiben?

Grenzrate der Substitution

Die Methode des impliziten Differenzierens ist auch geeignet, die Niveaulinien einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ genauer zu untersuchen, da diese auch häufig in impliziter Form vorkommen (vgl. Kapitel 11).

Ist eine Niveaulinie durch die Gleichung $f(x, y) = c$ bestimmt, und betrachten wir y in Abhängigkeit von x , so haben wir

$$f(x, y(x)) = c.$$

Differentiation auf beiden Seiten nach x liefert:

$$f_x(x, y(x)) \cdot \frac{dx}{dx} + f_y(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

d.h. kurz $y' = -\frac{f_x}{f_y}$, falls $f_y \neq 0$.

Für das Negative dieses Ausdrucks haben Ökonomen einen speziellen Namen. Es ist

$$R_{yx} = \frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \text{ die } \underline{\text{Grenzrate der Substitution von } y \text{ durch } x}.$$

Diese Begriffsbildung soll durch das folgende Beispiel motiviert werden.

Beispiel: Es sei $Y(K, L) = K^2 \cdot L$ mit $K, L > 0$ eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion und $Y(K, L) = 108$ die Gleichung der Isoquanten (Niveaulinie) zum Output 108, d.h.

$$K^2 \cdot L = 108 \Leftrightarrow L = \frac{108}{K^2}$$

Für die Grenzrate der Substitution von L für K gilt:

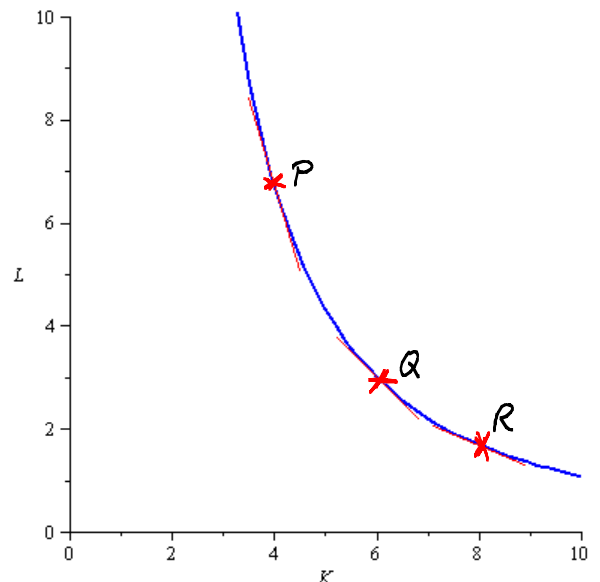
$$R_{LK} = \frac{Y_K(K, L)}{Y_L(K, L)} = \frac{2KL}{K^2} = \frac{2L}{K}$$

Daraus erhält man z.B. für

$$P(4, \frac{27}{4}): R_{LK} = \frac{27}{8} = 3.375$$

$$Q(6, 3): R_{LK} = 1$$

$$R(8, \frac{27}{16}): R_{LK} = \frac{27}{64} = 0.421875$$



In allen Punkten P, Q, R werden jeweils 108 Einheiten produziert.
 In P wird wenig Kapital und viel Arbeitseinsatz verwendet, um 108 Einheiten zu produzieren. Die Steigung der Isoquante in P ist $-\frac{27}{8}$, d.h. die GRS (Grenzrate der Substitution) beträgt $\frac{27}{8}$. Die Interpretation ist nun so, dass man näherungsweise durch Zufügung von 1 Einheit Kapital in etwa $\frac{27}{8}$ Einheiten Arbeitseinsatz weniger aufwenden muss, um das Niveau des Outputs zu halten; $\frac{27}{8}$ Einheiten Arbeitseinsatz können durch 1 Einheit Kapital substituiert werden. Dagegen kann man im Punkt Q in etwa 1 Einheit und im Punkt R nur $\frac{27}{64}$ Einheiten durch 1 Einheit Kapital substituieren.

Beispiel: Wir bestimmen die Grenzrate der Substitution für
 $f(x, y) = \ln(2x^2 + 5y^4 + 2)$.

$$R_{yx} = \frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = \frac{\frac{4x}{2x^2 + 5y^4 + 2}}{\frac{20y^3}{2x^2 + 5y^4 + 2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{y^3}$$

15 Optimierung mit Restriktionen

In Kapitel 13 haben wir uns damit beschäftigt, Extrema von Funktionen zu bestimmen, d.h. Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen / Restriktionen zu lösen. In vielen ökonomischen Problemstellungen müssen die Variablen aber gewisse Nebenbedingungen / Restriktionen erfüllen.

Beispiel: Ein Verbraucher möchte Mengen x und y für zwei Güter so bestimmen, dass die Nutzenfunktion $u(x,y)$ maximal wird. Dabei muss er seine Budgetbeschränkung $px + qy \leq m$ beachten.

