# Mathematik auf Deutsch

Ein Arbeitsbuch für internationale Studierende zur Wiederholung und Vertiefung mathematischer Grundkenntnisse und zum Erlernen des zugehörigen Fachvokabulars

**Margareta Heilmann**

INTOUCH

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

## Autorin

**Prof. Dr. Margareta Heilmann**

**Bergische Universität Wuppertal**
**Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften**
**Gaußstraße 20**
**42119 Wuppertal**
**heilmann@uni-wuppertal.de**

# Vorbemerkungen

Seit April 2016 biete ich an der Bergischen Universität Wuppertal studienvorbereitende Kurse „Mathematik auf Deutsch“ an.

Sie richten sich an internationale Studierende und Interessierte, die ein Studium in einem WiMINT Fach anstreben. Dafür sind Mathematikkenntnisse in deutscher Sprache erforderlich. Inhalt der Kurse ist daher neben der Wiederholung und Vertiefung mathematischer Themen insbesondere das Erlernen des zugehörigen Fachvokabulars.

Niveau der Sprache und der mathematischen Inhalte werden im Verlauf der Kurse kontinuierlich gesteigert mit dem Ziel, dass die Teilnehmer und Teilnehmerinnen anschließend im Fachstudium dem Tempo und den sprachlichen Anforderungen einer üblichen Lehrveranstaltung gewachsen sind.

Ehemalige Teilnehmer und Teilnehmerinnen bestätigen, dass ihnen der Einstieg ins Fachstudium durch die aktive Teilnahme an den Kursen deutlich erleichtert wurde.

In den angebotenen Kursen werden hauptsächlich mathematische Grundlagen und Themen der Analysis behandelt. Inhalt und Tempo richten sich aber insbesondere auch nach den vorhandenen Sprachkenntnissen der Teilnehmer und Teilnehmerinnen.

In diesem begleitenden Arbeitsbuch werden die mathematischen Inhalte ausführlich erklärt und mit vielen Beispielen und zahlreichen Übungsufgaben vertieft.

Bei der Durchführung der Kurse wurde ich von den Studierenden Fabian Amberg, Johanna Büscher, Wiebke Wlotzka und Elife Cetintas unterstützt, denen ich an dieser Stelle für ihr Engagement danken möchte.

Mein besonderer Dank gilt Elife Cetintas. Mit ihrer Bereitschaft zur Durchführung von online Veranstaltungen in den vergangenen drei Semestern war es möglich, das Kursangebot auch während der Lockdowns aufrecht zu erhalten.

Anregungen und Verbesserungsvorschläge sind immer willkommen.

Wuppertal, im Februar 2022 — Margareta Heilmann

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# 1 Mengen

Als Menge bezeichnet man die Zusammenfassung verschiedener Objekte, die Elemente genannt werden.
Eine Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge und wird mit dem Symbol $\emptyset$ oder $\{\ \ \}$ bezeichnet. Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Man schreibt dann A = B.

**Beispiel**

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Teilnehmer am Kurs „Mathematik auf Deutsch“}\} \\ B &= \{2; 3; 4; 5\} \end{aligned}$$

**Bezeichnungen und Symbole**

$$\begin{array}{lll} x \in A & \text{bedeutet} & x \text{ ist Element von } A \\ x \notin A & \text{bedeutet} & x \text{ ist nicht Element von } A \end{array}$$

**Beispiel**

$$A = \{2; 4; 6; 8; 10\}, \qquad 2 \in A,\ 3 \notin A$$

**Beschreibung von Mengen**

Man unterscheidet die aufzählende und die beschreibende Form.
Bei der aufzählenden Form werden die Elemente in beliebiger Reihenfolge zwischen geschweiften Klammern aufgelistet. Bei der beschreibenden Form werden die Elemente durch Angabe von Eigenschaften festgelegt.

**Beispiel**

Aufzählende Form: $A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$
In Worten: „$A$ ist die Menge mit den Elementen $3, 4, 5, 6$ und 7.“
Beschreibende Form: $A = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 7\}$
In Worten: „$A$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen $n$, für die gilt, dass $n$ größer oder gleich 3 und kleiner oder gleich 7 ist.“

**Aufgabe**

Geben Sie die Mengen in aufzählender Form an.

a) $A = \{x \in \mathbb{N}_0 : 0 < x < 5\}$
Dabei ist $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$. Das Symbol $<$ bedeutet „kleiner“.

b) $B = \{t \in \mathbb{N} : t \text{ ist Teiler von } 24\}$
Erklärung des Begriffs Teiler: Die Zahlen 1, 3, 5 und 15 sind die Teiler von 15.

c) $C = \{z \in \mathbb{N} : z > 1 \wedge 3 \text{ ist Teiler von } z \wedge z < 21\}$
Dabei ist $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$. Das Symbol $>$ bedeutet „größer“, das Symbol $<$ „kleiner“ und das Symbol $\wedge$ bedeutet „und“.

d) $D = \{(2n + 1)^2 : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 5\}$
$(2n + 1)^2$ wird gesprochen „$2n + 1$ in Klammern zum Quadrat“.

**Aufgabe**

Geben Sie die Mengen in beschreibender Form an.

a) $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ b) $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ c) $C = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}\right\}$

**Beziehungen zwischen Mengen**

**Teilmenge**

$A \subset B$ oder $A \subseteq B$ wird gesprochen „$A$ ist Teilmenge von $B$".
Es gilt: $A$ ist Teilmenge von $B$, wenn jedes Element von $A$ auch Element von $B$ ist.

**Beispiel**

Gegeben seien die Mengen $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ und $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.
Da jedes Element von $A$ auch Element von $B$ ist, gilt $A \subset B$.

**Verknüpfungen von Mengen**

**Durchschnitt**

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ wird gesprochen „$A$ geschnitten mit $B$" oder „Durchschnitt der Mengen $A$ und $B$".
In $A \cap B$ sind alle Elemente enthalten, die sowohl zu $A$ als auch zu $B$ gehören.

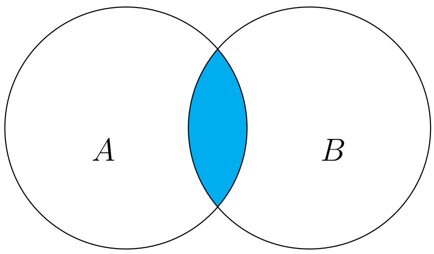



Abbildung 1: Venn Diagramm zu $A \cap B$

**Vereinigung**

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ wird gesprochen „$A$ vereinigt mit $B$" oder „Vereinigung der Mengen $A$ und $B$". Das Symbol $\vee$ bedeutet „oder".
In $A \cup B$ sind alle Elemente enthalten, die zu $A$ oder $B$ gehören.

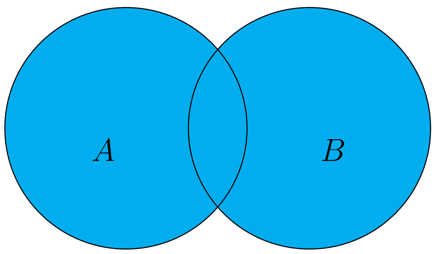



Abbildung 2: Venn Diagramm zu $A \cup B$

**Differenzmenge**

$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ wird gesprochen „$A$ ohne $B$" oder „Differenzmenge von $A$ und $B$".
In $A \backslash B$ sind alle Elemente enthalten, die zu $A$ aber nicht zu $B$ gehören.

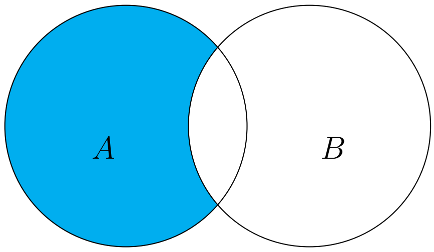



Abbildung 3: Venn Diagramm zu $A \backslash B$

**Beispiel**

$A = \{1; 2; 3; 9; 10\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
Es gilt: $A \cap B = \{2; 10\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$, $A \backslash B = \{1; 3; 9\}$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$.
Dabei bedeutet das Symbol $\not\subset$ „nicht Teilmenge von“.

**Aufgabe**

Gegeben sind die Mengen

$$\begin{aligned}
A &= \{n \in \mathbb{N} : 7 \leq n < 33\}, \\
B &= \{n \in \mathbb{N} : n \leq 25 \wedge 3 \text{ ist Teiler von } n\}, \\
C &= \{n \in \mathbb{N} : 13 \leq n \leq 32 \wedge 8 \text{ ist Teiler von } n\}, \\
D &= \{n \in \mathbb{N} : n < 16 \wedge 4 \text{ ist Teiler von } n\}.
\end{aligned}$$

a) Schreiben Sie die Mengen in aufzählender Form.

b) Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash C$, $B \cup C$, $C \cap D$, $B \cap C$.
Skizzieren Sie auch einige Venn Diagramme.

**Zahlenmengen**

**Menge der naürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$
**Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$
**Menge der rationalen Zahlen** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$
$= \{x : x \text{ endliche oder periodische Dezimalzahl}\}$
Jeder Bruch lässt sich als endliche oder periodische Dezimalzahl darstellen, z. B.

$$\frac{1}{2} = 0{,}5, \ \frac{1}{3} = 0{,}\bar{3}.$$

**Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R} = \{x : x \text{ endliche oder unendliche Dezimalzahl}\}$
Die Menge der reellen Zahlen enthält die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen. Beispiele für irrationale Zahlen sind $\pi$ und $\sqrt{2}$ (gesprochen „pi“ und „Wurzel aus 2“). Dies sind nichtperiodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen. Sie lassen sich nicht durch Brüche darstellen.

Wenn wir festlegen wollen, dass wir von einer Zahlenmenge nur die positiven oder negativen bzw. die nichtnegativen oder nichtpositiven Elemente betrachten wollen, so kennzeichnen wir dies mit einem hochgestellten “+” oder “−” bzw. einem hochgestellten “+” und einer tiefgestellten“0” oder einem hochgestellten “−” und einer tiefgestellten “0”, also z. B.

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}, \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

## Intervalle

Intervalle bezeichnen spezielle Teilmengen der reellen Zahlen.
Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Menge aller reellen Zahlen zwischen $a$ und $b$ heißt (endliches) Intervall, $a$ und $b$ heißen Randpunkte des Intervalls. Man unterscheidet, ob Randpunkte zum Intervall dazugehören oder nicht.

$$\begin{aligned}
[a;b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ heißt abgeschlossenes Intervall von } a \text{ bis } b.\\
(a;b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ heißt offenes Intervall von } a \text{ bis } b.\\
[a;b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \text{ heißt halboffenes Intervall von } a \text{ bis } b.\\
(a;b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \text{ heißt halboffenes Intervall von } a \text{ bis } b.
\end{aligned}$$

Die Länge der Intervalle beträgt jeweils $b - a$.

Auch bestimmte unbeschränkte Mengen werden als (unendliche) Intervalle bezeichnet. Sie werden mit Hilfe des Symbols $\infty$ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}
[a;\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}\\
(a;\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}\\
(-\infty;b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}\\
(-\infty;b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}\\
(-\infty;\infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

## Beispiel

$$\begin{aligned}
[-2;3) \cap \mathbb{Z} &= \{-2;-1;0;1;2\}\\
(-5;3) \cap [-6;2) &= (-5;2)\\
(-5;3) \cup [-6;2) &= [-6;3)\\
[-3;15) \backslash (0;12] &= [-3;0] \cup (12;15)
\end{aligned}$$

## Aufgabe

Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervalle.

a) $\{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 44\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} : -7 < x < 5\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x < 19\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 13 \leq x < 27\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} : x < 7\}$
h) $\mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 3\}$
i) $\mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} : 6 \leq x < \infty\}$

## Aufgabe

Bestimmen Sie die folgenden Mengen.
a) $(-5;4{,}5] \cap [-3;5)$ b) $(-\infty;3] \cap (2;5]$ c) $(-\infty;1] \cup [2;\infty)$ d) $(-\infty;\infty) \cap \mathbb{R}$

# 2 Grundlegende Rechenoperationen und Rechenregeln

Die grundlegenden Rechenoperationen sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

**Rechenregeln für die Addition**

Für $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt:

| | |
|---|---|
| $a + b = b + a$ | Kommutativgesetz der Addition |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | Assoziativgesetz der Addition |
| $a + 0 = a$ | 0 ist das neutrale Element der Addition |
| $a + (-a) = 0$ | $-a$ ist das inverse Element zu $a$ bzgl. der Addition |

**Rechenregeln für die Multiplikation**

Für $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt:

| | |
|---|---|
| $a \cdot b = b \cdot a$ | Kommutativgesetz der Multiplikation |
| $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | Assoziativgesetz der Multiplikation |
| $a \cdot 1 = a$ | 1 ist das neutrale Element der Multiplikation |
| $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ für $a \neq 0$ | $\frac{1}{a}$ ist das inverse Element zu $a$ bzgl. der Multiplikation |

**Distributivgesetze**

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

# 3 Aufgaben zum Selbsttest

Im Folgenden finden Sie einige Aufgaben, mit denen Sie Ihre Kenntnisse überprüfen können. Bearbeiten Sie die Aufgaben zu Hause. Geben Sie Ihre Lösungen in der nächsten Veranstaltung zur Korrektur ab.

**Aufgabe**

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

a) $7cd \cdot 5c^2$ b) $6a^2b^3 \cdot 8a^2b$ c) $2 \cdot x^2yz \cdot 7xy^2z \cdot 5xyz^2$ d) $3 \cdot u^3v \cdot 2uv \cdot 15$

**Aufgabe**

Ergänzen Sie die Lücken.

a) $2x \cdot \_\_\_\_ = 6x^2y$ b) $\_\_\_\_ \cdot 12uv^2w = 96u^2v^2w^2$
c) $56a^2b^2c = 8a^2b \cdot \_\_\_\_$ d) $16abc \cdot 25a^2bc \cdot \_\_\_\_ = 50a^3b^3c^3$

**Aufgabe**

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

a) $17x - 25x + 8x$ b) $4u^2v - 7u^2v - 11u^2v$ c) $8ab^2 - 15b^2a + 9a^2b$

**Aufgabe**

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

a) $15x - 3y + 20y - 3z + 7x + 5z - 20x$ b) $-8a - 50 + 7c - 3b + 49 - 2b + 6c$

c) $15a^2b - 12ab^2 + 9 - 16ab + 8ab^2 - 7a^2b$

**Aufgabe**

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

a) $3a^2 \cdot 5b - 6a \cdot 3b^2 + 9a \cdot 3b - 12ab \cdot 5 + 2a \cdot 3ab + 7ab \cdot 2b$

b) $16x^2yz \cdot 2yz - 6xy \cdot 3xz - 8x^2y \cdot 4z - 3xz \cdot 7xy^2z$

c) $5u^2v \cdot 5v^2 - 13uv^2 \cdot 2v + 6u \cdot 7v^2 - 7uv \cdot 4uv$

**Aufgabe**

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

a) $(12u - 31v) - (32u - 51v - 81w) + (20u - 20v)$

b) $-(44x + 13y - 7z) + (11x - 3y) + 83x - 24y + 23z$

c) $125a - [45b - (66ab + 15b) + (32a - 34ab)] - 78a$

d) $-[(-12a + 25b) - (15b - 12a)] - (-32b - 36a)$

**Aufgabe**

Multiplizieren Sie die Klammern aus und fassen Sie zusammen.

a) $(7a - 5b) \cdot (3a - 4b) - (5a + 9b) \cdot (4a - b)$

b) $(6x - 5y) \cdot (7x + 4y) + (x - y)(-2y + 3x) - (2x + y)(5x - 3y)$

c) $(4u + 3v) \cdot (u - 3v) - 2u \cdot (12 - 4v) \cdot (v + 4)$

**Aufgabe**

Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke. Dabei bedeutet faktorisieren, die Ausdrücke in der Form eines Produktes anzugeben.

a) $9a \cdot (3a - 2b) + 15a^2b \cdot (3a - 2b)$ b) $5u \cdot (x + y) - 3v \cdot (x + y)$

c) $4x^2(y + 3) + (3 + y)$ d) $12x \cdot (3y - 4z) - 3y + 4z$

e) $10ab + 25ab - 6bc - 15b^2$ f) $10x^2 - 12x + 15xy - 18y - 20xz + 24z$

# 4 Binomische Formeln

Die binomischen Formeln sollten Sie auswendig lernen! Sie werden häufig im Zusammenhang mit Faktorisierungen verwendet.

Erste binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Zweite binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Dritte binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Aufgabe**

Schreiben Sie mit Hilfe der binomischen Formeln als Summe.

a) $(4x + 7y)^2$ b) $(3x - 5y)^2$ c) $(2x + 7b)(2x - 7b)$
d) $(5a - 4b)^2$ e) $(5a - 7b)(5a + 7b)$ f) $(7u - 3v)^2$
g) $(a^2b + 3ab^2)^2$ h) $(10u^2vw - 3uvw^2)^2$ i) $(4x^2y - 7xy^2)(4x^2y + 7xy^2)$

**Aufgabe**

Fassen Sie zusammen.

a) $(3x - 5y)^2 - (3x + 5y)^2$ b) $(4a - 7b)^2 - (4a - 7b)(4a + 7b)$
c) $(6u - 2v)^2 + (6u + 2v)^2 - (6u + 2v)(6u - 2v)$

**Aufgabe**

Ergänzen Sie die Lücken.

a) $u^2 + 12uv + \_\_\_\_ = (\_\_\_\_ \;\_\_\; \_\_\_\_)^2$ b) $u^2 + 6uv + \_\_\_\_ = (\_\_\_\_ \;\_\_\; \_\_\_\_)^2$
c) $9x^2 - 12x + \_\_\_\_ = (\_\_\_\_ \;\_\_\; \_\_\_\_)^2$ d) $a^2 + \_\_\_\_ + 4b^2 = (\_\_\_\_ \;\_\_\; \_\_\_\_)^2$
e) $16x^2 - \_\_\_\_ + 9y^2 = (\_\_\_\_ \;\_\_\; \_\_\_\_)^2$

**Aufgabe**

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ oder $(a + b)(a - b)$.

a) $9u^2 - 30uv + 25v^2$ b) $121a^2 - 144b^2$ c) $289x^2y^2 + 34xyz + z^2$
d) $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4$ e) $81\pi^2 + 18\pi abc + a^2b^2c^2$

# 5 Bruchrechnung

**Erweitern**

Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl (oder demselben Term) ungleich Null multipliziert werden.

**Kürzen**

Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (oder denselben Term) ungleich Null dividiert werden.

**Beispiel**

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}, \quad \frac{125}{15} = \frac{25 \cdot \cancel{5}}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{25}{3}$$

**Aufgabe**

Kürzen Sie die Brüche so weit wie möglich.

a) $\frac{16}{20}$ b) $\frac{4}{8}$ c) $\frac{9}{12}$ d) $\frac{27}{72}$ e) $-\frac{66}{121}$ f) $\frac{42}{63}$ g) $\frac{96}{288}$ h) $\frac{39}{78}$ i) $-\frac{48}{75}$ j) $\frac{121}{198}$

**Aufgabe**

Machen Sie die Brüche durch Erweitern gleichnamig. Das bedeutet, dass nach dem Erweitern beide Brüche denselben Nenner haben sollen.

$$\text{a)}\ \frac{3}{4} \text{ und } \frac{4}{5} \qquad \text{b)}\ \frac{7}{12} \text{ und } \frac{5}{9} \qquad \text{c)}\ \frac{2}{15} \text{ und } \frac{3}{20}$$

**Aufgabe**

Ordnen Sie die Brüche der Größe nach. Beginnen Sie mit dem kleinsten Bruch.

$$\text{a)}\ \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{8} \qquad \text{b)}\ \frac{2}{15}, \frac{3}{20}, \frac{1}{9}, \frac{4}{27} \qquad \text{c)}\ -\frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{2}{9},\ -\frac{1}{8}$$

**Addition und Subtraktion von Brüchen**

Will man Brüche addieren oder subtrahieren, muss man sie durch Erweitern gleichnamig machen. Das bedeutet, dass man die Brüche so erweitern muss, dass sie danach denselben Nenner haben. Nur Brüche mit gleichen Nennern können addiert oder subtrahiert werden.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

**Aufgabe**

Addieren bzw. subtrahieren Sie die Brüche und kürzen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

$$\text{a)}\ \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \qquad \text{b)}\ \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \qquad \text{c)}\ \frac{6}{7} + \frac{3}{14} \qquad \text{d)}\ \frac{5}{12} + 3\frac{1}{4} \qquad \text{e)}\ 2\frac{4}{7} + 9\frac{2}{3} \qquad \text{f)}\ \frac{6}{11} - \frac{2}{11}$$

$$\text{g)}\ \frac{7}{8} - \frac{1}{6} \qquad \text{h)}\ \frac{1}{2} - \frac{5}{7} \qquad \text{i)}\ 5\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \qquad \text{j)}\ 3\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \qquad \text{k)}\ 7\frac{5}{6} - 10\frac{2}{3}$$

$$\text{l)}\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \qquad \text{m)}\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24}$$

**Multiplikation von Brüchen**

Brüche werden multipliziert, indem jeweils die Zähler und die Nenner multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

**Aufgabe**

Multiplizieren Sie die Brüche. Kürzen Sie wenn möglich.

$$\text{a)}\ \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} \qquad \text{b)}\ \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{6} \qquad \text{c)}\ \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{12} \qquad \text{d)}\ \frac{49}{36} \cdot \frac{9}{21}$$

$$\text{e)}\ \frac{10}{39} \cdot \frac{26}{45} \qquad \text{f)}\ \frac{16}{23} \cdot \frac{13}{30} \qquad \text{g)}\ -\frac{2}{7} \cdot \frac{35}{36} \qquad \text{h)}\ -\frac{4}{5} \cdot (-\frac{1}{2})$$

**Division von Brüchen**

Brüche werden dividiert, indem der Dividend $\frac{a}{b}$ mit dem Kehrwert $\frac{d}{c}$ des Divisors $\frac{c}{d}$ multipliziert wird.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

**Aufgabe**

Dividieren Sie die Brüche. Kürzen Sie wenn möglich.

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9} : \frac{2}{3}$ c) $\frac{21}{25} : \frac{4}{5}$ d) $\frac{64}{88} : \frac{24}{33}$ e) $\frac{63}{121} : \frac{35}{22}$

f) $-\frac{81}{13} : \frac{99}{26}$ g) $4\frac{1}{3} : 2\frac{1}{2}$ h) $5\frac{2}{7} : (-7\frac{4}{10})$ i) $-\frac{3}{8} : (-\frac{9}{5})$

**Umwandeln von Brüchen in Dezimalzahlen**

Jeder Bruch lässt sich auch als endliche oder periodische Dezimalzahl schreiben. Diese Darstellung erhält man durch schriftliche Division.

**Beispiel**

$\frac{15}{8} = 1{,}875$, denn:

```
15 :8   =1,875
 8
 70
 64
   60
   56
     40
     40
      0
```

$\frac{30}{11} = 2{,}\overline{72}$, denn:

```
30 :11 = 2,72 (Periode 72)
22
 80
 77
   30
   22
     80
     77
       ...
```

**Aufgabe**

Wandeln Sie die Brüche in Dezimalzahlen um.

a) $\frac{17}{5}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{80}{100}$ e) $\frac{5}{7}$

**Umwandeln von Dezimalzahlen in Brüche**

Jede endliche und jede periodische Dezimalzahl lässt sich auch als Bruch schreiben. Wir erläutern das Vorgehen an Beispielen.

**Beispiel**

$$4{,}125 = \frac{4125}{1000} = \frac{33 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{33}{8}$$

$0{,}\overline{5} = \dfrac{5}{9}$ denn:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 10 & \cdot & 0{,}\overline{5} & = & 5{,}\overline{5} \\ 1 & \cdot & 0{,}\overline{5} & = & 0{,}\overline{5} \end{array}\right\} - \\ \hline \begin{array}{rcrcr} 9 & \cdot & 0{,}\overline{5} & = & 5 \end{array}$$

$0{,}\overline{72} = \dfrac{72}{99}$ denn:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 100 & \cdot & 0{,}\overline{72} & = & 72{,}\overline{72} \\ 1 & \cdot & 0{,}\overline{72} & = & 0{,}\overline{72} \end{array}\right\} - \\ \hline \begin{array}{rcrcr} 99 & \cdot & 0{,}\overline{72} & = & 72 \end{array}$$

$5{,}3\overline{14} = \dfrac{5261}{990}$ denn:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 1000 & \cdot & 5{,}3\overline{14} & = & 5314{,}\overline{14} \\ 10 & \cdot & 5{,}3\overline{14} & = & 53{,}\overline{14} \end{array}\right\} - \\ \hline \begin{array}{rcrcr} 990 & \cdot & 5{,}3\overline{14} & = & 5261 \end{array}$$

**Aufgabe**

Wandeln Sie die Dezimalzahlen in Brüche um. Kürzen Sie wenn möglich.

a) $0{,}75$ b) $0{,}35$ c) $1{,}24$ d) $0{,}\overline{4}$ e) $0{,}\overline{9}$ f) $0{,}\overline{21}$ g) $98{,}1\overline{052}$

# 6 Fakultäten und Binomialkoeffizienten

**Definition**

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man $n!$ (gesprochen „$n$ Fakultät") als das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis $n$. Zusätzlich definiert man $0! = 1$.
Insgesamt gilt also

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot \ldots \cdot n & , \quad n \in \mathbb{N}, \\ 1 & , \quad n = 0. \end{cases}$$

Man kann $n!$ auch rekursiv durch die Festlegung $0! = 1$ und $n! = n \cdot (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$ definieren.

**Beispiel**

$$\begin{aligned} 2! &= 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1! = 2 \\ 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2! = 6 \\ 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3! = 24 \end{aligned}$$

**Aufgabe**

Berechnen Sie 5!, 6! und 7!.

**Aufgabe**

In einem Büro stehen für 3 Mitarbeiter 3 Arbeitsplätze zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei Mitarbeiter auf die drei Arbeitsplätze zu verteilen?

**Aufgabe**

In einem Seminarraum stehen für 10 Teilnehmer 10 Sitzplätze zur Verfügung. Da sich die Teilnehmer nicht kennen, sollen alle möglichen Sitzplatzkombinationen ausprobiert werden. Wie lange dauert es insgesamt, wenn jede Sitzplatzprobe 5 Minuten dauert?

**Definition**

Seien $n,k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$. Dann ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (gesprochen „$n$ über $k$“) definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Beispiel**

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = 10, \qquad \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

**Beispiel**

Beim Lotto 6 aus 49 gibt es $\binom{49}{6}$ verschiedene Möglichkeiten, den Lottoschein auszufüllen.

**Aufgabe**

Berechnen Sie!

a) $\binom{20}{5}$ b) $\binom{403}{3}$ c) $\binom{10}{5} - \binom{11}{5}$ d) $\dfrac{\binom{102}{27}}{\binom{100}{26}}$

**Eigenschaften der Binomialkoeffizienten**

Die Binomialkoeffizienten besitzen die folgenden Eigenschaften.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 \\
\binom{n}{n} &= \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1 \\
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} \\
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1}{n-k+1} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{k}{k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k+1)!} \cdot (n-k+1+k) = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n
\end{aligned}$$

**Das Pascalsche Dreieck**

Die Binomialkoeffizienten lassen sich aus dem Pascalschen Dreieck ablesen. Dazu werden die oben angegebenen Eigenschaften der Binomialkoeffizienten benutzt.
Die äußeren Binomialkoeffizienten erhält man aus der ersten und zweiten Eigenschaft. Mit der dritten Eigenschaft ergibt sich für die übrigen Koeffizienten, dass sie sich als Summe der beiden links und rechts darüber stehenden Koeffizienten berechnen lassen.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Hat man verstanden, wie die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck berechnet werden, genügt es, einfach die Zahlenwerte zu notieren.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

**Aufgabe**

a) Ergänzen Sie das Pascalsche Dreieck bis zur Zeile für $n = 8$.

b) Lesen Sie aus dem Pascalschen Dreieck die Werte für die folgenden Binomialkoeffizienten ab.

a) $\binom{4}{3}$ b) $\binom{7}{3}$ c) $\binom{8}{5}$ d) $\binom{8}{7}$ e) $\binom{8}{3}$ f) $\binom{6}{4}$

# 7 Der binomische Lehrsatz

In diesem Abschnitt soll die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ verallgemeinert werden. Das bedeutet, dass wir eine allgemeine Formel für $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$, haben wollen.
Wir berechnen zunächst

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \mathbf{1} \cdot b^2 + \mathbf{2} \cdot ba + \mathbf{1} \cdot a^2, \\
(a+b)^3 &= \mathbf{1} \cdot b^3 + \mathbf{3} \cdot b^2 a + \mathbf{3} \cdot ba^2 + \mathbf{1} \cdot a^3, \\
(a+b)^4 &= \mathbf{1} \cdot b^4 + \mathbf{4} \cdot b^3 a + \mathbf{6} \cdot b^2 a^2 + \mathbf{4} \cdot ba^3 + \mathbf{1} \cdot a^4.
\end{aligned}
$$

Vergleicht man die Koeffizienten (das sind die fett gedruckten Zahlen in den oben stehenden Ergebnissen) mit den entsprechenden Zeilen im Pascalschen Dreieck, so sieht man, dass diese übereinstimmen. Das ist kein Zufall!
Allgemein gilt für $n \in \mathbb{N}$ der binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^n b^0.$$

Bevor wir dazu Beispiele behandeln, führen wir noch ein nützliches Symbol ein.

**Das Summenzeichen**

Das Summenzeichen $\sum$ ist der griechische Großbuchstabe Sigma. Es wird verwendet, um Summen aus regelmäßig aufgebauten Termen in übersichtlicher Form darzustellen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Gesprochen wird dies „Summe über $k$ gleich 1 bis $n$ von $a_k$“ oder kurz „Summe $k$ gleich 1 bis $n$ $a_k$“.

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} k^2 &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 \\
\sum_{i=0}^{n} (2i+1) &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n+1) \\
\sum_{j=2}^{7} (-1)^j \cdot \frac{1}{j} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

**Beispiel**

Der Gewinner eines Schachturniers soll folgendermaßen belohnt werden. Auf das erste Feld des Schachbrettes (64 Felder) soll ein Weizenkorn, auf das zweite zwei Weizenkörner, auf das dritte $2^2$ auf das vierte $2^3$ usw. kommen. Wie viele Weizenkörner kommen auf diese Art und Weise zusammen? Es sind insgesamt

$$\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} &= \sum_{k=0}^{63} 2^k \\
&= 18.446.744.073.709.551.615
\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens.

a) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100$ b) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125}$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$

**Aufgabe**

Berechnen Sie die folgenden Summen.

$$\text{a)} \sum_{i=3}^{10} i(i-1) \qquad \text{b)} \sum_{j=1}^{5} (-2)^j \qquad \text{c)} \sum_{l=-2}^{2} \sqrt{l^2}$$

Mit Hilfe des Summenzeichens lässt sich nun der binomische Lehrsatz kürzer schreiben.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
& (2x+3y)^4 \\
= \;& \binom{4}{0}(2x)^0(3y)^4 + \binom{4}{1}(2x)^1(3y)^3 + \binom{4}{2}(2x)^2(3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)^3(3y)^1 + \binom{4}{4}(2x)^4(3y)^0 \\
= \;& 81y^4 + 216xy^3 + 216x^2y^2 + 96x^3y + 16x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2x-3y)^4 \\
= \;& \binom{4}{0}(2x)^0(-3y)^4 + \binom{4}{1}(2x)^1(-3y)^3 + \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 \\
& + \binom{4}{3}(2x)^3(-3y)^1 + \binom{4}{4}(2x)^4(-3y)^0 \\
= \;& 81y^4 - 216xy^3 + 216x^2y^2 - 96x^3y + 16x^4
\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

a) $(2y+3z)^4$ b) $(2y-3z)^4$ c) $(-5a^2+3c)^3$

**Beispiel**

Man kann den binomischen Lehrsatz auch verwenden, um bestimmte Summen zu berechnen.

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} 2^i (-1)^{10-i} = (2+(-1))^{10} = 1$$

Hier ist speziell $a = 2$, $b = -1$ und $n = 10$.

**Aufgabe**

Berechnen Sie wie im letzten Beispiel die folgenden Summen.

a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i (-1)^{n-i}$ b) $\sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} (-1)^i$ c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$ d) $\sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} 1^j$

# 8 Betrag einer reellen Zahl

Der Betrag einer reellen Zahl $a$ ist geometrisch der Abstand von $a$ zu 0 auf der reellen Zahlengeraden.

**Definition**

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist der Betrag von $a$ definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

**Beispiel**

Es ist $|4| = 4$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$.

**Beispiel**

Wir lösen den Betrag $|x-2|$ mit Hilfe der Definition des Betrages auf.

$$\begin{aligned} |x-2| &= \begin{cases} x-2 & \text{falls } x-2 \geq 0, \\ 2-x & \text{falls } x-2 < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-2 & \text{falls } x \geq 2, \\ 2-x & \text{falls } x < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$|x-2|$ gibt den Abstand von $x$ zu 2 an.
Allgemein ist $|x-x_0| = |x_0-x|$ der Abstand von $x$ zu $x_0$.

**Aufgabe**

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke wie im Beispiel mit Fallunterscheidungen.

a) $|x-5|$ b) $|4+x|$ c) $|3x-2|$ d) $|2x+7|$ e) $|-8x-7|$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie den Abstand zwischen $x$ und $y$.

a) $x=7$, $y=18$ b) $x=-7$, $y=11$ c) $x=-3$, $y=-80$
d) $x=18$, $y=-11$ e) $x=100$, $y=-100$ f) $x=-99$, $y=11$

**Aufgabe**

Was bedeuten die Beträge in den folgenden Ausdrücken geometrisch? Lösen Sie mit Hilfe der geometischen Überlegungen die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen.

a) $|x-5|=3$ b) $|x-5| \leq 3$ c) $|x-5|>3$
d) $|8-x|=2$ e) $|-8-x|=2$ f) $|-8+x|=2$
g) $|2x+1| \leq 4$ h) $|3x-4|>6$ i) $|7-2x|=8$

# 9 Potenzen

**Definition**

Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

(gesprochen „$a$ hoch $n$“) die $n$-te Potenz von $a$. Dabei heißt $a$ Basis und $n$ Exponent.
Für $a \neq 0$ ist

$$a^0 = 1\,, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}\,.$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
2^5 &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32\\
(-3)^3 &= (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27\\
(-2)^4 &= (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16\\
3^{-2} &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}\\
-2^{-4} &= -\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

**Beispiel**

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von $K_0$ € mit einer Zinsrate von $p\,\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen. Sein Guthaben beträgt nach

$$\begin{array}{rl}
\text{einem Jahr} & K_1 = K_0 + K_0\cdot\frac{p}{100} = K_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right),\\
\text{zwei Jahren} & K_2 = K_1 + K_1\cdot\frac{p}{100} = K_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\\
\dots & \dots\\
n\ \text{Jahren} & K_n = K_{n-1} + K_{n-1}\cdot\frac{p}{100} = K_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.
\end{array}$$

Dies ist die Zinseszinsformel.

**Beispiel**

Frau Kramer benötigt in $n$ Jahren einen Betrag von $K_n$ €. Wie kann sie ausrechnen, welches Kapital sie heute anlegen muss, wenn die Bank ihr Kapital jährlich mit einer Zinsrate von $p\,\%$ verzinst und die Zinsen jeweils dem Kapital gutschreibt. Aus dem vorigen Beispiel sieht man

$$K_n = K_0\cdot(1+\frac{p}{100})^n \iff K_0 = K_n\cdot(1+\frac{p}{100})^{-n}.$$

**Aufgabe**

Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

a) $(-2)^2$ b) $-2^2$ c) $(-2)^3$ d) $(-2)^0$ e) $-2^0$ f) $(-2)^{-2}$

g) $-2^{-2}$ h) $(-2)^{-3}$ i) $-2^{-3}$ j) $3^4$ k) $8^{-3}$ l) $0^{1000}$

m) $13^0$ n) $2^{3^4}$ o) $(2^3)^4$ p) $(2^4)^3$

**Rechenregeln für Potenzen**

Im Umgang mit Potenzen und zur Vereinfachung von Termen mit Potenzen müssen die folgenden Rechenregeln sicher beherrscht werden.

Für $a,b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $n,m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
a^n \cdot a^m &= a^{n+m} && \text{gleiche Basen}\\
\frac{a^n}{a^m} &= a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m} && \text{gleiche Basen}\\
a^n \cdot b^n &= (ab)^n && \text{gleiche Exponenten}\\
\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n \cdot b^{-n} && \text{gleiche Exponenten}\\
(a^m)^n &= a^{m\cdot n} = (a^n)^m\\
a^{n^m} &= a^{(n^m)}
\end{aligned}$$

**Beispiel**

$$4^{3^2} = 4^{\left(3^2\right)} = 4^{3\cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad \left(4^3\right)^2 = (4\cdot 4\cdot 4)^2 = 4^6$$

$$\frac{a^{n+1}a^{2n-1}b^m}{a^{3n-2}b^{m-1}} = a^2 b$$

$$\left(\frac{2x^n y^2}{4y^n}\right)^3 \left(\frac{x^{2n-1}y^{n-1}}{3y}\right)^2 : \left(\frac{3x^{n+1}y^{n-1}}{(xy)^{2n}}\right) = \frac{x^{8n-3}y^3}{2^3\cdot 3^3}$$

**Aufgabe**

Verwenden Sie die Rechenregeln, um die folgenden Ausdrücke zu vereinfachen. Geben Sie an, welche Werte die Variablen nicht annehmen dürfen.

a) $x^{20}\cdot x^{-17}\cdot x^3$ b) $a^2b^3a^{-1}b^5$ c) $\dfrac{x^3y^{-2}}{x^{-1}y^5}$ d) $\dfrac{t^pt^{q-1}}{t^rt^{s-1}}$

e) $\dfrac{10^2\cdot 10^{-4}\cdot 10^3}{10^0\cdot 10^{-2}\cdot 10^5}$ f) $\dfrac{(k^2)^3\cdot k^4}{(k^3)^2}$ g) $\dfrac{(x+1)^2(x+1)^{-2}}{(x+1)^4(x+1)^{-3}}$ h) $\dfrac{u^{-4}v^{-3}w^2}{x^2y^{-2}} : \dfrac{x^{-1}y^2}{v^4w^{-1}}$

i) $[(2a^{-3})^2\cdot b^3]^5\cdot(b^{-1}\cdot a^8)^2 : (b^{2^2}\cdot b^{3^2}\cdot a^{30}\cdot a^{2^4})$

# 10 Wurzeln

Wie beim Addieren und Multiplizieren gibt es auch beim Potenzieren Umkehroperationen. Dabei ist festzulegen, welcher Bestandteil der Potenz Ergebnis der Umkehroperation sein soll. Ist der Exponent bekannt und soll die Basis bestimmt werden, so geschieht dies durch Wurzelziehen. Ist dagegen die Basis bekannt und soll der Exponent ermittelt werden, so geschieht dies durch Logarithmieren (siehe Abschnitt 11).

**Definition**

Sei $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$. Die eindeutig bestimmte nicht negative Zahl $b$, deren $n$-te Potenz $a$ ergibt, d. h. die Gleichung $b^n = a$ löst, heißt $n$-te Wurzel aus $a$ und wird mit

$$\sqrt[n]{a}$$

bezeichnet. Dabei heißt $a$ Radikand und $n$ Wurzelexponent. Für die Quadratwurzel ($n = 2$) schreibt man auch einfach $\sqrt{a}$ (gesprochen „Wurzel aus $a$“).

**Beispiel**

$$\sqrt[3]{64} = 4\,, \quad \text{denn} \quad 4^3 = 64$$
$$\sqrt[10]{1024} = 2\,, \quad \text{denn} \quad 2^{10} = 1024$$

Für $a \in \mathbb{R}^-$, $n \in \mathbb{N}$, $n$ ungerade, hat die Gleichung $b^n = a$ ebenfalls genau eine Lösung, die häufig auch mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet wird, z. B. $\sqrt[3]{-8} = -2$ als Lösung der Gleichung $(-2)^3 = -8$.