Beispiel: Ein Unternehmen möchte seine Produktionskosten in einer bestimmten Zeitspanne möglichst gering halten. Auf Grund von Vorbestellungen muss aber eine Mindestmenge produziert werden.

Da die Suche nach dem Maximum einer Funktion f äquivalent zu der Suche nach dem Minimum von $-f$ ist, beschränken wir uns häufig auf die Betrachtung von Minimierungsproblemen.

Speziell werden wir das sogenannte Lagrangsche Multiplikatorverfahren für die Problemstellung

$$\min f(x,y),$$

$$\text{so dass } g(x,y) = 0$$

behandeln.

Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Wir erläutern zunächst anschaulich an einem Beispiel, auf welchen Überlegungen dieses Verfahren beruht.

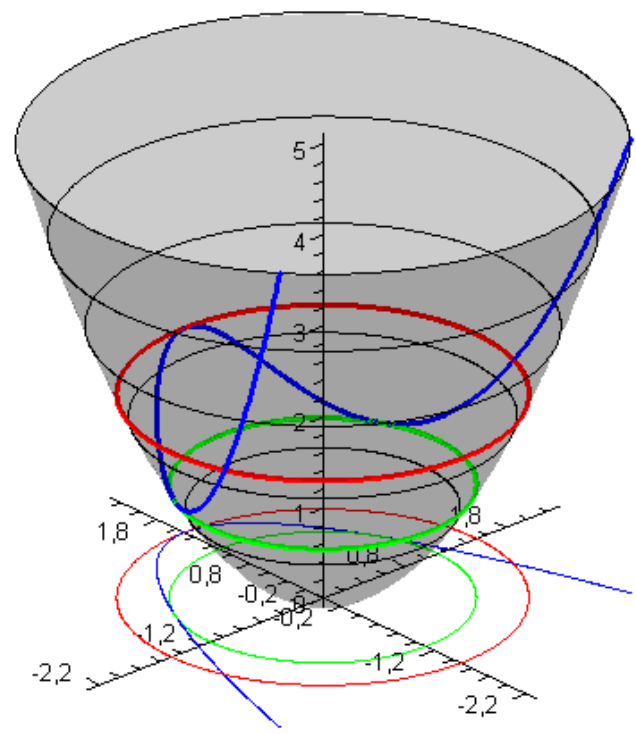
Beispiel: Wir betrachten das Problem

$$\min f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\text{so dass } g(x,y) = y + x^2 - \frac{3}{2} = 0$$

zunächst an Hand einer Graphik.

Die Funktion f beschreibt die grau schattierte Fläche im \mathbb{R}^3 .



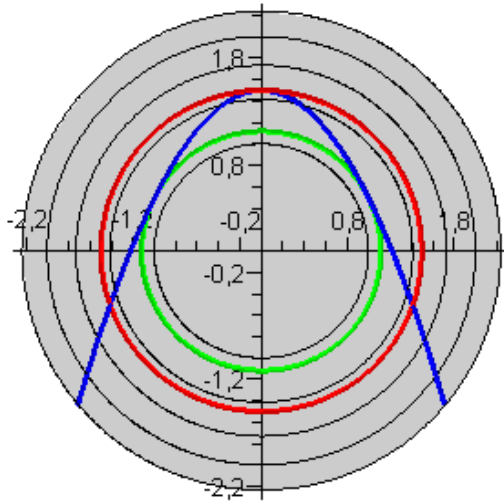
Extrema mit Restriktionen

Zur Verdeutlichung sind einige Niveaulinien von f schwarz eingezeichnet. Durch $g(x,y) = 0$ wird die in der xy -Ebene eingezeichnete blaue Parabel beschrieben. Schränkt man f auf diejenigen (x,y) ein, die die Restriktion erfüllen, so erhält man die auf

der Fläche in blau hervorgehobene Kurve. Längs dieser Kurve sollen nun lokale Extrema bestimmt werden. Die lokalen Minima und das lokale Maximum sind in der Graphik deutlich zu erkennen. Die zugehörigen Niveaulinien sind auf der Fläche und in der xy -Ebene in grün bzw. rot dargestellt.

Man sieht, dass die blaue Kurve auf der Fläche die rote bzw. grüne Niveaulinie berührt.

Wir betrachten die Situation in der xy -Ebene noch einmal genauer.



Die Restriktionskurve und die zu den lokalen Extremalstellen gehörenden Niveaulinien berühren sich an den lokalen Extremalstellen. Anders ausgedrückt, haben diese Niveaulinien und die Restriktionskurve an den Extremalstellen

Extrema mit Restriktionen

jeweils dieselbe Steigung.