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{a^2} = |a|$, z. B. $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$, $\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$.

**Aufgabe**

Berechnen Sie die folgenden Wurzeln.

a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[4]{16}$ e) $\sqrt[5]{32}$ f) $\sqrt{9+16}$

**Aufgabe**

Für welche Werte von $a$,$x$,$y \in \mathbb{R}$ existiert die jeweils angegebene Wurzel?

a) $\sqrt{4+a}$ b) $\sqrt{-3-3y}$ c) $\sqrt{x^2-1}$ d) $\sqrt{-x^2-1}$ e) $\sqrt{1-a^2}$

Hinweis: Der Radikand darf nicht negativ sein.

**Rechenregeln für Wurzeln**

Für $a$,$b \in \mathbb{R}_0^+$ und $n$,$k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a^m} &= (\sqrt[n]{a})^m \text{ und } \sqrt[n]{a^n} = a \\
\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,, \quad b \neq 0 \\
\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}
\end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} &= \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4 \\
\sqrt[3]{\sqrt[2]{27}} &= \sqrt[2]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Berechnen Sie die folgenden Wurzeln.

a) $\sqrt{\dfrac{169}{144}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{125}}$ c) $\sqrt{0{,}064}$ d) $\sqrt[5]{0{,}00032}$

**Aufgabe**

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. $a$,$b$,$x$ und $y$ seien dabei so gewählt, dass alle auftretenden Terme definiert sind.

a) $\dfrac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{5x-20y}$ b) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}$ c) $(\sqrt{b}-\sqrt{5})^2+(\sqrt{b}+\sqrt{5})^2$

d) $\sqrt{9a^2-6a+1}$ e) $\dfrac{4\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$ f) $\sqrt{a^2-10a+25}$

**Aufgabe**

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen. Zum Teil sind die binomischen Formeln zu verwenden.
Geben Sie an, für welche Werte der Variablen der jeweilige Term definiert ist.

a) $\sqrt[8]{x^2y\sqrt[4]{y^{12}}}$ b) $\sqrt[4]{(x+1)^8}\cdot\sqrt[4]{x+1}$ c) $\dfrac{12-20\sqrt{s}}{\sqrt{36+120\sqrt{s}+100s}}\cdot\dfrac{(3+5\sqrt{s})^2}{9-25s}$

**Beispiel**

Mit Hilfe der dritten binomischen Formel lassen sich Nenner in Brüchen rational machen.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{5-\sqrt{15}}{2}$$

**Aufgabe**

Machen Sie die jeweils auftretenden Nenner rational und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $4\sqrt{6t}-\dfrac{5t\sqrt{2}}{\sqrt{3t}}$ für $t>0$

c) $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ für $a,b>0$ d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$

Mit Hilfe von Wurzeln lassen sich nun auch Potenzen mit rationalen Exponenten definieren.

**Definition**

Für $a\in\mathbb{R}_0^+$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$ ist

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \text{ mit } a\neq 0 \text{ falls } m<0.$$

Für rationale Exponenten gelten die gleichen Rechenregeln wie für ganzzahlige Exponenten.

**Beispiel**

Seien $x,y,z\in\mathbb{R}_0^+$.

$$\begin{aligned}
16^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{16}=2\\
4^{\frac{3}{2}} &= (\sqrt{4})^3=2^3=8\\
\left(27x^{3p}y^{6q}z^{12r}\right)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{27}x^{\frac{3p}{3}}y^{\frac{6q}{3}}z^{\frac{12r}{3}}=3x^py^{2q}z^{4r}\\
\left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^6 &= x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 6}=x^2\\
(x+y)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{(x+y)^5} &= (x+y)^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}=(x+y)^3
\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit (rationalen) Exponenten.

a) $\sqrt[3]{x^2}$ b) $\sqrt[5]{(a+b)^{10}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(u+v)^3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{(2a-b)^3}}{\sqrt[3]{(2a-b)^5}}$

## 11 Logarithmen

Das Logarithmieren ist die Umkehrung des Potenzierens bei gegebener Basis und gesuchtem Exponenten.

**Definition**

Seien $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$. Dann ist $\log_b a$ (gesprochen "Logarithmus von $a$ zur Basis $b$") der eindeutig bestimmte Exponent $x$, mit dem $b$ potenziert werden muss, um $a$ zu erhalten, d. h.

$$\log_b a = x \Longleftrightarrow b^x = a\,.$$

Für den dekadischen Logarithmus, d. h. den Logarithmus zur Basis 10, verwendet man statt $\log_{10} a$ abkürzend die Schreibweise $\lg a$. Für den natürlichen Logarithmus, d. h. den Logarithmus zur Basis $\mathrm{e}$ (Eulersche Zahl) verwendet man statt $\log_{\mathrm{e}} a$ die Schreibweise $\ln a$.

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
\log_2 8 = \mathbf{3}\,, &\quad \text{denn} \quad 2^{\mathbf{3}} = 8\\
\lg 100 = \mathbf{2}\,, &\quad \text{denn} \quad 10^{\mathbf{2}} = 100\\
\log_9 3 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,, &\quad \text{denn} \quad 9^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \sqrt{9} = 3\\
\log_{\frac{1}{3}} 9 = -\mathbf{2}\,, &\quad \text{denn} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-\mathbf{2}} = 3^2 = 9
\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\log_5 25$ b) $\lg 0{,}001$ c) $\log_{17} 1$ d) $\log_8\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$

**Rechenregeln für Logarithmen**

Seien $a,d \in \mathbb{R}^+$, $b,c \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ und $p \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
b^{\log_b a} &= a\\
\log_b(b^a) &= a\\
\log_b(a\cdot d) &= \log_b a + \log_b d\\
\log_b\left(\frac{a}{d}\right) &= \log_b a - \log_b d\\
\log_b(a^p) &= p\cdot\log_b a
\end{aligned}$$

$$\log_b a = \log_b c \cdot \log_c a \quad \text{bzw.} \quad \log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

Die ersten beiden Regeln bedeuten gerade, dass das Logarithmieren die Umkehrung des Potenzierens bei gegebener Basis ist und umgekehrt.
Die letzte Regel benötigt man zur Umrechnung in andere Basen.

**Beispiel**

Für $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \log_2(8a^2) &= \log_2 8 + \log_2(a^2) = 3 + 2\log_2 a \\ \lg\left(\frac{100}{a^5}\right) &= \lg 100 - \lg(a^5) = 2 - 5\lg a \\ \log_7 84 - \log_7 12 &= \log_7 \frac{84}{12} = \log_7 7 = 1 \\ \log_4 2^{x+1} &= (x+1)\log_4 2 = \frac{1}{2}(x+1) \end{aligned}$$

Umrechnen in eine andere Basis:

$$\log_2 100 = \frac{\lg 100}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2}$$

**Aufgabe**

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Summen bzw. Differenzen und Produkte bzw. Quotienten. Machen Sie sich in jedem Schritt klar, welche Rechenregeln Sie benutzen. Alle Variablen sollen so gewählt sein, dass die jeweiligen Ausdrücke definiert sind.

a) $\log_3(3x)$
b) $\log_5\left(\frac{5a}{y}\right)$
c) $\lg\left(\frac{\sqrt{a}\cdot b^2}{\sqrt[4]{c}}\right)$
d) $\lg\left[\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10}\right]$
e) $\lg\left(\frac{5\sqrt{x^2}\cdot(\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{a\sqrt{b}}}\right)$
f) $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{a^3b}{c^2d}}\right)$
g) $\ln\sqrt{x}$
h) $\ln\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$
i) $\ln\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)$

**Aufgabe**

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in Logarithmen zur Basis 10 um.

a) $\log_4 130 - \log_3 20$
b) $\log_{\frac{1}{3}} 234 + \lg 93 - \log_2 92$

**Aufgabe**

Schreiben Sie die folgenden Terme mit nur einem Logarithmus auf, z.B. $2\log_5 u + 3\log_5 v = \log_5(u^2) + \log_5(v^3) = \log_5(u^2\cdot v^3)$.

a) $\lg(a+b) + \lg(a+b)^2 - \frac{1}{2}\lg a - \frac{1}{3}\lg b$
b) $\frac{1}{3}\log_2 x + \frac{2}{3}$
c) $\log_4(x^2-1) - \log_4(x-1) - \log_4(x+1)^2$
d) $\left[(\log_4 x^2) : (\log_4 x)\right] - 2$
e) $\left[\left(\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{b}\right) : \left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{b}\right)\right]\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{6}}$
f) $2\lg a - \lg\frac{a}{a^2+1} - \lg a^3$

# 12 Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

Grundlage für die Definition von Sinus und Kosinus am rechtwinkligen Dreieck sind folgende Beobachtungen und Überlegungen.

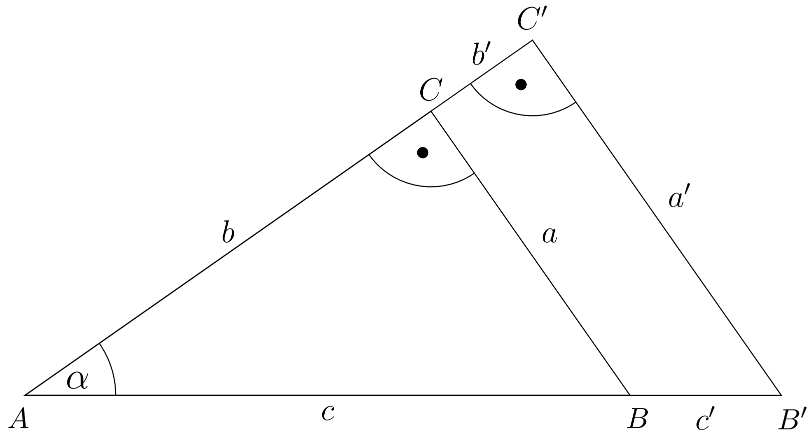



Abbildung 4: Ähnliche, rechtwinklige Dreiecke

Man nennt zwei Dreiecke ähnlich, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Wir betrachten nun speziell ähnliche, rechtwinklige Dreiecke.

Die Größenverhältnisse $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ und $\frac{a}{b}$ hängen nur von der Größe des Winkels $\alpha$ ab.

Da $a$ und $a'$ parallel verlaufen, können wir die Strahlensätze anwenden. Damit lassen sich die folgenden Beziehungen ablesen:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}.$$

Diese Verhältnisse werden nun mit den Winkelfunktionen (das sind die trigonometrischen Funktionen) in Abhängigkeit von $\alpha$ dargestellt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Mit Hilfe von geometrischen Überlegungen lassen sich folgende Werte ermitteln.

| $\alpha$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\tan\alpha$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| $\cot\alpha$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |

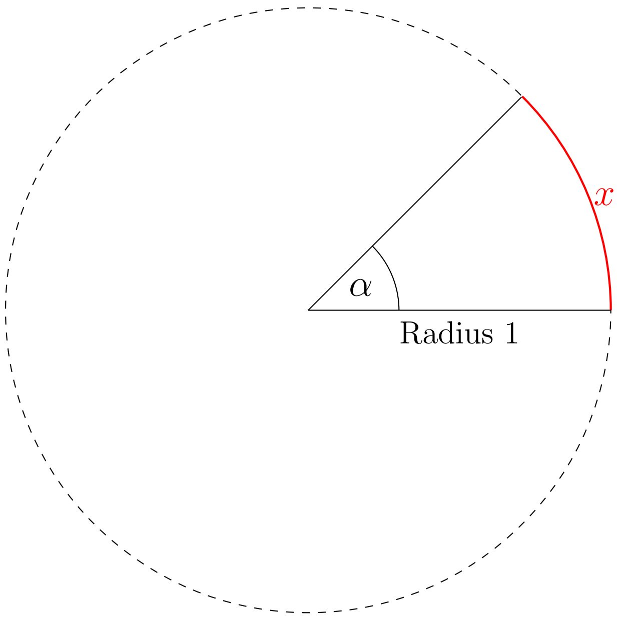



Abbildung 5: Winkel und Bogenlänge am Einheitskreis

**Winkel im Bogenmaß**

Statt in Grad, werden Winkel häufig im Bogenmaß angegeben. Bei der Verwendung von Taschenrechnern ist auf die richtige Einstellung zu achten. Für Winkel in Grad benutzt man die Einstellung „deg“, für Winkel im Bogenmaß die Einstellung „rad“.

Das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises ist immer gleich der irrationalen Zahl $\pi$

$$\pi = \frac{\text{Umfang}}{\text{Durchmesser}} = 3{,}14159265\ldots$$

Wir betrachten nun den Einheitskreis. Das ist der Kreis mit Radius 1.
Der Umfang des Einheitskreises beträgt $2\pi$. Für die zu einem Winkel $\alpha$ (in Grad) gehörende Bogenlänge $x$ am Einheitskreis gilt:

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi},$$

d. h. die Bogenlänge beträgt

$$x = 2\pi \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}.$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie zu folgenden Winkeln in Grad die Winkel im Bogenmaß.
$\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 120^\circ$, $\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 270^\circ$, $\alpha = 360^\circ$, $\alpha = -45^\circ$.

**Aufgabe**

Bestimmen Sie zu folgenden Winkeln im Bogenmaß die Winkel in Grad.

$$x = \frac{2}{3}\pi, \qquad x = \frac{7}{6}\pi, \qquad x = \frac{-\pi}{2}, \qquad x = -\frac{5}{2}\pi$$

**Aufgabe**

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner.

a) $\sin(90^\circ)$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ b) $\cos(45^\circ)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

# 13 Aussagenlogik

**Definition**

Unter einer Aussage versteht man eine Behauptung, von der eindeutig entschieden werden kann, ob sie wahr oder falsch ist.
Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zu.

**Beispiel**

$A$: 169 ist eine Primzahl. (f)
$B$: 169 ist eine Quadratzahl. (w)
$C$: Wien ist die Hauptstadt der Schweiz. (f)

**Negation** (Verneinung)

Ist $A$ eine Aussage, so bezeichnet $\neg A$ (gesprochen „nicht $A$") die Negation der Aussage $A$.
$\neg A$ ist wieder eine Aussage, die wahr ist, wenn $A$ falsch ist und umgekehrt.

**Wahrheitstafel von $\neg A$**

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| w | **f** |
| f | **w** |

**Beispiel**

$A$: $2 + 2 = 4$ (w)
$\neg A$: $2 + 2 \neq 4$ (f)
$B$: Alle Professoren sind unpünktlich. (f)
$\neg B$: Es existiert ein Professor, der pünktlich ist. (w)
$C$: Es existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $n + 3 \neq 6$ ist. (w)
$\neg C$: Für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $n + 3 = 6$. (f)

**Aufgabe**

Bilden Sie die Negationen der folgenden Aussagen.
$A$: Zwischen 1 und 20 gibt es 9 Primzahlen.
$B$: Im Raum D.13.15 gibt es eine Tafel, die weiß ist.
$C$: Alle erwachsenen Menschen sind größer als 170 cm.

**Verknüpfungen von Aussagen**

Aussagen können logisch miteinander verknüpft werden. Dadurch entstehen neue Aussagen.

**Konjunktion**

Sind $A$ und $B$ Aussagen, so wird durch $A \wedge B$ (gesprochen „$A$ und $B$") eine neue Aussage, die Konjunktion von $A$ und $B$ definiert.
$A \wedge B$ ist eine wahre Aussage, wenn sowohl $A$ als auch $B$ wahre Aussagen sind. Anders ausgedrückt ist $A \wedge B$ genau dann falsch, wenn (mindestens) eine der beiden Aussagen falsch ist.

**Wahrheitstafel von $A \wedge B$**

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| w | w | **w** |
| w | f | **f** |
| f | w | **f** |
| f | f | **f** |

**Beispiel**

$A$: $2 + 2 = 4$. (w)
$B$: 169 ist eine Primzahl. (f)
$C$: Jede Zahl $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ besitzt bezüglich der Multiplikation ein inverses Element. (w)
$A \wedge B$: $2 + 2 = 4$ und 169 ist eine Primzahl. (f)
$A \wedge C$: $2 + 2 = 4$ und jede Zahl $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ besitzt bezüglich der Multiplikation ein inverses Element. (w)

**Disjunktion**

Sind $A$ und $B$ Aussagen, so wird durch $A \vee B$ (gesprochen „$A$ oder $B$“) eine neue Aussage, die Disjunktion von $A$ und $B$ definiert.
Es ist zu beachten, dass es sich um ein „nicht ausschließendes oder“ handelt. Das bedeutet, dass $A \vee B$ nur dann falsch ist, wenn sowohl $A$ als auch $B$ falsch sind.
(Meint man „entweder $A$ oder $B$“, so schreibt man $A \dot{\vee} B$ und spricht vom „exklusiven oder“.)

**Wahrheitstafel von** $A \vee B$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| w | w | **w** |
| w | f | **w** |
| f | w | **w** |
| f | f | **f** |

**Beispiel**

$A$: $2 + 2 = 4$. (w)
$B$: 169 ist eine Primzahl. (f)
$C$: 169 ist eine Quadratzahl. (w)
$A \vee B$: $2 + 2 = 4$ oder 169 ist eine Primzahl. (w)
$A \vee C$: $2 + 2 = 4$ oder 169 ist eine Quadratzahl. (w)
$B \vee C$: 169 ist eine Primzahl oder eine Quadratzahl. (w)

**Aufgabe**

Ergänzen Sie die fehlenden Wahrheitswerte in der folgenden Wahrheitstafel. Vergleichen Sie anschließend die Wahrheitswerte in den Spalten für $A \wedge (B \vee C)$ und $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \vee C$ | $A \wedge (B \vee C)$ | $A \wedge B$ | $A \wedge C$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | | | | | |
| w | w | f | | | | | |
| w | f | w | | | | | |
| w | f | f | | | | | |
| f | w | w | | | | | |
| f | w | f | | | | | |
| f | f | w | | | | | |
| f | f | f | | | | | |

## Implikation

Sind $A$ und $B$ Aussagen, so wird durch $A \Longrightarrow B$ (gesprochen „aus $A$ folgt $B$“ oder „wenn $A$, dann $B$“) wieder eine Aussage, die Implikation (Folgerung), definiert.
Die Implikation $A \Longrightarrow B$ ist nur dann eine falsche Aussage, wenn $A$ wahr und $B$ falsch ist.
Aus einer wahren kann keine falsche Aussage folgen! Aus einer falschen Aussage kann aber eine wahre Aussage folgen!

**Wahrheitstafel von $A \Longrightarrow B$**

| $A$ | $B$ | $A \Longrightarrow B$ |
|---|---|---|
| w | w | **w** |
| w | f | **f** |
| f | w | **w** |
| f | f | **w** |

## Beispiel

| | |
|---|---|
| $A$: | 2 ist Teiler von 18. (w) |
| $B$: | 4 ist Teiler von 18. (f) |
| $C$: | 8 ist Teiler von 18. (f) |
| $A \Longrightarrow B$: | Wenn 2 Teiler von 18 ist, dann ist 4 Teiler von 18. (f) |
| $B \Longrightarrow A$: | Wenn 4 Teiler von 18 ist, dann ist 2 Teiler von 18. (w) |
| $C \Longrightarrow B$: | Wenn 8 Teiler von 18 ist, dann ist 4 Teiler von 18. (w) |

## Äquivalenz

Sind $A$ und $B$ Aussagen, dann ist $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ ebenfalls eine Aussage, die mit $A \iff B$ (gesprochen „$A$ äquivalent zu $B$“ oder „$A$ genau dann wenn $B$”) abgekürzt wird.
$A \iff B$ ist eine wahre Aussage, wenn $A$ und $B$ die gleichen Wahrheitswerte haben, d. h. entweder beide wahr oder beide falsch sind.
Es geht also um die Gleichwertigkeit des Wahrheitsgehaltes zweier Aussagen.

**Wahrheitstafel von $A \iff B$**

| $A$ | $B$ | $A \Longrightarrow B$ | $B \Longrightarrow A$ | $A \iff B$ |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | **w** |
| w | f | f | w | **f** |
| f | w | w | f | **f** |
| f | f | w | w | **w** |

## Aufgabe

Ergänzen Sie die fehlenden Wahrheitswerte und Aussagen.
$A$: 9 ist Teiler von 21. $B$: 6 ist Teiler von 21. $C$: 3 ist Teiler von 21.

$A \Longrightarrow B$

$A \Longrightarrow C$

$B \Longrightarrow C$

$C \Longrightarrow B$

$A \iff B$

$A \iff C$

$B \iff C$

# 14 Gleichungen und reelle Funktionen

**Äquivalenzumformungen bei Gleichungen**

Die folgenden Umformungen von Gleichungen ergeben äquivalente Gleichungen, d. h. Gleichungen, die dieselbe Lösungsmenge besitzen:

a) Ausmultiplizieren und Zusammenfassen von Termen,

b) auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl oder denselben Term addieren oder subtrahieren,

c) auf beiden Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl oder mit demselben Term ungleich Null multiplizieren,

d) beide Seiten einer Gleichung durch dieselbe Zahl oder denselben Term ungleich Null dividieren.

**Definition**

Seien $\mathbb{D}_f$ und $\mathbb{W}_f$ Teilmengen von $\mathbb{R}$. Eine reelle Funktion $f$ einer reellen Variablen ist eine Zuordnung, die jedem Element aus $\mathbb{D}_f$ eindeutig ein Element aus $\mathbb{W}_f$ zuordnet.
$\mathbb{D}_f$ heißt Definitionsbereich von $f$, $\mathbb{W}_f$ Wertebereich oder Wertevorrat von $f$.
Die Menge der Elemente von $\mathbb{W}_f$, die von $f$ getroffen werden, nennt man Bildmenge oder Bild von $f$. Sie wird mit $f(\mathbb{D}_f)$ bezeichnet, d. h. also

$$f(\mathbb{D}_f) = \{y \in \mathbb{W}_f : y = f(x) \text{ für ein } x \in \mathbb{D}_f\}.$$

Ist $f : \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{W}_f$, $x \mapsto y$, eine Funktion, so ist der Graph die Menge

$$G_f = \{(x; y) : x \in \mathbb{D}_f, y \in \mathbb{W}_f\}.$$

$x$ heißt Argument oder unabhängige Variable, $y$ Funktionswert oder abhängige Variable.

$x \in \mathbb{D}_f$ heißt Nullstelle der Funktion $f$, wenn $f(x) = 0$ gilt. An diesen Stellen schneidet der Graph der Funktion die $x$-Achse.

Wichtig an der Definition einer Funktion ist die Eindeutigkeit der Zuordnung. Nicht jede Gleichung mit zwei Variablen ist eine Funktion.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ beschreibt einen Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 5. Die Kreisgleichung ist keine Funktionsgleichung, da zu jedem $x \in (-5{,}5)$ zwei Werte $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ gehören. Die Zuordnung ist also nicht eindeutig.

Graphisch bedeutet die Eindeutigkeit der Zuordnung, dass jede Parallele zur $y$-Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneiden darf.

# 15 Lineare Gleichungen und Funktionen

**Definition**

Eine lineare Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$ax + b = 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

bzw. jede Gleichung, die sich auf diese Form bringen lässt.

Jede lineare Gleichung besitzt genau eine Lösung $x = -\frac{b}{a}$.

**Beispiel**

Wir bestimmen die Lösungsmenge der Gleichung $4x + 7 = -2x - 5$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} & 4x + 7 = -2x - 5 && \mid +2x - 7 \\ \iff \quad & 6x = -12 && \mid : 6 \\ \iff \quad & x = -2 && \end{aligned}$$

Angabe der Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-2\}$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

a) $3x - 4 = 2$
b) $-\frac{5}{3}x + 4 = -1$
c) $-\frac{1}{2}x - 4 = 7$
d) $45x - 64 = 38 - 6x$
e) $7 \cdot (x - 10) = 2 \cdot (2x - 5)$
f) $4 \cdot (x + 3) - 15 \cdot (1 - x) = 2 \cdot (x + 7)$
g) $(3x - 5) \cdot (2x + 5) = (6x - 4) \cdot (x + 1)$
h) $(x + 6)^2 - (x - 9)^2 = 15$
i) $x^2 + (0{,}3 + x) \cdot (0{,}4 - x) = 3{,}5x - 0{,}05$
j) $(3x - 2) \cdot (4x - 5) = (2x - 1) \cdot (6x - 8)$

**Definition**

Eine lineare Funktion hat die Form

$$y(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Setzt man $x = 0$ in die Gleichung $y(x) = ax + b$ ein, so erhält man $y(0) = b$. Also ist $P(0; b)$ der Schnittpunkt der Geraden mit der $y$-Achse.

$b$ heißt $y$-Achsenabschnitt.

Geht man von $P(0; b)$ ausgehend eine Einheit nach rechts und für $a > 0$ um $a$ Einheiten nach oben bzw. für $a < 0$ um $-a$ Einheiten nach unten, gelangt man zu einem zweiten Punkt $Q(1; a + b)$ der Geraden. $a$ gibt die Steigung der Geraden an.

Da eine Gerade durch zwei verschiedene Punkte eindeutig bestimmt ist, lässt sich mit Hilfe von $P(0; b)$ und $Q(1; a + b)$ die Gerade zeichnen.

**Aufgabe**

Zeichnen Sie die folgenden Geraden.

a) $y = x + 2$ b) $y = x - 3$ c) $y = 2x - 1$ d) $y = -2x + 1$ e) $y = \frac{1}{2}x + 1$ f) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

**Beispiel**

Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Geraden, die durch die Gleichungen $y_1(x) = 2x - 1$ und $y_2(x) = x + 1$ gegeben sind.
Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$2x - 1 = x + 1 \quad \iff \quad x = 2.$$

Durch Einsetzen von $x = 2$ in eine der beiden Geradengleichungen erhalten wir den zugehörigen Wert $y = 3$.
Die Geraden schneiden sich also im Punkt $P(2;3)$ (vgl. Abbildung 6).

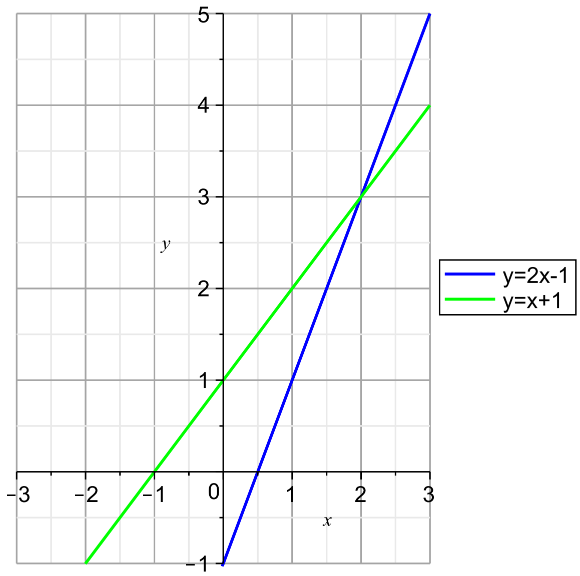



Abbildung 6: Schnittpunkt zweier Geraden

**Aufgabe**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen zeichnerisch.

a) $2x + 1 = x - 4$ b) $4x - 3 = -2x + 3$ c) $\frac{1}{2}x - 2 = -\frac{1}{2}x + 2$ d) $-2x + 3 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

# 16 Quadratische Gleichungen und Funktionen

**Definition**

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

bzw. jede Gleichung, die sich auf diese Form bringen lässt.

Dividiert man eine quadratische Gleichung durch den Koeffizienten $a$ von $x^2$, so erhält man eine quadratische Gleichung in Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \text{ mit } p = \frac{b}{a} \text{ und } q = \frac{c}{a}.$$

**Beispiel**

a) $x^2 = \frac{25}{36} \iff x = \frac{5}{6} \vee x = -\frac{5}{6}$ $\mathbb{L} = \left\{-\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right\}$

b) $x^2 = 11 \iff x = \sqrt{11} \vee x = -\sqrt{11}$ $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{11}; \sqrt{11}\right\}$

c) $x^2 = -4$ besitzt keine reelle Lösung $\mathbb{L} = \{\ \}$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die Lösungsmengen.

a) $x^2 = 64$ b) $x^2 = 13$ c) $x^2 = -25$ d) $2x^2 = 32$

e) $\frac{1}{3}x^2 = 3$ f) $4x^2 = -24$ g) $x^2 - 49 = 0$ h) $-\frac{1}{9}x^2 + 18 = 9$

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
&\text{a) } (x+3)^2 = 25 && \Longleftrightarrow && x+3=5 \lor x+3=-5 && \\
& && \Longleftrightarrow && x=2 \lor x=-8 && \mathbb{L}=\{-8;2\} \\
&\text{b) } x^2-10x+25=36 && \Longleftrightarrow && (x-5)^2=36 && \\
& && \Longleftrightarrow && x-5=6 \lor x-5=-6 && \\
& && \Longleftrightarrow && x=11 \lor x=-1 && \mathbb{L}=\{-1;11\}
\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die Lösungsmengen. Verwenden Sie passende binomische Formeln.

a) $(x+7)^2 = 121$ b) $\frac{1}{2}(x-3)^2 = 50$ c) $\frac{1}{5}(x-18)^2 - 125 = 0$

d) $x^2 - 24x + 144 = 0$ e) $x^2 + 18x + 81 = 0$

**Beispiel**

Lösen quadratischer Gleichungen mit quadratischer Ergänzung.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & && x^2+12x-28=0 && \\
& \Longleftrightarrow && \underbrace{x^2+12x+6^2}_{=(x+6)^2}-6^2-28=0 && \text{quadratische Ergänzung} \\
& \Longleftrightarrow && (x+6)^2-64=0 && \\
& \Longleftrightarrow && [(x+6)+8][(x+6)-8]=0 && \text{3. binomische Formel} \\
& \Longleftrightarrow && x+14=0 \lor x-2=0 && \\
& \Longleftrightarrow && x=-14 \lor x=2 && \mathbb{L}=\{-14;2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad & && 3x^2-22x+35=0 && \\
& \Longleftrightarrow && x^2-\frac{22}{3}x+\frac{35}{3}=0 && \text{Normalform!} \\
& \Longleftrightarrow && \underbrace{x^2-\frac{22}{3}x+\left(\frac{11}{3}\right)^2}_{=\left(x-\frac{11}{3}\right)^2}-\left(\frac{11}{3}\right)^2+\frac{35}{3}=0 && \text{quadratische Ergänzung} \\
& \Longleftrightarrow && \left(x-\frac{11}{3}\right)^2-\frac{16}{9}=0 && \\
& \Longleftrightarrow && \left[\left(x-\frac{11}{3}\right)+\frac{4}{3}\right]\left[\left(x-\frac{11}{3}\right)-\frac{4}{3}\right]=0 && \text{3. binomische Formel} \\
& \Longleftrightarrow && x-\frac{7}{3}=0 \lor x-5=0 && \\
& \Longleftrightarrow && x=\frac{7}{3} \lor x=5 && \mathbb{L}=\left\{\frac{7}{3};5\right\}
\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Lösen Sie die quadratischen Gleichungen mit Hilfe quadratischer Ergänzung. Bringen Sie, falls nötig, die Gleichung zuerst auf Normalform.

| | | |
|---|---|---|
| a) $x^2+2x-63=0$ | b) $x^2-17x+60=0$ | c) $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$ |
| d) $x^2+6x=91$ | e) $x^2-3{,}4x+2{,}8=0$ | f) $x^2-11x=-10$ |
| g) $91x^2-2x=45$ | h) $2x^2+3x-35=0$ | i) $14x^2-71x-33=0$ |

**Die $pq$-Formel**

Im Folgenden leiten wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung eine allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen in Normalform her.

$$\begin{aligned}
x^2+px+q=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \underbrace{x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2}_{=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)=0\\
&\Longleftrightarrow \quad \left[\left(x+\frac{p}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right]\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right]=0\\
&\Longleftrightarrow \quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge hängt vom Vorzeichen von $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ ab.

$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$: zwei verschiedene reelle Lösungen, $\mathbb{L}=\left\{-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right\}$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$: eine (doppelte) reelle Lösung, $\mathbb{L}=\left\{-\frac{p}{2}\right\}$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$: keine reelle Lösung, $\mathbb{L}=\{\quad\}$

Die Formel $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ zum Lösen quadratischer Gleichungen $x^2+px+q=0$ in Normalform heißt $pq$-Formel.

**Beispiel**

$$\begin{aligned}
\text{a) } x^2-8x-9=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x=4\pm\sqrt{16+9} && \text{Hier ist } p=-8 \text{ und } q=-9.\\
&\Longleftrightarrow \quad x=4\pm5\\
&\Longleftrightarrow \quad x=-1\vee x=9 && \mathbb{L}=\{-1;9\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } 2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad &\iff \quad x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 && \text{Normalform!}\\
&\iff \quad x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}} && \text{Hier ist } p = -\frac{3}{2} \text{ und } q = \frac{1}{2}.\\
&\iff \quad x = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} &&\\
&\iff \quad x = \frac{1}{2} \vee x = 1 && \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}
\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge mit Hilfe der $pq$-Formel. Bringen Sie, falls nötig, die Gleichung zuerst auf Normalform.

| | | |
|---|---|---|
| a) $x^2 - 7x + 3 = 0$ | b) $x^2 - 7x + 15 = 0$ | c) $2x^2 - 3x + 8 = 0$ |
| d) $\frac{1}{2}x^2 + 6x + 18 = 0$ | e) $x^2 - 8x = -10$ | f) $4x^2 - 44x + 105 = 0$ |
| g) $(x-5)(x+7) = 45$ | h) $(x-8)(x-3) = 1{,}4x$ | i) $(2x-3)(3x-2) = 5(x^2-6)$ |

**Definition**

Eine quadratische Funktion hat die Form

$$y(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

**Aufgabe**

Erstellen Sie für die folgenden quadratischen Funktionen Wertetabellen, und zeichnen Sie die Graphen im Koordinatensystem.

| | | |
|---|---|---|
| a) $f(x) = x^2$ | b) $f(x) = 2x^2$ | c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ |
| d) $f(x) = -x^2$ | e) $f(x) = x^2 - 2$ | f) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ |

Den Graphen einer quadratischen Funktion nennt man (quadratische) Parabel.
Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet.
Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.

Den tiefsten bzw. höchsten Punkt einer Parabel nennt man Scheitelpunkt.
Die Scheitelpunktform

$$y(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

erhält man mit Hilfe der quadratischen Ergänzung. Der Scheitelpunkt ist $S(x_0; y_0)$.

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion sind diejenigen Werte für $x$, für die $y(x) = 0$ gilt. Es sind genau die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

**Beispiel**

Wir untersuchen die quadratische Funktion $y(x) = x^2 - 3x + 2$.

Berechnen der Nullstellen:

$$\begin{aligned}
y(x) = 0 \quad &\iff \quad x^2 - 3x + 2 = 0\\
&\iff \quad x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}\\
&\iff \quad x = 1 \vee x = 2
\end{aligned}$$

Die Funktion besitzt Nullstellen bei $x = 1$ und bei $x = 2$.

Bestimmung der Scheitelpunktform:

$$y(x) = x^2 - 3x + \left(\mathbf{\frac{3}{2}}\right)^{\mathbf{2}} - \left(\mathbf{\frac{3}{2}}\right)^{\mathbf{2}} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Der Scheitelpunkt ist $S\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. Da der Koeffizient von $x^2$ positiv ist, ist dies der tiefste Punkt der Parabel.

Wertetabelle

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(x)$ | $12$ | $6$ | $2$ | $0$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ | $2$ | $6$ |

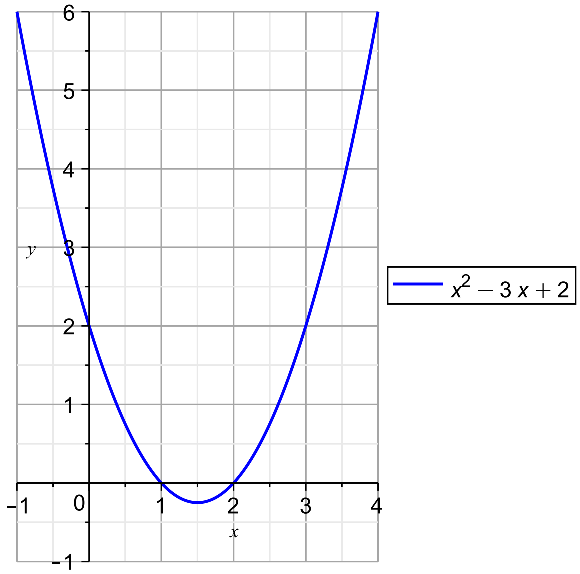



Abbildung 7: Graph der quadratischen Funktion $y(x) = x^2 - 3x + 2$

**Aufgabe**

Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen.

$$y_1(x) = x^2 + x - 6 \quad y_2(x) = -x^2 + 3x + 4 \quad y_3(x) = x^2 - 2x + 1 \quad y_4(x) = -x^2 - 4x - 5$$

a) Berechnen Sie für jede Funktion die Nullstellen.

b) Bestimmen Sie jeweils die Scheitelpunktform.

c) Erstellen Sie für jede Funktion eine Wertetabelle.

d) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen.

# 17 Polynome

Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Funktionen, den Polynomen.

**Definition**

Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Polynom vom Grad $n$.
Die Konstanten $a_0, a_1, \dots, a_n$ heißen Koeffizienten des Polynoms. Der Koeffizient $a_n$ der höchsten vorkommenden Potenz von $x$ heißt Leitkoeffizient oder führender Koeffizient.
Weiter definiert man $p(x) = 0$ als das Nullpolynom.

**Beispiel**

$p(x) = -5x^7 + 3x^2 - 6$ ist ein Polynom vom Grad 7 mit den Koeffizienten $a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, $a_0 = -6$, $a_2 = 3$ und $a_7 = -5$.

**Aufgabe**

Welche der folgenden Funktionen sind Polynome? Wenn es sich um ein Polynom handelt, bestimmen Sie den Grad des Polynoms, die Koeffizienten und den Leitkoeffizienten.

a) $p(x) = 8x^4 + 5x^3 - 2x$ b) $p(x) = x^2 - 25x^4 + 8$

c) $p(x) = 2x^3 + x^{\frac{1}{2}} - 3$ d) $p(x) = 5(x-1)(x+1)(x-2)$

# 18 Polynomdivision und Faktorisierung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Faktorisierung von Polynomen, d. h. der Darstellung von Polynomen als Produkte linearer und quadratischer Terme.

**Beispiel**

Gegeben sei das Polynom

$$p_3(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Durch Probieren finden wir $p_3(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 = 0$.
Wir dividieren das Polynom durch $(x - (-1)) = (x + 1)$.

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^3 & - & 4x^2 & + & x & + & 6) & : (x+1) = \underbrace{x^2 - 5x + 6}_{=p_2(x)} \\
x^3 & + & x^2 & & & & & \\
\hline
 & & -5x^2 & + & x & & & \\
 & & -5x^2 & - & 5x & & & \\
\hline
 & & & & 6x & + & 6 & \\
 & & & & 6x & + & 6 & \\
\hline
 & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Also gilt $p_3(x) = (x+1) \cdot p_2(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$.

Die Nullstellen der quadratischen Funktion $p_2(x) = x^2 - 5x + 6$ berechnen wir mit der $pq$-Formel zu $x = 2$ und $x = 3$ . Damit gilt $p_2(x) = (x - 2) \cdot (x - 3)$, insgesamt also

$$p_3(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3).$$

Man nennt dies auch die vollständige Faktorisierung des Polynoms.

**Beispiel**

Gegeben sei das Polynom

$$p_3(x) = 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18.$$

Durch Probieren finden wir $p_3(3) = 2 \cdot 3^3 - 13 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 - 18 = 0$.
Wir dividieren das Polynom durch $(x - 3)$.