In Kapitel IV (vgl. Abschnitt Grenzrate der Substitution) haben wir gesehen, wie man die Steigungen der implizit gegebenen Kurven $f(x,y)=c$ (Niveaulinien) und $g(x,y)=0$ (Restriktion) berechnet.

Dies führt auf die Gleichung

$$-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}$$

(Steigung Niveaulinie)

(Steigung Restriktion)

bzw. anders aufgeschrieben

$$\frac{f_x(x,y)}{g_x(x,y)} = \frac{f_y(x,y)}{g_y(x,y)}$$

Diese Gleichheit kann man nun auch so beschreiben, dass für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ die beiden Gleichungen

$$\frac{f_x(x,y)}{g_x(x,y)} = \lambda \quad \text{und} \quad \frac{f_y(x,y)}{g_y(x,y)} = \lambda$$

bzw.

$$f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0$$

erfüllt sein müssen. Zusammen mit der Restriktion haben wir für unser Beispiel die drei Gleichungen:

$$1) f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 2x - 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow x(1-\lambda) = 0$$

$$2) f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 2y - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2y$$

$$3) g(x,y) = y + x^2 - \frac{3}{2} = 0$$

Wegen 1) $x(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \lambda = 1$, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: $x = 0$

Einsetzen in 3) liefert $y = \frac{3}{2}$

Einsetzen in 2) liefert $\lambda = 3$

2. Fall: $\lambda = 1$

Einsetzen in 2) liefert $y = \frac{1}{2}$

Einsetzen in 3) liefert $x = 1 \vee x = -1$

Die Punkte $P_1(0, \frac{3}{2})$, $P_2(1, \frac{1}{2})$, $P_3(-1, \frac{1}{2})$ kommen also als Kandidaten für Extremalstellen in Frage.

Es gilt: $f(0, \frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$ ist lokales Maximum, $f(1, \frac{1}{2}) = f(-1, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ sind lokale Minima von f unter der gegebenen Restriktion.

Bevor wir die Methode, die uns notwendige Bedingungen für lokale Extrema bei Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen liefert, in allgemeiner Form angeben, schauen wir die obigen Bedingungen noch einmal formal aus einem anderen Blickwinkel an.

Zu dem Problem aus unserem Beispiel definieren wir eine Hilfsfunktion (Lagrangefunktion) durch

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

Die Forderung, dass $\text{grad } L(x,y;\lambda) = \vec{0}$ führt auf

$$L_x(x,y;\lambda) = f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0$$

$$L_y(x,y;\lambda) = f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0$$

$$L_\lambda(x,y;\lambda) = g(x,y) = 0$$

Dies sind genau dieselben Gleichungen, die wir aus der zunächst anschaulichen Argumentation hergeleitet haben.

Mit Hilfe der Lagrange-Funktion lässt sich nun die Lagrangesche Multiplikatormethode sehr allgemein formulieren.

Wir geben die Methode zunächst für den speziellen Fall einer Funktion mit zwei Variablen mit einer Nebenbedingung an.

Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Es seien $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen in den Variablen x und y . (x^*, y^*) sei ein innerer Punkt von $D_f \cap D_g$. Für den Gradienten von g gelte: $\text{grad } g(x^*, y^*) \neq \vec{0}$.

Eine notwendige Bedingung dafür, dass f an der Stelle (x^*, y^*) eine lokale Extremalstelle unter Berücksichtigung der Restriktion $g(x^*, y^*) = 0$ besitzt, ist, dass der Gradient der Lagrange-Funktion

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

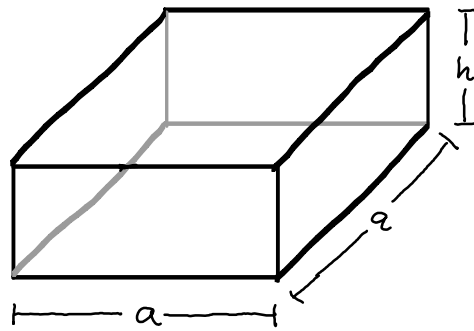
verschwindet. D. h. es muss eine reelle Zahl λ (den sogenannten

Lagrange-Multiplikator) existieren, so dass

$$\begin{cases} L_x(x, y; \lambda) = 0 \\ L_y(x, y; \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y; \lambda) = 0 \end{cases}$$

Bemerkung: Die Bedingung $L_\lambda(x, y; \lambda) = 0$ entspricht gerade der Nebenbedingung des Optimierungsproblems.