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
(2x^3 & - & 13x^2 & + & 27x & - & 18) & : (x-3) = \underbrace{2x^2 - 7x + 6}_{=p_2(x)} \\
2x^3 & - & 6x^2 & & & & & \\
\hline
 & & -7x^2 & + & 27x & & & \\
 & & -7x^2 & + & 21x & & & \\
\hline
 & & & & 6x & - & 18 & \\
 & & & & 6x & - & 18 & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Also gilt $p_3(x) = (x - 3) \cdot p_2(x) = (x - 3)(2x^2 - 7x + 6)$.
Die Nullstellen der quadratischen Funktion $p_2(x) = 2x^2 - 7x + 6$ berechnen wir mit der $pq$-Formel zu $x = \frac{3}{2}$ und $x = 2$ . Damit gilt $p_2(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x - 2)$, insgesamt also

$$p_3(x) = 2(x - 3) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x - 2).$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die vollständigen Faktorisierungen der folgenden Polynome. Gehen Sie dabei so vor wie in den Beispielen.

a) $p_3(x) = x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 5x - 4$, $p_3(-4) = 0$

b) $p_3(x) = x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{23}{4}x + \frac{3}{2}$, $p_3\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

c) $p_3(x) = x^3 - \frac{7}{4}x + \frac{3}{4}$, $p_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

d) $p_3(x) = 2x^3 - 14x - 12$, $p_3(-2) = 0$

e) $p_3(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 6$, $p_3(2) = 0$

f) $p_3(x) = x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{47}{3}x - 5$, $p_3\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

g) $p_3(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$, $p_3(2) = 0$

h) $p_3(x) = x^3 - 2ax^2 + 2a^2x - a^3$, $p_3(a) = 0$

# 19 Das Hornerschema

Die Auswertung eines Polynoms $p(x)$ in der Darstellung $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ an einer festen Stelle $x_0$ erfordert viele Rechenoperationen ($2n - 1$ Multiplikationen und $n$ Additionen). Verwendet man statt dessen die sogenannte Horner-Darstellung, so benötigt man

nur $n$ Multiplikationen und $n$ Additionen.
Die Horner-Darstellung ergibt sich durch fortgesetztes Ausklammern.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= (a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) \cdot \mathbf{x} + a_0 \\ &= ((a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + a_2) \cdot \mathbf{x} + a_1) \cdot x + a_0 \\ &= \cdots \\ &= (\ldots((a_n x + a_{n-1}) \cdot \mathbf{x} + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0 \end{aligned}$$

**Beispiel**

Wir leiten für $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12$ die Horner-Darstellung her.

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12 \\ &= [2x^2 + 4x - 10]\mathbf{x} - 12 \\ &= [(2x + 4)\mathbf{x} - 10]x - 12 \end{aligned}$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die Horner-Darstellungen der folgenden Polynome.

a) $p(x) = 7x^3 - 4x^2 + 8x - 9$ b) $p(x) = 8x^5 + 7x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 2x + 3$

Um $p(x_0)$ an einer festen Stelle $x_0$ zu berechnen, verwendet man die Horner-Darstellung und rechnet „von innen nach außen“ die Klammern aus. Dies stellt man im Hornerschema dar.

$$\begin{array}{c|cccccc} a_k & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

1. Die Koeffizienten von $p(x)$ werden in die erste Zeile des Hornerschemas geschrieben.

$$\begin{array}{c|cccccc} a_k & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ x_0 & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

2. Notieren der Stelle $x_0$, an der das Polynom ausgewertet werden soll.

$$\begin{array}{c|cccccc} a_k & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ x_0 & 0 & & & & & \\ \hline & c_{n-1} & & & & & \end{array}$$

3. Das Schema wird schrittweise von links nach rechts ausgefüllt.
a) Unter $a_n$ schreiben wir 0 und addieren die Werte in der ersten Spalte. Notieren des Ergebnisses $c_{n-1}$.

$$\begin{array}{c|cccccc} a_k & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ x_0 & 0 & c_{n-1} \cdot x_0 & & & & \\ \hline & c_{n-1} & c_{n-2} & & & & \end{array}$$

b) $c_{n-1} \cdot x_0$ wird unter $a_{n-1}$ geschrieben. Die Werte der zweiten Spalte werden addiert. Notieren des Ergebnisses $c_{n-2}$.

$$\begin{array}{c|ccccc} a_k & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \\ x_0 & 0 & c_{n-1} \cdot x_0 & c_{n-2} \cdot x_0 & \ldots & c_0 \cdot x_0 \\ \hline & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \ldots & \mathbf{p(x_0)} \end{array}$$

Schritt b) wird nun analog für die dritte Spalte, vierte Spalte etc. durchgeführt, bis man in der letzten Spalte angekommen ist.

In der letzten Spalte rechts unten steht dann das Ergebnis $\mathbf{p(x_0)}$.

Außerdem gilt

$$p(x) = (x - x_0) \cdot (c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots c_1 x + c_0) + p(x_0).$$

**Beispiel**

Gegeben ist das Polynom

$$p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12 = [(2x + 4)x - 10]x - 12.$$

Mit dem Hornerschema berechnen wir $p(3)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_k$ | 2 | 4 | −10 | −12 |
| $x_0 = 3$ | 0 | | | |
| | 2 | | | |

Koeffizienten von $p(x)$ in die erste Zeile des Hornerschemas schreiben; $x_0 = 3$ notieren; 0 in die erste Spalte unter den Leitkoeffizienten schreiben; Summe in der ersten Spalte bilden.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_k$ | 2 | 4 | −10 | −12 |
| $x_0 = 3$ | 0 | 6 | | |
| | 2 | 10 | | |

Das Ergebnis der ersten Spalte mit $x_0 = 3$ multiplizieren und in die zweite Spalte unter den Koeffizienten 4 schreiben; Summe in der zweiten Spalte bilden.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_k$ | 2 | 4 | −10 | −12 |
| $x_0 = 3$ | 0 | 6 | 30 | |
| | 2 | 10 | 20 | |

Das Ergebnis der zweiten Spalte mit $x_0 = 3$ multiplizieren und in die dritte Spalte unter den Koeffizienten $-10$ schreiben; Summe in der dritten Spalte bilden.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_k$ | 2 | 4 | −10 | −12 |
| $x_0 = 3$ | 0 | 6 | 30 | 60 |
| | 2 | 10 | 20 | **48** |

Das Ergebnis der dritten Spalte mit $x_0 = 3$ multiplizieren und in die vierte Spalte unter den Koeffizienten $-12$ schreiben; Summe in der dritten Spalte bilden.

Rechts unten im Schema steht das Ergebnis $\mathbf{p(3) = 48}$.
Für $p(x)$ ergibt sich außerdem die Darstellung

$$p(x) = (x - 3) \cdot (2x^2 + 10x + 20) + 48.$$

**Aufgabe**

a) Berechnen Sie für $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ mit Hilfe des Hornerschemas die Werte $p(2)$, $p(3)$ und $p(-1)$.
Geben Sie auch jeweils die Darstellung der Form $p(x) = (x - x_0)(c_2x^2 + c_1x + c_0) + p(x_0)$ an.

b) Berechnen Sie für $p(x) = 4x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 8x + 9$ mit Hilfe des Hornerschemas die Werte $p\left(\frac{1}{2}\right)$ und $p\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Geben Sie auch jeweils die Darstellung der Form
$p(x) = (x - x_0)(c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0) + p(x_0)$ an.

# 20 Nullstellen und Faktorisierung von Polynomen

Bei der Untersuchung von Polynomen ist es wichtig, etwas über die Anzahl und Lage der Nullstellen zu ermitteln. Das folgende Ergebnis ist dabei nützlich.

**Satz**

Sei $p_n(x)$ ein Polynom vom Grad $n$. Dann gilt:

a) $p_n(x)$ hat höchstens $n$ verschiedene reelle Nullstellen.

b) Ist $p_n(x_0) = 0$, so gilt
$$p_n(x) = (x - x_0) \cdot p_{n-1}(x)$$
mit einem Polynom $p_{n-1}$ vom Grad $n-1$.

Das Polynom $p_{n-1}$ erhält man durch Polynomdivision $p_n(x) : (x - x_0) = p_{n-1}(x)$ oder mit Hilfe der Ergebniszeile des zugehörigen Hornerschemas. Ist also $p_n(x_0) = 0$, dann ist

$$p(x) = (x - x_0) \cdot (c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots c_1 x + c_0).$$

Mit $p_{n-1}(x)$ verfährt man dann analog. Ist $p_{n-1}(x_1) = 0$, dann ist

$$p(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot p_{n-2}(x)$$

mit einem Polynom $p_{n-2}$ vom Grad $n-2$.

**Beispiel**

Sei $p_3(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12$. Es gilt $p_3(-1) = 0$.
Hornerschema für $x_0 = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrrl} a_k & 2 & 4 & -10 & -12 & \\ x_0 = -1 & 0 & -2 & -2 & 12 & \\ \hline & 2 & 2 & -12 & 0 & = p_3(-1) \end{array}$$

Also gilt
$$p_3(x) = (x+1) \cdot (2x^2 + 2x - 12).$$

Die Nullstellen von $p_2(x) = 2(x^2 + x - 6)$ ermittelt man mit der $pq$-Formel zu $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$. Damit erhält man insgesamt die Faktorisierung des Polynoms

$$p_3(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x-2).$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie wie im Beispiel zu den folgenden Polynomen die Faktorisierungen.

a) $p_3(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$ mit $p_3(3) = 0$

b) $p_3(x) = 30x^3 + 23x^2 - 2x - 3$ mit $p_3\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

c) $p_3(x) = x^3 - 5x^2 + x - 5$ mit $p_3(5) = 0$

Polynome lassen sich stets als Produkte von Linearfaktoren und quadratischen Termen, die keine reellen Nullstellen besitzen, darstellen.

**Satz**

Sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad $n$. Dann lässt sich $p(x)$ eindeutig als Produkt von Linearfaktoren $(x-x_i)$ mit reellen Nullstellen $x_i$ und irreduziblen quadratischen Faktoren $(x^2+p_kx+q_k)$ mit $\left(\frac{p_k}{2}\right)^2 - q_k < 0$ darstellen. Genauer ist

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)\cdot(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\cdots(x^2+p_lx+q_l) \\ &= a_n\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)\prod_{j=1}^{l}(x^2+p_jx+q_j) \text{ mit } m+2l=n. \end{aligned}$$

Wichtig ist nun die Beantwortung der Frage: Wie kommt man an Nullstellen eines Polynoms?
Für Polynome vom Grad 2 liefert die $pq$-Formel die Nullstellen.
Für Polynome vom Grad 3 und 4 gibt es komplizierte Formeln.
Für Polynome vom Grad 5 oder höher gibt es keine allgemeinen Formeln.

Für Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten gibt es eine Möglichkeit ganzzahlige und rationale Nullstellen zu bestimmen. Wie dies funktionieren kann, überlegen wir zunächst an einem Beispiel.

**Beispiel**

Sei $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Wenn $p(x)$ eine Nullstelle $x_1 \in \mathbb{Z}$ besitzt, dann gilt

$$\begin{aligned} x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 + 6 = 0 &\iff x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 = -6 \\ &\iff x_1(x_1^2 - 4x_1 + 1) = -6. \end{aligned}$$

Wenn $x_1 \in \mathbb{Z}$ ist, dann ist auch $x_1^2 - 4x_1 + 1 \in \mathbb{Z}$. Also muss $x_1$ Teiler von $-6$ sein, d. h. $\pm1$, $\pm2$ oder $\pm3$.
Diese Teiler werden nun in $p(x)$ eingesetzt und geprüft, ob es sich um Nullstellen handelt.
Es ist $p(-1) = 0$. Mit Polynomdivision oder mit Hilfe des Hornerschemas erhält man

$$p(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6).$$

Die Nullstellen von $x^2 - 5x + 6$ ermittelt man mit der $pq$-Formel zu 2 und 3.
Insgesamt erhält man die vollständige Faktorisierung

$$p(x) = (x+1)(x-2)(x-3).$$

Allgemein gilt folgende Aussage zu ganzzahligen bzw. rationalen Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten.

**Satz**

Sei $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Dann gilt

a) Ist $p(x_0) = 0$ mit $x_0 \in \mathbb{Z}$, dann teilt $x_0$ die Konstante $a_0$, d. h. wenn es ganzzahlige Nullstellen gibt, so sind diese Teiler des Absolutgliedes $a_0$.

b) Ist $p\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ mit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a$, $b$ teilerfremd, so ist $a$ Teiler von $a_0$ und $b$ Teiler von $a_n$.

**Beispiel**

Wir bestimmen die vollständige Faktorisierung von $p(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 16x - 12$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-1$ | $-9$ | 5 | 16 | $-12$ |
| $x = 1$ | 0 | 1 | 0 | $-9$ | $-4$ | 12 |
| | 1 | 0 | $-9$ | $-4$ | 12 | 0 |
| $x = 1$ | 0 | 1 | 1 | $-8$ | $-12$ | |
| | 1 | 1 | $-8$ | $-12$ | 0 | |
| $x = -2$ | 0 | $-2$ | 2 | 12 | | |
| | 1 | $-1$ | $-6$ | 0 | | |

$$\Longrightarrow p(x) = (x-1)(x^4 - 9x^2 - 4x + 12)$$

$$\Longrightarrow p(x) = (x-1)^2(x^3 + x^2 - 8x - 12)$$

$$\Longrightarrow p(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2 - x - 6)$$

Die Nullstellen von $x^2 - x - 6$ sind 3 und $-2$. Also erhalten wir insgesamt die vollständige Faktorisierung

$$p(x) = (x-1)^2(x+2)^2(x-3).$$

**Beispiel**

Sei $p(x) = 3x^3 - x^2 + 6x - 2$.
Die Teiler des Absolutgliedes sind $\pm 1$ und $\pm 2$.
Es gilt $p(1) = 6$, $p(-1) = -12$, $p(2) = 30$ und $p(-2) = -42$.
Das Polynom besitzt also keine ganzzahligen Nullstellen.
Wir prüfen nun mögliche Kandidaten $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ mit $a$ Teiler von $a_0$ Teiler von $-2$, $b$ Teiler von 3 mit $a$, $b$ teilerfremd, d. h. $\pm\frac{1}{3}$ und $\pm\frac{2}{3}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | $-1$ | 6 | $-2$ |
| $x = \frac{1}{3}$ | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | 3 | 0 | 6 | 0 |

$$\Longrightarrow p(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 6) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x^2 + 2)$$

Da $x^2 + 2$ irreduzibel ist, d. h. keine reellen Nullstellen besitzt, ist die vollständige Faktorisierung

$$p(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x^2 + 2).$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die vollständigen Faktorisierungen der folgenden Polynome.

a) $p(x) = 3x^3 + 4x^2 - 28x + 16$

b) $p(x) = 3x^4 - 32x^3 + 85x^2 - 52x - 28$

c) $p(x) = 140x^4 - 132x^3 + 23x^2 + 6x - 1$

**Aufgabe**

Für alle, denen die anderen Aufgaben zu einfach sind!
Bestimmen Sie die vollständige Faktorisierung von $p(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{14}{3}x + 6$.
Hier sind die Koeffizienten nicht ganzzahlig!
Wie kann man hier trotzdem, ähnlich wie bei den anderen Aufgaben, die Nullstellen ermitteln?

# 21 Polynomungleichungen

Mit Hilfe von vollständigen Faktorisierungen lassen sich nun auch Polynomungleichungen lösen, wenn man dabei folgende Aussage berücksichtigt: Zwischen zwei benachbarten Nullstellen ändert sich das Vorzeichen eines Polynoms nicht.

**Beispiel**

Sei $p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$. Wir bestimmen die Mengen $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \leq 0\}$ und $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\}$. Mit Hilfe des Hornerschemas kann man die vollständige Faktorisierung des Polynoms bestimmen. Es gilt

$$p(x) = (x-1)^2(x+3)(x-2).$$

Damit erstellt man nun eine Vorzeichentabelle für die einzelnen Faktoren auf den durch die Nullstellen des Polynoms begrenzten Intervallen.

| $x$ | | $-3$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)^2$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(x+3)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x-2)$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $p(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Daraus lassen sich nun die Mengen $M_1$ und $M_2$ ablesen.

$$M_1 = [-3; 2], \quad M_2 = (-\infty; -3) \cup (2; \infty) = \mathbb{R} \backslash [-3; 2]$$

**Aufgabe**

a) Sei $p(x) = 3x^3 + 4x^2 - 28x + 16$. Es gilt $p(x) = 3(x-2) \cdot \left(x - \dfrac{2}{3}\right) \cdot (x+4)$.
Bestimmen Sie die Mengen $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) < 0\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0\}$.

b) Sei $p(x) = 3x^4 - 32x^3 + 85x^2 - 52x - 28$. Es gilt $p(x) = 3(x-2)^2 \cdot (x-7) \cdot \left(x + \dfrac{1}{3}\right)$.
Bestimmen Sie die Mengen $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\}$.

c) Sei $p(x) = 140x^4 - 132x^3 + 23x^2 + 6x - 1$.
Es gilt $p(x) = 140\left(x + \dfrac{1}{5}\right) \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \dfrac{1}{7}\right)$.
Bestimmen Sie die Mengen $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) < 0\}$.

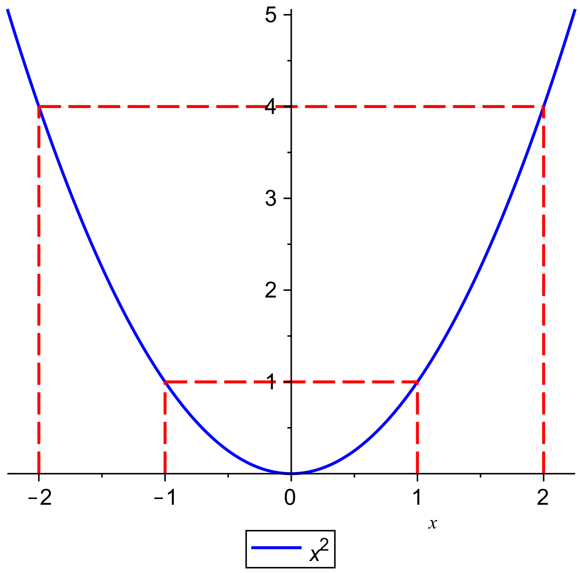
**Aufgabe**

a) Sei $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Bestimmen Sie die vollständige Faktorisierung von $p(x)$ und die Mengen $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \leq 0\}$.

b) Sei $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 10$. Für welche x $\in \mathbb{R}$ gilt $p(x) < 4$?

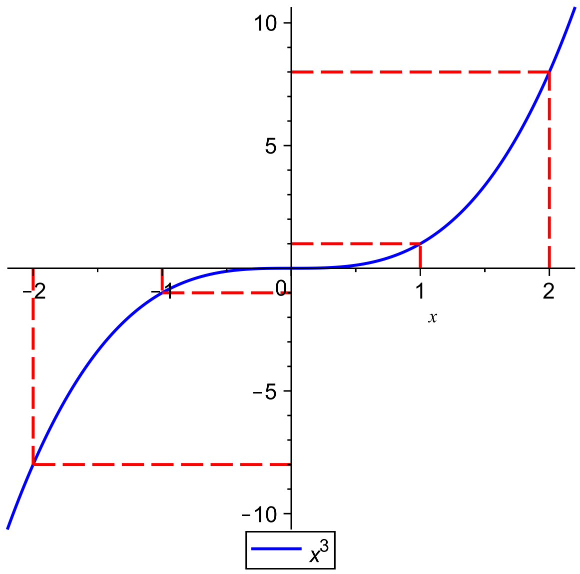
## 22 Symmetrieeigenschaften von Funktionen

Wir betrachten zunächst zwei einfache Beispiele.




Die Funktionswerte für $x = 1$ und $x = -1$ sind gleich: $f(1) = f(-1) = 1$
Die Funktionswerte für $x = 2$ und $x = -2$ sind gleich: $f(2) = f(-2) = 4$
Allgemein gilt für alle $x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$:
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur $y$-Achse.

Abbildung 8: Symmetrie zur $y$-Achse




Die Funktionswerte für $x = 1$ und $x = -1$ haben gleichen Betrag aber verschiedene Vorzeichen: $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, also $f(-1) = -f(1)$
Die Funktionswerte für $x = 2$ und $x = -2$ haben gleichen Betrag aber verschiedene Vorzeichen: $f(-2) = -8$, $f(2) = 8$, also $f(-2) = -f(2)$
Allgemein gilt für alle $x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$:
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
Der Graph der Funktion ist symmetrisch zum Ursprung $(0; 0)$.

Abbildung 9: Symmetrie zum Ursprung

**Definition**

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) $f(x)$ heißt gerade, wenn gilt:
(i) $x \in \mathbb{D}_f \Longrightarrow -x \in \mathbb{D}_f$ (ii) $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$

b) $f(x)$ heißt ungerade, wenn gilt:
(i) $x \in \mathbb{D}_f \Longrightarrow -x \in \mathbb{D}_f$ (ii) $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$

Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur $y$-Achse. Der Graph einer ungeraden Funktion ist symmetrisch zum Ursprung $(0; 0)$.

**Beispiel**

a) Sei $f(x) = 4x^7 + 2x^3 - 25x$.
Da $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, gilt $x \in \mathbb{D}_f \Longrightarrow -x \in \mathbb{D}_f$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^7 + 2(-x)^3 - 25(-x) \\ &= -4x^7 - 2x^3 + 25x \\ &= -(4x^7 + 2x^3 - 25x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Somit ist $f(x)$ ungerade und der Graph ist symmetrisch zum Ursprung.

b) Sei $f(x) = x^{100} + 20x^{50} - x^2 + 2$.
Da $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, gilt $x \in \mathbb{D}_f \Longrightarrow -x \in \mathbb{D}_f$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^{100} + 20(-x)^{50} - (-x)^2 + 2 \\ &= x^{100} + 20x^{50} - x^2 + 2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Somit ist $f(x)$ gerade und der Graph ist symmetrisch zur $y$-Achse.

c) Sei $f(x) = 2x^{17} + x^2$.
Da $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, gilt $x \in \mathbb{D}_f \Longrightarrow -x \in \mathbb{D}_f$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^{17} + (-x)^2 \\ &= -2x^{17} + x^2. \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist daher $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$. Somit ist $f(x)$ weder gerade noch ungerade. Der Graph ist nicht symmetrisch zum Ursprung oder zur $y$-Achse.

Aus den Beispielen kann man folgenden Sachverhalt erkennen.

**Satz**

Sei $p(x)$ ein Polynom. Dann gilt:

a) Sind alle Potenzen gerade, dann ist $p(x)$ gerade und der Graph ist symmetrisch zur $y$-Achse,

b) sind alle Potenzen ungerade, dann ist $p(x)$ ungerade und der Graph ist symmetrisch zum Ursprung.

**Beispiel**

Sei $f(x) = x^2 + |x|$.
Da $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, gilt $x \in \mathbb{D}_f \Longrightarrow -x \in \mathbb{D}_f$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + |-x| \\ &= x^2 + |x| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Somit ist $f(x)$ gerade und der Graph ist symmetrisch zur $y$-Achse.

**Aufgabe**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade sind.

a) $f_1(x) = x^{18} - 5x^{16} + 3x^3 + 7x^2 - 100$ b) $f_2(x) = x^{11} - 5x^7 + 13x$
c) $f_3(x) = x^8 - x^4 + x^2 - 1$ d )$f_4(x) = |x^3 - x|$ e )$f_5(x) = |x^3| - |x|$

In der folgenden Aufgabe sollen Symmetrieeigenschaften von zusammengesetzten Funktionen untersucht werden.

**Aufgabe**

Zeigen Sie:

a) Sind $f(x)$ und $g(x)$ gerade Funktionen, dann sind auch $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ und $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ gerade Funktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

b) Sind $f(x)$ und $g(x)$ ungerade Funktionen, dann sind $f(x)+g(x)$ und $f(x)-g(x)$ ungerade Funktionen, $f(x) \cdot g(x)$ und $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ gerade Funktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

c) Ist $f(x)$ eine gerade und $g(x)$ eine ungerade Funktion, dann sind $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ und $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ ungerade Funktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

# 23 Einige Textaufgaben

Bei den folgenden Textaufgaben sollen aus den jeweiligen Angaben zu Nullstellen, Symmetrieeigenschaften, etc. Polynome vom angegebenen Grad bestimmt werden. Es müssen also die Koeffizienten bestimmt werden.

**Beispiel**

Gesucht ist dasjenige Polynom vom Grad 3, dessen Graph symmetrisch zum Ursprung ist, die $x$-Achse an der Stelle $x = -2$ schneidet und durch den Punkt $P(3; 15)$ verläuft.

Ein Polynom vom Grad 3 hat die Form

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Da der Graph symmetrisch zum Ursprung sein soll, muss $p(x)$ ungerade sein, d. h. es kommen nur ungerade Potenzen vor. Also gilt $a_2 = a_0 = 0$ und

$$p(x) = a_3x^3 + a_1x.$$

Da der Graph die $x$-Achse an der Stelle $x = -2$ schneidet, ergibt sich $p(-2) = 0$, d. h. $-8a_3 - 2a_1 = 0$.
Mit dem Punkt $P(3; 15)$ erhält man $27a_3 + 3a_1 = 15$.
Wir haben also zwei Gleichungen für die Koeffizienten $a_1$ und $a_3$. Die Lösungen sind $a_1 = -4$ und $a_3 = 1$.
Insgesamt haben wir also $a_0 = 0$, $a_1 = -4$, $a_2 = 0$ und $a_3 = 1$.
Das gesuchte Polynom ist $p(x) = x^3 - 4x$.

**Aufgabe**

a) Bestimmen Sie das Polynom dritten Grades, das an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ Nullstellen besitzt und dessen Graph durch den Punkt $P(-2; 10)$ verläuft.

b) Gesucht ist das Polynom vom Grad 2, das in $S(1; -2)$ seinen Scheitelpunkt besitzt und die $y$-Achse im Punkt $P(0; 3)$ schneidet.
Hinweis: Wiederholen Sie die Scheitelpunktform für quadratische Funktionen.

c) Bestimmen Sie alle Polynome vom Grad 4 mit den folgenden Eigenschaften.
Der Graph ist symmetrisch zur $y$-Achse und das Polynom besitzt Nullstellen bei $x = 1$ und $x = -2$.

# 24 Rationale Funktionen

**Definition**

Seien $p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ Polynome mit $a_m \neq 0$ und $b_n \neq 0$. Dann heißt

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ rationale Funktion.}$$

$h(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, außer an den Nullstellen von $q(x)$, d. h.

$$\mathbb{D}_h = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}.$$

Stellen, an denen $q(x) = 0$ ist, heißen Definitionslücken.
Ist der Grad $n$ des Nennerpolynoms größer als der Grad $m$ des Zählerpolynoms, so spricht man von einer echt gebrochen rationalen Funktion.
$h(x)$ besitzt Nullstellen an allen Stellen $x_0$, für die $p(x_0) = 0$ und $q(x_0) \neq 0$ gilt.

**Beispiel**

Wir untersuchen die Funktion $h(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 + x - 2}$.

a) Bestimmung des Definitionsbereichs: Dazu müssen wir die Nullstellen des Nennerpolynoms $q(x) = x^2 + x - 2$ bestimmen. Diese lassen sich mit der $pq$-Formel zu $x = -2$ und $x = 1$ bestimmen.
Also folgt $\mathbb{D}_h = \mathbb{R} \backslash \{-2; 1\}$.

b) Bestimmung der Nullstellen: Dazu müssen wir die Nullstellen des Zählerpolynoms $p(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$ bestimmen. Durch Ausklammern von $x$ und Verwenden der $pq$-Formel erhält man

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 8x = 0 &\iff x(x^2 + 2x - 8) = 0 \\ &\iff x_1 = 0 \wedge x_2 = -4 \wedge x_3 = 2. \end{aligned}$$

Da $x_1$, $x_2$ und $x_3$ im Definitionsbereich von $h(x)$ enthalten sind, folgt, dass $x_1 = 0$, $x_2 = -4$ und $x_3 = 2$ Nullstellen von $h(x)$ sind.

c) Untersuchung des Symmetrieverhaltens: Da $\mathbb{D}_h = \mathbb{R} \backslash \{-2; 1\}$ ist, gilt z. B. $2 \in \mathbb{D}_h$ aber $-2 \notin \mathbb{D}_h$. Die Funktion ist also weder gerade noch ungerade.

**Aufgabe**

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich und die Nullstellen. Untersuchen Sie auch das Symmetrieverhalten.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^4 - 13x^2 + 36}$ b) $g(x) = \dfrac{x^3 - 36x}{x^4 - 5x^2 + 4}$ c) $h(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{8x^2 + 10x - 3}$

# 25 Verhalten im Bereich von Definitionslücken

Das Verhalten von Funktionen im Bereich von Definitionslücken werden wir noch genauer untersuchen, wenn wir Grenzwerte behandelt haben.
An einer Definitionslücke können sogenannte Polstellen auftreten. Dies sind Stellen, an denen das Nennerpolynom eine Nullstelle besitzt, das Zählerpolynom an dieser Stelle aber von Null verschieden ist.

**Beispiel**

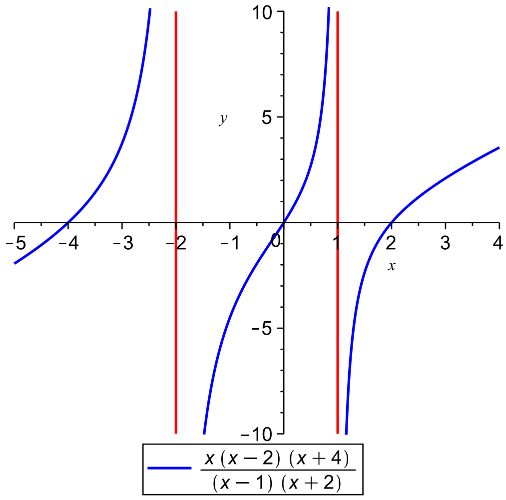



Abbildung 10: Polstellen mit VZW

An den Stellen $x = -2$ und $x = 1$ besitzt die Funktion $f(x) = \dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$ Polstellen mit Vorzeichenwechsel.
Die Parallelen $x = -2$ und $x = 1$ zur $y$-Achse heißen Asymptoten.

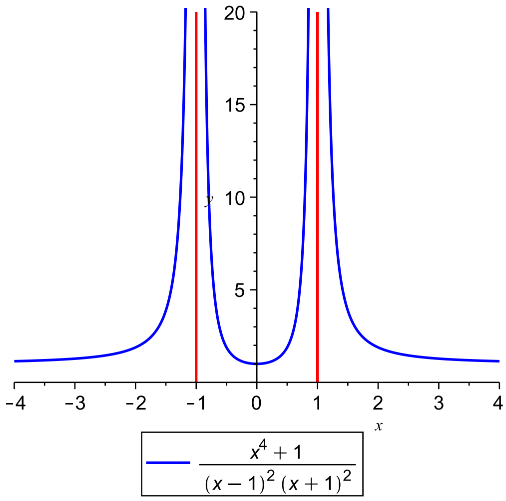



Abbildung 11: Polstellen ohne VZW

An den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ besitzt die Funktion $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{(x-1)^2(x+1)^2}$ Polstellen ohne Vorzeichenwechsel.
Die Parallelen $x = -1$ und $x = 1$ zur $y$-Achse heißen Asymptoten.

**Was passiert an Stellen, an denen Zähler- und Nennerpolynom beide Null sind?**

Für das Zählerpolynom $p(x)$ und das Nennerpolynom $q(x)$ gelte

$$p(x) = (x - x_0)^k \cdot p^*(x) \text{ und } q(x) = (x - x_0)^m \cdot q^*(x)$$

mit $p^*(x_0) \neq 0$ und $q^*(x_0) \neq 0$. $x_0$ ist nicht im Definitionsbereich von $h(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ enthalten.

**1. Fall:** $k > m$. Dann gilt für $x \in \mathbb{D}_h$

$$h(x) = \frac{(x - x_0)^k \cdot p^*(x)}{(x - x_0)^m \cdot q^*(x)} = \frac{(x - x_0)^{k-m} \cdot p^*(x)}{q^*(x)}.$$

Für $h^*(x) = \dfrac{(x - x_0)^{k-m} \cdot p^*(x)}{q^*(x)}$ ist aber $x_0 \in \mathbb{D}_{h^*}$ und es gilt $h^*(x_0) = 0$.

Man kann also an der Definitionslücke $x_0$ von $h(x)$ nachträglich die Lücke beheben, indem man $h(x_0) = 0$ festlegt. Dieser Funktionswert passt genau in die Lücke. Es liegt keine Polstelle vor.

**2. Fall:** $k = m$. Dann gilt für $x \in \mathbb{D}_h$

$$h(x) = \frac{(x - x_0)^k \cdot p^*(x)}{(x - x_0)^k \cdot q^*(x)} = \frac{p^*(x)}{q^*(x)}.$$

Für $h^*(x) = \dfrac{p^*(x)}{q^*(x)}$ ist aber $x_0 \in \mathbb{D}_{h^*}$ und es gilt $h^*(x_0) = \dfrac{p^*(x_0)}{q^*(x_0)} = c \neq 0$.

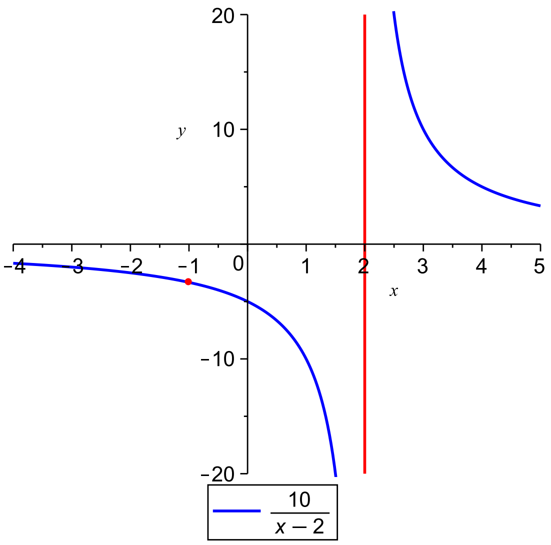
Man kann also auch hier nachträglich die Definitionslücke beheben, indem man $h(x_0) = h^*(x_0)$ festlegt. Dieser Funktionswert passt genau in die Lücke. Es liegt keine Polstelle vor.

**3. Fall:** $k < m$. Dann gilt für $x \in \mathbb{D}_h$

$$h(x) = \frac{(x - x_0)^k \cdot p^*(x)}{(x - x_0)^m \cdot q^*(x)} = \frac{p^*(x)}{(x - x_0)^{m-k} \cdot q^*(x)}.$$

Die Definitionslücke lässt sich nicht beheben. Es liegt eine Polstelle vor.

**Beispiel**




An der Stelle $x = 2$ besitzt die Funktion $f(x) = \dfrac{10 \cdot (x+1)^2}{(x-2)(x+1)^2}$ eine Polstelle. An der Stelle $x = -1$ besitzt die Funktion eine behebbare Definitionslücke.

Abbildung 12: Hebbare Definitionslücke

**Aufgabe**

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} \qquad g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 4x}{x^4 - 4}$$
$$h(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^5 - x^3} \qquad k(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 32x + 40}{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}$$

a) Bestimmen Sie für jede Funktion den Definitionsbereich.

b) Untersuchen Sie jeweils das Symmetrieverhalten.

c) Bestimmen Sie für jede Funktion die Nullstellen.

d) Untersuchen Sie die Definitionslücken. Wo befinden sich Polstellen? Welche Definitionslücken kann man „passend“ schließen?

## 26 Asymptotisches Verhalten für $x \to \infty$, $x \to -\infty$

In diesem Abschnitt überlegen wir, wie sich eine rationale Funktion verhält, wenn $x$ gegen $\infty$ oder gegen $-\infty$ strebt, d. h. $x$ immer größer oder immer kleiner wird.

**Satz**

Sei $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion. Der Grad des Zählerpolynoms $p(x)$ sei $n$, der Gard des Nennerpolynoms sei $m$.
Ist $n \geq m$ , so lässt sich $h(x)$ schreiben als

$$h(x) = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

wobei $k(x)$ ein Polynom vom Grad $n - m$ und $r(x)$ ein Polynom vom Höchstgrad $m - 1$ bezeichnet.

Die Polynome $k(x)$ und $r(x)$ erhält man durch Polynomdivision mit Rest.
Für große Werte von $|x|$ ist $h(x) \approx k(x)$; $k(x)$ heißt Asymptote.

**Beispiel**

Wir betrachten die rationale Funktion $h(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - x - 2}$.
Polynomdivision (mit Rest) liefert

$$\begin{array}{rrrrrrl}
(x^3 & & & - & 2x & + & 3) \ : (x^2 - x - 2) = x + 1 + \dfrac{x+5}{x^2 - x - 2} \\
\underline{x^3} & \underline{-} & \underline{x^2} & \underline{-} & \underline{2x} & & \\
 & & x^2 & & & + & 3 \\
 & & \underline{x^2} & \underline{-} & \underline{x} & \underline{-} & \underline{2} \\
 & & & & x & + & 5
\end{array}$$

d. h. $h(x) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2 - x - 2}$.

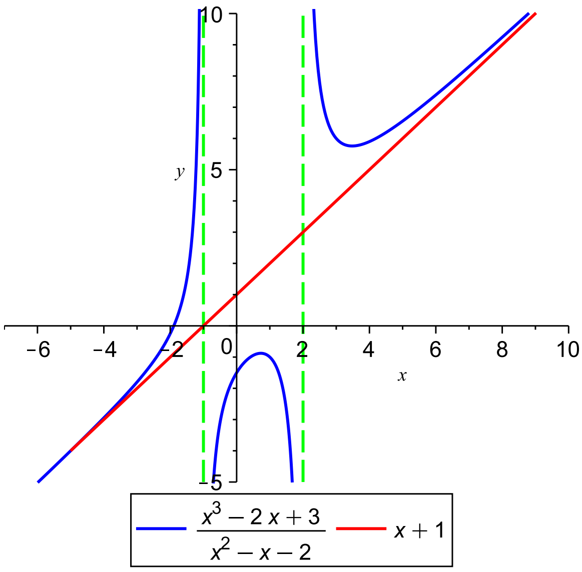



Abbildung 13: Asymptotisches Verhalten

Für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ nähert sich $h(x)$ der Asymptote $k(x) = x + 1$.

**Aufgabe**

Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen das asymptotische Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

$$f(x) = \frac{1 + x^3}{1 + x^2} \qquad g(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x + 2} \qquad h(x) = \frac{2x^3 - 10x^2 - 34x + 42}{2x^3 - 17x^2 + 19x + 14}$$

Wenn Sie etwas wiederholen möchten:

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich.

b) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen.

d) Untersuchen Sie die Definitionslücken. Wo befinden sich Polstellen? Welche Definitionslücken kann man „passend" schließen?

# 27 Beschränktheit und Monotonie von Funktionen

**Definition**

Sei $f$ eine reelle Funktion.
$f$ heißt nach $\left\{ \begin{array}{c} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right\}$ beschränkt, wenn für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \leq C \\ f(x) \geq C \end{array} \right\}$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$ erfüllt ist.
Sie heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, d. h. wenn für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gilt, dass $|f(x)| \leq C$ ist für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

**Beispiel**

$f(x) = x^2 + 7$ ist nach unten beschränkt, da $x^2 + 7 \geq 7$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
$g(x) = 5 - x^4$ ist nach oben beschränkt, da $5 - x^4 \leq 5$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**Definition**

Sei $f$ eine reelle Funktion.

$f$ heißt $\left\{\begin{array}{l}\text{monoton steigend}\\ \text{monoton fallend}\end{array}\right\}$ auf einem Intervall $I$, wenn $\left\{\begin{array}{l}f(x_1) \leq f(x_2)\\ f(x_1) \geq f(x_2)\end{array}\right\}$ für alle $x_1,x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

$f$ heißt $\left\{\begin{array}{l}\text{streng monoton steigend}\\ \text{streng monoton fallend}\end{array}\right\}$ auf einem Intervall $I$, wenn $\left\{\begin{array}{l}f(x_1) < f(x_2)\\ f(x_1) > f(x_2)\end{array}\right\}$ für alle $x_1,x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

**Beispiel**

$f(x) = x^2$ ist streng monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty; 0]$ und streng monoton steigend auf dem Intervall $[0; \infty)$, denn:

$$\text{Aus } x_1 < x_2 \leq 0 \text{ folgt } x_1^2 > x_2^2 \text{ und aus } 0 \leq x_1 < x_2 \text{ folgt } x_1^2 < x_2^2.$$

**Beispiel**

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ ist streng monoton steigend auf dem Intervall $[0; \infty)$, denn:

$$\begin{aligned}\text{Aus } 0 \leq x_1 < x_2 \text{ folgt } x_1^2 < x_2^2 \quad &\iff \quad x_1^2 x_2^2 + x_1^2 < x_1^2 x_2^2 + x_2^2\\ &\iff \quad x_1^2 \underbrace{(x_2^2+1)}_{>0} < x_2^2 \underbrace{(x_1^2+1)}_{>0}\\ &\iff \quad \frac{x_1^2}{x_1^2+1} < \frac{x_2^2}{x_2^2+1}.\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Zeigen Sie, dass $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ streng monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty; 0)$ ist.