Beispiel: Das Unternehmen Zack- und -Pack hat von der Bäckerei Knack- und -Back einen Auftrag zur Herstellung von Keksschachteln erhalten. Die oben offenen Schachteln sollen ein Fassungsvermögen von $V = 2048 \text{ cm}^3$ haben und eine quadratische Grundfläche besitzen. Ansonsten bleibt die Wahl der Abmessungen dem Hersteller überlassen.



$$V = a^2 \cdot h = 2048 \text{ cm}^3$$

Zack- und -Pack möchte die Materialkosten zur Herstellung der Schachteln minimieren. Zu lösen ist also das Problem

$$\min f(a, h) = a^2 + 4ah$$

$$\text{so dass } a^2 h - 2048 = 0$$

Die Lagrangefunktion ist

$$L(a, h; \lambda) = f(a, h) - \lambda g(a, h) = a^2 + 4ah - \lambda(a^2 h - 2048).$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$L_a(a, h; \lambda) = 2a + 4h - 2\lambda ah = 2(a + 2h - \lambda ah)$$

$$L_h(a, h; \lambda) = 4a - \lambda a^2$$

$$L_\lambda(a, h; \lambda) = -(a^2 h - 2048)$$

Die notwendigen Bedingungen lauten also:

$$1) a + 2h - \lambda ah = 0$$

$$2) 4a - \lambda a^2 = 0$$

$$3) a^2 h = 2048$$

Aus 3) folgt zunächst: $a \neq 0 \wedge h \neq 0$.

Division von 2) durch $a \neq 0$ liefert: 2)' $\lambda a = 4$

Einsetzen von $\lambda a = 4$ in 1) liefert: 1)' $a + 2h - 4h = 0 \Leftrightarrow a = 2h$

Einsetzen von $a = 2h$ in 3) liefert: 3)' $4h^3 = 2048 \Leftrightarrow \underline{h^* = 8}$

Mit 1)' und 2)' ergibt sich daraus: $a^* = 16$, $\lambda^* = \frac{1}{4}$.

Als Minimalstelle kommt also nur $(a^*, h^*) = (16, 8)$ mit $\lambda^* = \frac{1}{4}$ in Frage.

Der Gradient von g ist $\text{grad } g(a, h) = (2ah, a^2)^T$ und $\text{grad } g(a^*, h^*) = 16^2(1, 1)^T$.

Die Bedingung $\text{grad } g(a^*, h^*) \neq \vec{0}$ ist also erfüllt.

Beispiel: Ein Verbraucher bestimmt seinen Nutzen mit Hilfe einer Cobb-

Douglas Funktion $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$ mit $x_1, x_2 \geq 0$.

Er unterliegt der Budgetbeschränkung $x_1 + x_2 = 10$.

Wie soll er x_1 und x_2 wählen, damit sein Nutzen $U(x_1, x_2)$ maximal wird?

Das zugehörige Optimierungsproblem lautet:

$$\max U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$$

$$\text{so dass } g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 10 = 0$$

Lagrangefunktion:

$$L(x_1, x_2; \lambda) = x_1^2 x_2^3 - \lambda(x_1 + x_2 - 10)$$

Partielle Ableitungen der Lagrangefunktion:

$$L_{x_1}(x_1, x_2; \lambda) = 2x_1 x_2^3 - \lambda$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2; \lambda) = 3x_1^2 x_2^2 - \lambda$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2; \lambda) = -(x_1 + x_2 - 10)$$

Wir erhalten somit die Bedingungen:

$$1) 2x_1 x_2^3 = \lambda$$

$$2) 3x_1^2 x_2^2 = \lambda$$

$$3) x_1 + x_2 = 10$$

Wir können in diesem Beispiel ohne Einschränkung voraussetzen, dass x_1

und x_2 von Null verschieden sind, da sonst der Nutzen Null und somit sicher nicht maximal ist.

Gleichsetzen von 1) und 2) liefert:

$$2x_1x_2^3 = 3x_1^2x_2^2 \quad | : 2x_1x_2^2 (\neq 0)$$

$$\text{I) } x_2 = \frac{3}{2}x_1$$

Einsetzen von $x_2 = \frac{3}{2}x_1$ in 3) liefert: $x_1 + \frac{3}{2}x_1 = 10 \Leftrightarrow \underline{x_1^* = 4}$

Einsetzen von $x_1 = 4$ in I) liefert: $x_2^* = 6$

Einsetzen von $x_1 = 4, x_2 = 6$ in 1) bzw. 2) liefert: $\lambda = 1728$

Der Gradient von g ist $\text{grad } g(x_1, x_2) = (1, 1)^T = g(x_1^*, x_2^*) \neq \vec{0}$.

Die einzige mögliche (lokale) Extremalstelle von f unter der Budgetbeschränkung ist somit $(x_1^*, x_2^*) = (4, 6)$.

Da der durch die Budgetbeschränkung beschriebene Bereich eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist, hat f dort ein absolutes Maximum. Für $(4, 6)$ wird also der Nutzen unter der Budgetbeschränkung maximal mit $U(4, 6) = 4^2 \cdot 6^3 = 3456$.