**Aufgabe**

Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ streng monoton steigend auf dem Intervall $[0; \infty)$ ist.

**Aufgabe**

Gegeben sei die Funktion $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Zeigen Sie, dass $h(x)$ streng monoton steigend auf dem Intervall $(-1; 1)$ und streng monoton fallend auf den Intervallen $[1; \infty)$ und $(-\infty; -1]$ ist.

# 28 Potenzfunktionen

**Definition**

Seien $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion der Form

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

heißt Potenzfunktion. Es gilt

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m .$$

Definitionsbereich, Bildbereich, Monotonieeigenschaften und Symmetrieverhalten hängen von der Potenz $\dfrac{m}{n}$ ab. Daher werden in der unten stehenden Aufgabe verschiedene Fälle betrachtet.

Es lassen sich auch Potenzfunktionen mit irrationalen Exponenten definieren, z. B. $f(x) = x^{\pi}$. Dazu muss man aber zunächst erklären, was der Wert von z. B. $2^{\pi}$ sein soll. Dies kann man erst verstehen, wenn man sich mit Grenzwerten beschäftigt hat. Dieser Fall wird in diesem Abschnitt nicht weiter behandelt.

**Aufgabe**

Es sollen die Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten untersucht werden.

a) Geben Sie für die verschiedenen Fälle jeweils den Definitionsbereich und Bildbereich an.

b) Beschreiben Sie das Monotonieverhalten und die Symmetrieeigenschaften.

c) Untersuchen Sie, ob die Funktionen nach oben beschränkt, nach unten beschränkt, beschränkt oder unbeschränkt sind.

Sie können Ihre Ergebnisse neben den entsprechenden Graphiken eintragen.

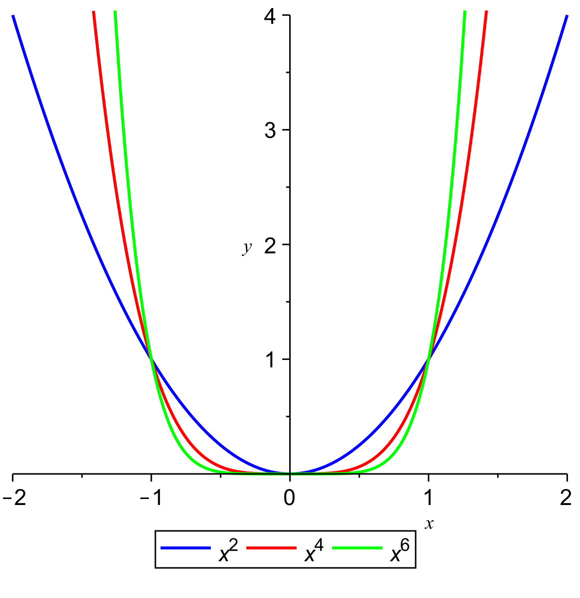



Abbildung 14: Potenzfunktionen

$f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m$ gerade,
z. B. $x^2$, $x^4$, $x^6$

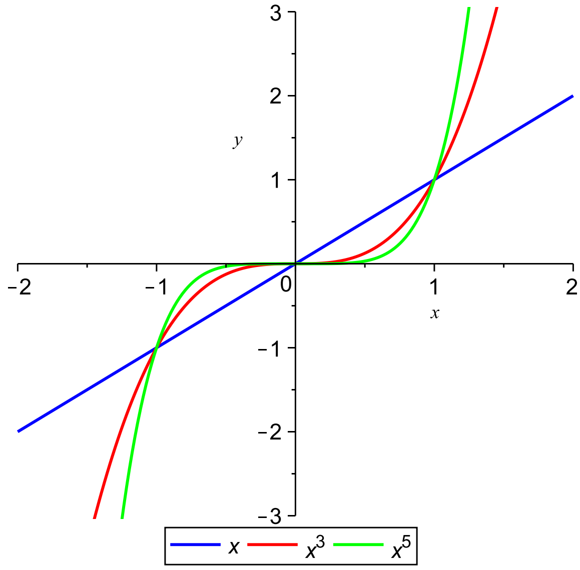
Definitionsbereich:

Bildbereich:

Monotonie:

Beschränktheit:

Symmetrie:




$f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m$ ungerade,
z. B. $x$, $x^3$, $x^5$

Definitionsbereich:

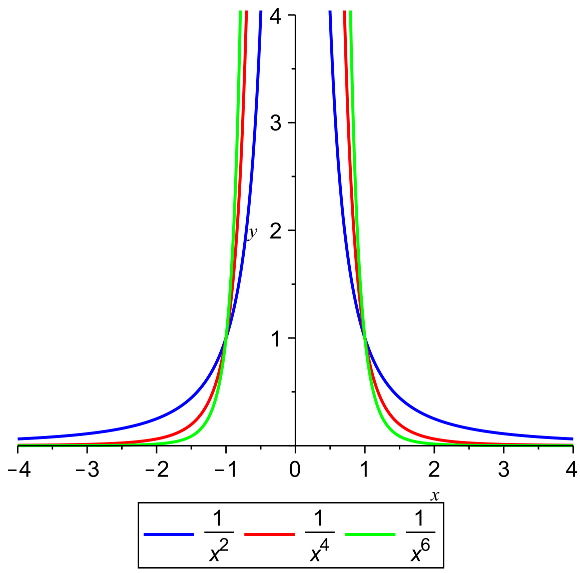
Bildbereich:

Monotonie:

Beschränktheit:

Symmetrie:

Abbildung 15: Potenzfunktionen




$f(x) = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m$ gerade,
z. B. $x^{-2}$, $x^{-4}$, $x^{-6}$

Definitionsbereich:

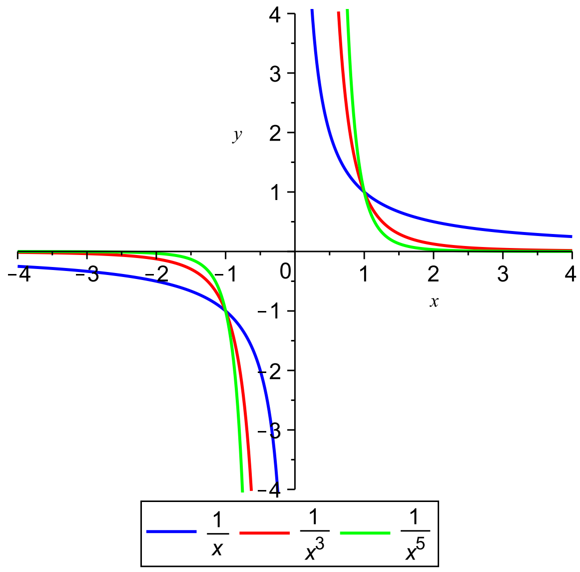
Bildbereich:

Monotonie:

Beschränktheit:

Symmetrie:

Abbildung 16: Potenzfunktionen




$f(x) = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m$ ungerade,
z. B. $x^{-1}$, $x^{-3}$, $x^{-5}$

Definitionsbereich:

Bildbereich:

Monotonie:

Beschränktheit:

Symmetrie:

Abbildung 17: Potenzfunktionen

**Aufgabe**

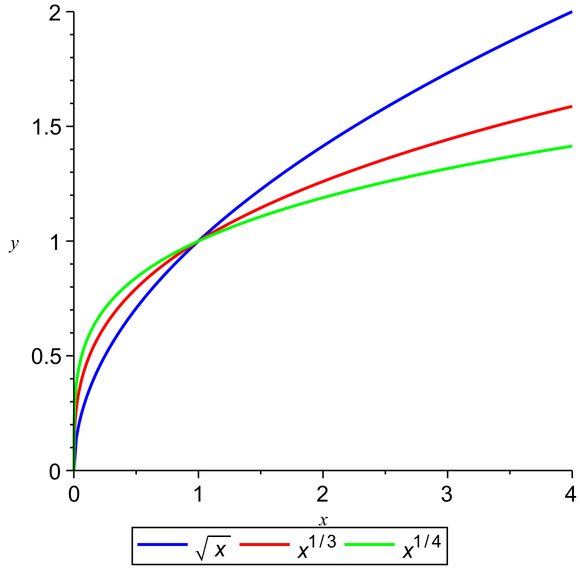
Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

a) Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und den Bildbereich.

b) Erstellen Sie geeignete Wertetabellen und skizzieren Sie die Funktionen im Koordinatensystem. Vergleichen Sie die Graphen der beiden Funktionen.

**Aufgabe**

Es sollen Potenzfunktionen mit rationalen, nicht ganzzahligen Exponenten betrachtet werden. Notieren Sie Ihre Ergebnisse zu Definitionsbereich, Bildbereich, Monotonie und Beschränktheit neben die unten stehenden Graphiken.




$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $0 < \frac{m}{n} < 1$
z. B. $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{5}}$

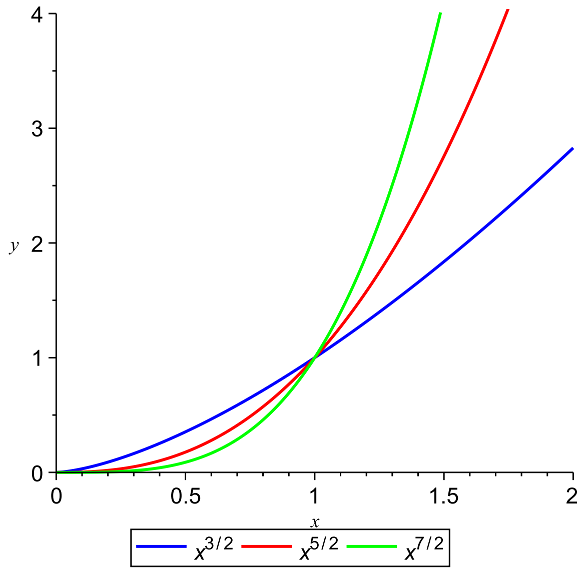
Definitionsbereich:

Bildbereich:

Monotonie:

Beschränktheit:

Abbildung 18: Potenzfunktionen




$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n} > 1$
z. B. $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{7}{2}}$

Definitionsbereich:

Bildbereich:

Monotonie:

Beschränktheit:

Abbildung 19: Potenzfunktionen

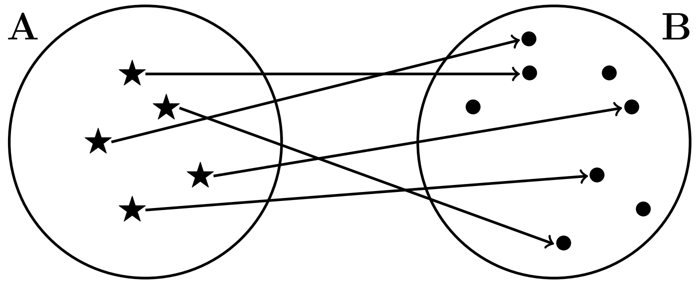
**Aufgabe**

In dem folgenden Bild sind die Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^{\frac{5}{2}}$, $f_2(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = x^{\frac{2}{5}}$ und $f_5(x) = x^{\frac{8}{5}}$ gezeichnet. Ordnen Sie die Funktionen den passenden Graphen zu.

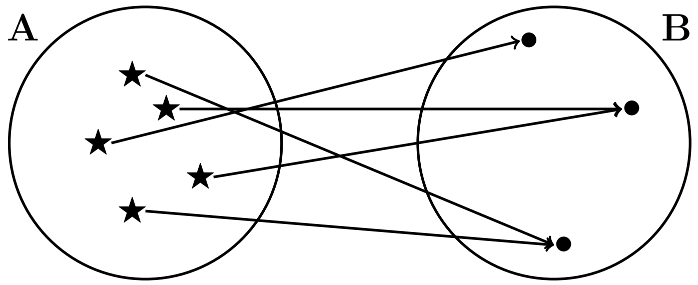

Abbildung 20: Zuordnung Funktionsterme, Graphen

# 29 Umkehrfunktionen

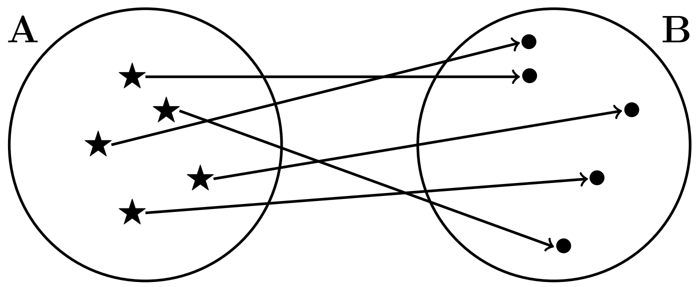
Sei $f : A \longrightarrow B$, $x \longmapsto f(x)$ eine Abbildung / Funktion, d. h. zu jedem $x \in A$ existiert genau ein $y \in B$ mit $f(x) = y$.
Mit $f(A)$ bezeichnen wir das Bild von $A$, d. h. $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.
Zur Klärung der Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv betrachten wir folgende Beispiele.




Für $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Eine solche Abbildung heißt injektiv.
Beachte: Nicht alle Elemente von $B$ werden getroffen!




Hier gilt $f(A) = B$, alle Elemente von $B$ werden getroffen. Eine solche Abbildung heißt surjektiv.
Beachte: Hier gibt es Elemente $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$, aber $f(x_1) = f(x_2)$.




Diese Abbildung ist injektiv und surjektiv. Eine solche Abbildung heißt bijektiv.

Zu bijektiven Abbidungen existiert die Umkehrfunktion, die wir im Folgenden mit $g(x)$ bezeichnen. Häufig verwendet man auch die Bezeichnung $f^{-1}(x)$ für die Umkehrfunktion. Dies ist aber nicht zu verwechseln mit $\frac{1}{f(x)}$. Im Allgemeinen ist $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$!
Ist $f$ injektiv aber nicht surjektiv, wirft man aus $B$ alle Elemente raus, die nicht getroffen werden. Ist $f$ surjektiv aber nicht injektiv, muss man $A$ so einschränken, dass jedes Element von $B$ nur einmal getroffen wird.

**Beispiel**

Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0; \infty)$, $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv, da $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Wir schränken nun den Definitionsbereich ein, indem wir $f : [0; \infty) \longrightarrow [0; \infty)$, $f(x) = x^2$ betrachten.
Für die Bestimmung der Umkehrfunktion löst man die Gleichung $y = x^2$ für $x \geq 0$ nach $y$ auf. Für $x \geq 0$ gilt

$$y = x^2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{y}.$$

Also ist $g : [0; \infty) \longrightarrow [0; \infty)$, $g(y) = \sqrt{y}$ die Umkehrfunktion.
Häufig benennt man noch die Variablen um, damit man z. B. beide Funktionen zusammen in ein Koordinatensytem zeichnen kann, d. h. hier $g(x) = \sqrt{x}$.

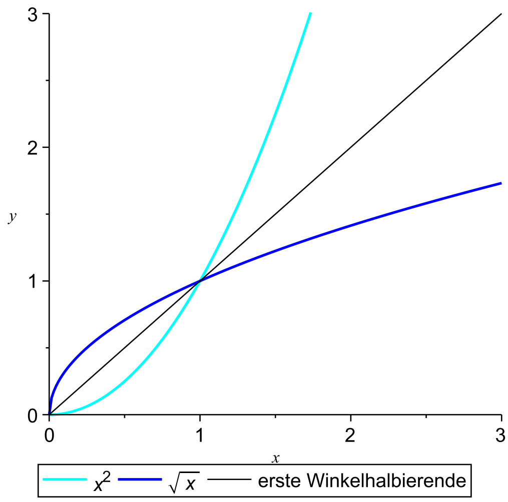



Abbildung 21: Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$, $x \geq 0$

Bei gleicher Skalierung der Koordinatenachsen ist der Graph der Umkehrfunktion die Spiegelung des Graphen der Funktion an der ersten Winkelhalbierenden.

**Beispiel**

Wir berechnen die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.
Die Funktion ist injektiv, da aus $x_1 \neq x_2$ folgt $2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3$, d. h. $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Sie ist surjektiv, da $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Insgesamt ist $f$ also bijektiv.
Es gilt $y = 2x+3 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}(y-3)$. Also ist nach Umbenennung der Variablen $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$ die Umkehrfunktion zu $f$.

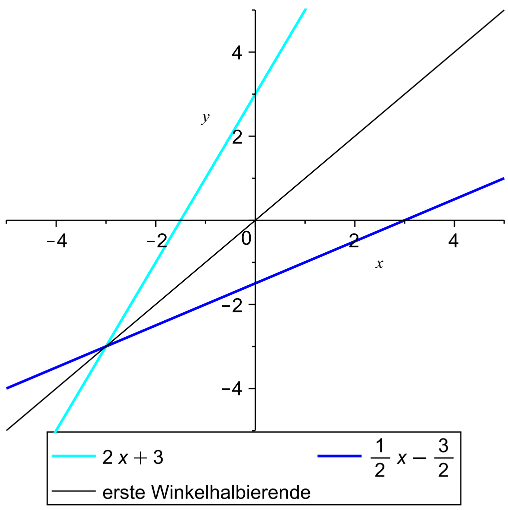



Abbildung 22: Umkehrfunktion zu $f(x) = 2x + 3$

Auch hier ist bei gleicher Skalierung der Koordinatenachsen der Graph der Umkehrfunktion die Spiegelung des Graphen der Funktion an der ersten Winkelhalbierenden.

Allgemein gilt für die Potenz- und Wurzelfunktionen:

Für $f : [0;\infty) \longrightarrow [0;\infty)$, $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $n,m \in \mathbb{N}$, ist

$$g : [0;\infty) \longrightarrow [0;\infty), g(x) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$

die Umkehrfunktion.

Für $f : (0;\infty) \longrightarrow (0;\infty)$, $f(x) = x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, $n,m \in \mathbb{N}$, ist

$$g : (0;\infty) \longrightarrow (0;\infty), g(x) = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$$

die Umkehrfunktion.

**Satz**

Ist $f : \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend oder fallend, so ist $f$ injektiv. Damit ist $f : \mathbb{D}_f \longrightarrow f(\mathbb{D}_f)$ bijektiv und es existiert die Umkehrfunktion $g : f(\mathbb{D}_f) \longrightarrow \mathbb{D}_f$.

**Aufgabe**

Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen die Umkehrfunktionen. Dabei müssen Sie gegebenenfalls den Definitionsbereich einschränken.

a) $f_1(x) = -2x + 1$ b) $f_2(x) = x^3$ c) $f_3(x) = \sqrt[3]{x^2}$

**Aufgabe**

a) Wenn $f$ eine Funktion ist, die Ihnen sagt, wie viele kg Kartoffeln Sie für einen bestimmten Geldbetrag kaufen können, was sagt Ihnen dann die Umkehrfunktion?

b) Wenn $f$ eine Funktion ist, die Ihnen sagt, welche Strecke ein PKW nach einer bestimmten Zeit zurückgelegt hat, was sagt Ihnen dann die Umkehrfunktion?

# 30 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Bevor wir uns mit Exponential- und Logarithmusfunktionen beschäftigen, sollten Sie den Abschnitt zu Logarithmen wiederholen und die folgenden Aufgaben lösen.

**Aufgabe**

Nach den Rechenregeln für den Logarithmus wissen wir, dass $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ ist für $x > 0$. Was ist $\ln(x^2)$, wenn $x < 0$ ist?

**Aufgabe**

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

a) $\lg\left(a^2 - 2ab + b^2\right) - \lg\left(a^2 - b^2\right) + \lg(a+b)$

c) $\ln\left(\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}\right)$

b) $\ln\sqrt{y-1} - \ln\left(y^2\right) + \ln\sqrt{y+1}$

d) $\lg\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^2b}}{\left(\sqrt{a\sqrt{b}}\right)^5}\right)$

Eine für technische Anwendungen besonders wichtige Klasse von Funktionen sind die Exponentialfunktionen, mit deren Hilfe sich bestimmte Wachstumsprozesse und Zerfallsprozesse beschreiben lassen.

**Definition**

Sei $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ der Form $f(x) = b^x$ heißt Exponentialfunktion.

**Beispiel**

Wir betrachten die beiden Exponentialfunktionen $f_1(x) = 2^x$ und $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ mit den reziproken Basen 2 und $\frac{1}{2}$.

Wertetabelle

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ | $8$ |
| $f_2(x)$ | $8$ | $4$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

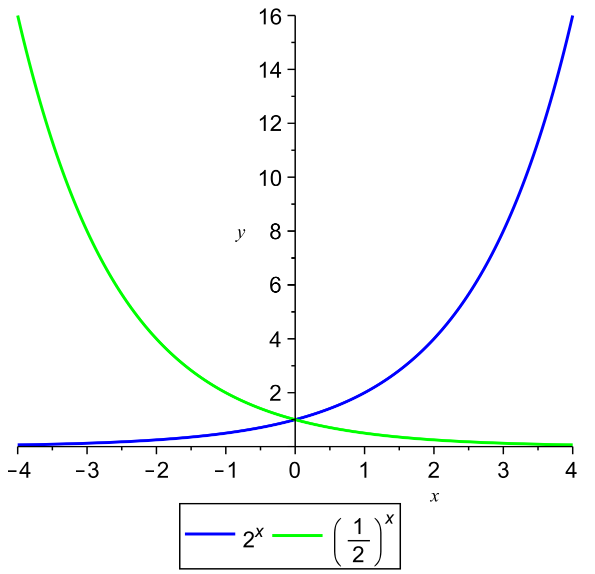



Abbildung 23: Exponentialfunktionen mit reziproken Basen

Bereits an der Wertetabelle kann man erkennen, dass der Graph von $f_2(x)$ die Spiegelung des Graphen von $f_1(x)$ an der $y$-Achse ist. Dies gilt allgemein für Exponentialfunktionen mit reziproken Basen.

**Aufgabe**

In Abbildung 24 sind die Graphen verschiedener Exponentialfunktionen gezeichnet. Verwenden Sie die Graphiken für die folgenden Untersuchungen. Beachten Sie dabei die Abhängigkeit von der Größe der Basis.

a) Geben Sie für die Exponentialfunktionen $f(x) = b^x$ den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ und den Bildbereich $f(\mathbb{D}_f)$ an.

b) Beschreiben Sie das Monotonieverhalten.

c) Gibt es obere oder untere Schranken?

d) Welchen Punkt haben alle Exponentialfunktionen gemeinsam?

e) Wie ist das Verhalten, wenn x immer größer bzw. immer kleiner wird?

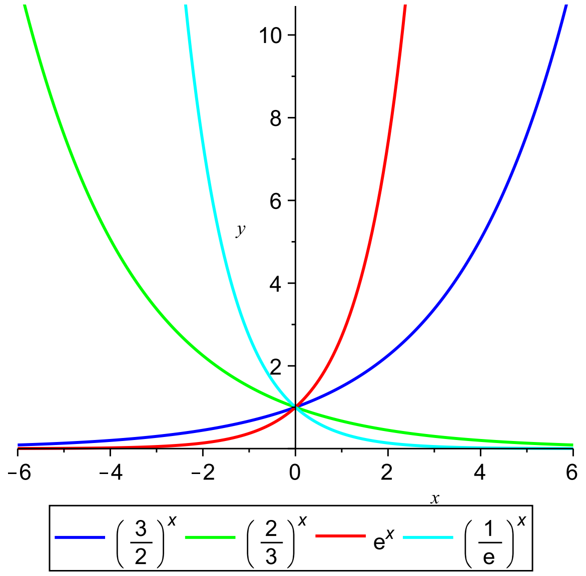



Abbildung 24: Exponentialfunktionen mit verschiedenen Basen

$f(x) = b^x$ mit verschiedenen Basen $b$.

Definitionsbereich:

Bildbereich:

Monotonie:

Beschränktheit:

Gemeinsamer Punkt:

Verhalten für $x \to \infty$:

Verhalten für $x \to -\infty$:

**Aufgabe**

Begründen Sie, warum jede Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion besitzt. Skizzieren Sie die Umkehrfunktion zu $f(x) = 2^x$ in Abbildung 25.

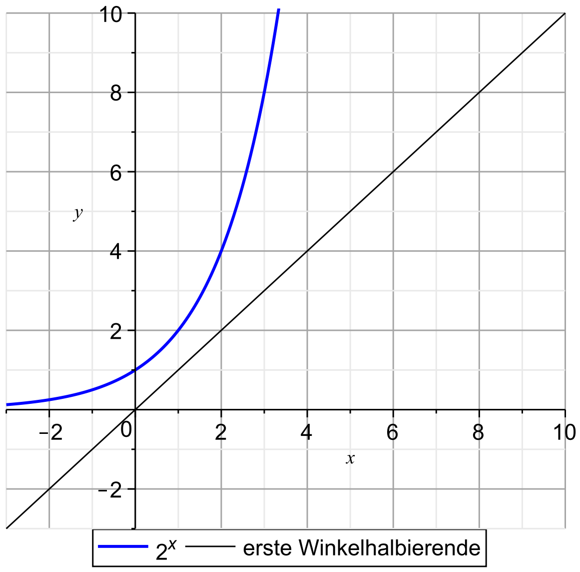



Abbildung 25: Graph der Umkehrfunktion zu $f(x) = 2^x$?

**Aufgabe**

Sei $f(x) = 10^x$. Wie muss **a** aussehen, wenn man $f(x)$ in der Form $f(x) = e^{\mathbf{a}x}$ schreiben will?

**Definition**

Sei $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$. Eine Funktion der Form $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ der Form $g(x) = \log_b x$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis $b$.

Da jede Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ streng monoton ist, besitzt sie auch eine Umkehrfunktion. Dies ist die Funktion $g(x) = \log_b x$. Der Graph von $g(x) = \log_b x$ ergibt sich durch Spiegelung des Graphen von $f(x) = b^x$ an der ersten Winkelhalbierenden. Die Gestalt von $g(x) = \log_b x$ hängt wieder von der Größe der Basis $b$ ab.

**Aufgabe**

Begründen Sie, warum $\log_{\frac{1}{2}}(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ und $\log_{\frac{1}{e}}(x) = -\ln(x)$ gilt. Hinweis: Basiswechsel. Drücken Sie $\log_{\frac{3}{2}}(x)$ und $\log_{\frac{2}{3}}(x)$ mit Hilfe des natürlichen Logarithmus aus.

**Aufgabe**

In Abbildung 26 sind die Graphen verschiedener Logarithmusfunktionen gezeichnet. Verwenden Sie die Graphiken für die folgenden Untersuchungen. Beachten Sie dabei die Abhängigkeit von der Größe der Basis.

a) Geben Sie für die Logarithmusfunktionen $g(x) = \log_b x$ den Definitionsbereich $\mathbb{D}_g$ und den Bildbereich $g(\mathbb{D}_g)$ an.

b) Beschreiben Sie das Monotonieverhalten.

c) Gibt es obere oder untere Schranken?

d) Welchen Punkt haben alle Logarithmusfunktionen gemeinsam?

e) Wie ist das Verhalten, wenn x immer größer wird bzw. sich von rechts 0 nähert?

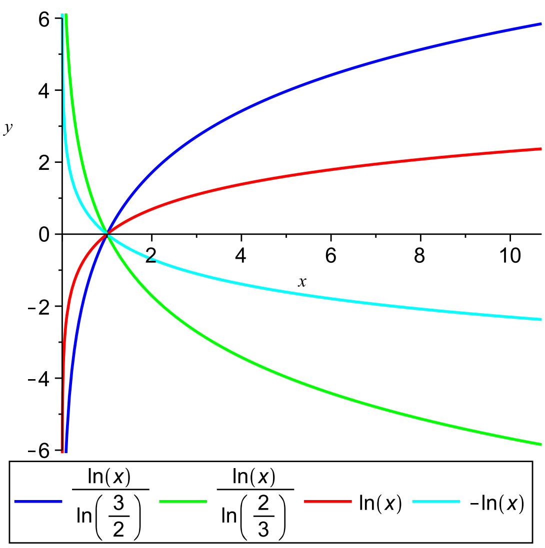



Abbildung 26: Logarithmusfunktionen mit verschiedenen Basen

$g(x) = \log_b x$ mit verschiedenen Basen $b$.

Definitionsbereich:

Bildbereich:

Monotonie:

Beschränktheit:

Gemeinsamer Punkt:

Verhalten für $x \to \infty$:

Verhalten für $x \to 0$ von rechts:

**Beispiel**

Eine bestimmte Bakterienart bedecke zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Fläche von $1\,\mathrm{cm}^2$. Das Wachstum dieser Bakterienart werde durch die Funktion

$$w(t) = 1{,}5^t$$

beschrieben. Wann hat sich die durch die Bakterien bedeckte Fläche verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht?
Zu lösen ist die Gleichung $1{,}5^t = A$ für $A = 2{,}3{,}4$.

$$1{,}5^t = A \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln A}{\ln 1{,}5}$$

Für $A = 2$ ergibt sich $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}5} \approx 1{,}71$, für $A = 3$ ergibt sich $t = \dfrac{\ln 3}{\ln 1{,}5} \approx 2{,}71$ und für $A = 4$ ergibt sich $t = \dfrac{\ln 4}{\ln 1{,}5} \approx 3{,}42$.

**Beispiel**

Eine radioaktive Substanz zerfällt nach dem Zerfallsgesetz

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Dabei ist $n_0$ das zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene radioaktive Material und $\lambda > 0$ die sogenannte Zerfallskonstante. Wir berechnen die Halbwertszeit. Das ist die Zeit, in der die Hälfte der vorhandenen Atomkerne zerfallen ist.
Gesucht ist also $t$, so dass $n_0 \cdot e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} n_0$ gilt.

$$\begin{aligned}
& n_0 \cdot e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} n_0 && | : n_0 \neq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} && |\text{Anwenden von } \ln \text{ auf beiden Seiten} \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln e^{-\lambda t} = \ln \frac{1}{2} && |\text{Anwenden Rechenregeln Logarithmus} \\
\Longleftrightarrow \quad & -\lambda t \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2) && | : (-\lambda) \neq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(2)
\end{aligned}$$

Die Halbwertszeit beträgt also $t = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \ln(2)$.

**Aufgabe**

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Betrag $B$ mit einem Zinssatz von $4\,\%$ angelegt. Dann beträgt das Kapital zum Zeitpunkt t

$$k(t) = B \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t.$$

Nach welcher Zeit hat sich das Kapital verdoppelt?

# 31 Trigonometrische Funktionen

Es wird empfohlen, den Abschnitt 12 über Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck, insbesondere auch die Erklärungen zu Winkeln im Bogenmaß, zu wiederholen.

**Sinus und Kosinus**

Sei $P$ ein Punkt auf dem Einheitskreis mit den Koordinaten $(t,s)$, der längs des Kreisbogens vom Punkt (1,0) die Entfernung $x$ hat.

Die Zuordnung von $x$ im Bogenmaß zur Koordinate $s$ des Punktes $P$ ist der Sinus von $x$, die Zuordnung von $x$ im Bogenmaß zur Koordinate $t$ des Punktes $P$ ist der Kosinus von $x$.

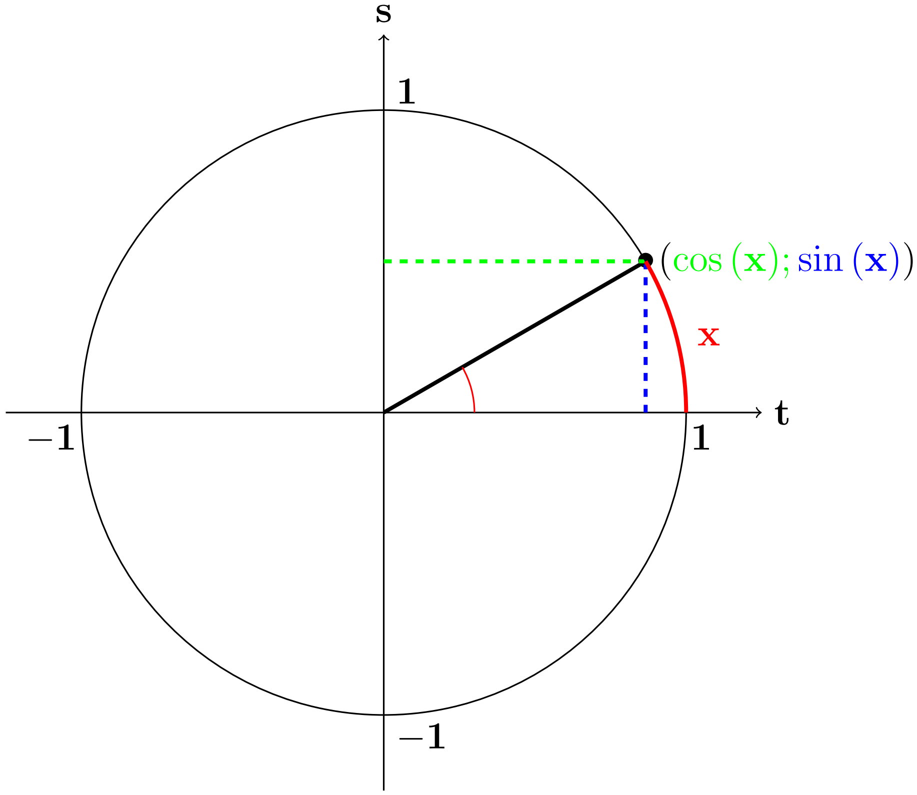



Abbildung 27: Sinus- und Kosinus am Einheitskreis

Die Funktion, die jeder reellen Zahl $x$ den Sinus zuordnet, heißt Sinusfunktion und wird mit $\sin(x)$ bezeichnet.

Die Funktion, die jeder reellen Zahl $x$ den Kosinus zuordnet, heißt Kosinusfunktion und wird mit $\cos(x)$ bezeichnet.

Einige Werte für den Sinus und den Kosinus haben wir bereits im Kapitel über Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck zusammengestellt. Mit Hilfe entsprechender Überlegungen am Einheitskreis lässt sich folgende Wertetabelle erstellen.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $\cdots$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $\cdots$ |

**Aufgabe**

Ergänzen Sie die Werte für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in der folgenden Wertetabelle.

| $x$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | | | | | | | | | |
| $\cos x$ | | | | | | | | | |

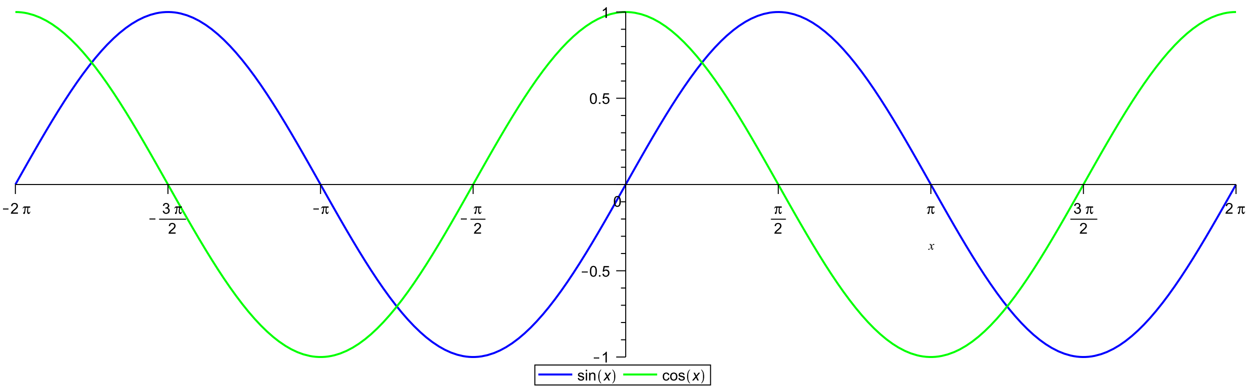



Abbildung 28: Sinus- und Kosinusfunktion

**Definition**

Sei $T \in \mathbb{R}^+$. Eine Funktion $f$ heißt $T$-periodisch, wenn für jedes $x \in \mathbb{D}_f$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$x + kT \in \mathbb{D}_f \text{ und } f(x + kT) = f(x).$$

$T$ heißt Periodenlänge.

Mit Überlegungen am Einheitskreis sieht man, dass sich die Werte für den Sinus und Kosinus $2\pi$-periodisch wiederholen; sin und cos sind $2\pi$-periodisch, d. h. für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \text{ und } \cos(x + 2k\pi) = \cos(x).$$

Alle Werte von Sinus und Kosinus liegen im Intervall $[-1; 1]$. Die Nullstellenmenge der Sinusfunktion ist $\{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$, die der Kosinusfunktion $\left\{\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**Aufgabe**

a) Auf welchen Intervallen ist die Sinusfunktion streng monoton steigend, auf welchen streng monoton fallend?

b) Auf welchen Intervallen ist die Kosinusfunktion streng monoton steigend, auf welchen streng monoton fallend?

c) Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion.

d) Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 1\} \qquad M_2 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -1\}$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1\} \qquad M_4 = \{x \in \mathbb{R} : \cos x = -1\}$$

**Aufgabe**

Probieren Sie mit Hilfe von https://www.geogebra.org/m/C6efUT5S, wie die Graphen von verschobenen, gedehnten und gestauchten Sinusfunktionen in Abhängigkeit von der Wahl der Parameter (Schieberegler) aussehen.

**Aufgabe**

In dem folgenden Bild sind die Graphen der Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$, $f_3(x) = \sin(0{,}5x)$, $f_4(x) = 2\sin(x)$, $f_5(x) = 0{,}5\sin(x)$, $f_6(x) = \sin(x + \pi/4)$, $f_7(x) = \sin(x - \pi/4)$, $f_8(x) = \sin(x) + 1$und $f_9(x) = \sin(x) - 1$ gezeichnet. Ordnen Sie die Funktionen den passenden Graphen zu.

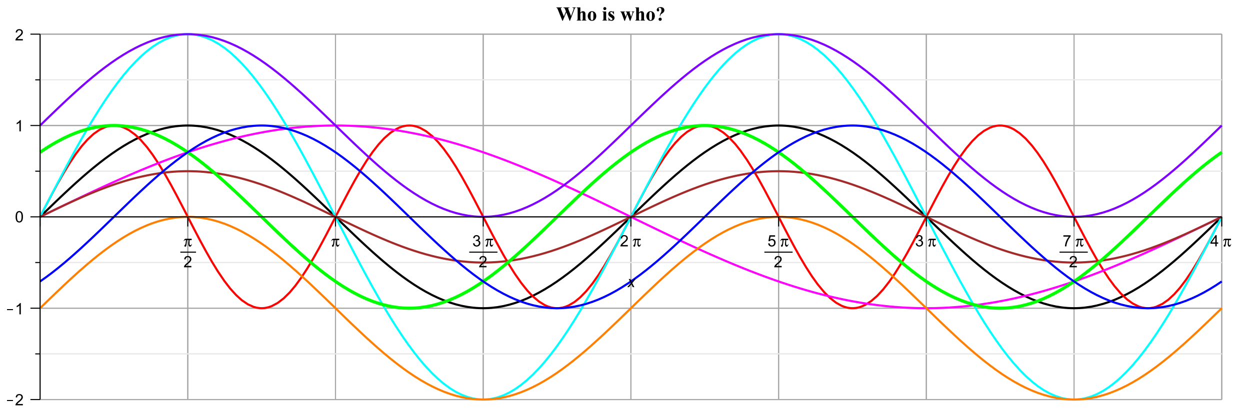



Abbildung 29: Zuordnung Funktionsterme, Graphen

**Tangens und Kotangens**

Die Tangens- und Kotangensfunktion sind aus der Sinus- und Kosinusfunktion zusammengesetzte Funktionen.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ mit } \mathbb{D}_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ mit } \mathbb{D}_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Die Tangens- und Kotangensfunktion lassen sich auch am Einheitskreis skizzieren.

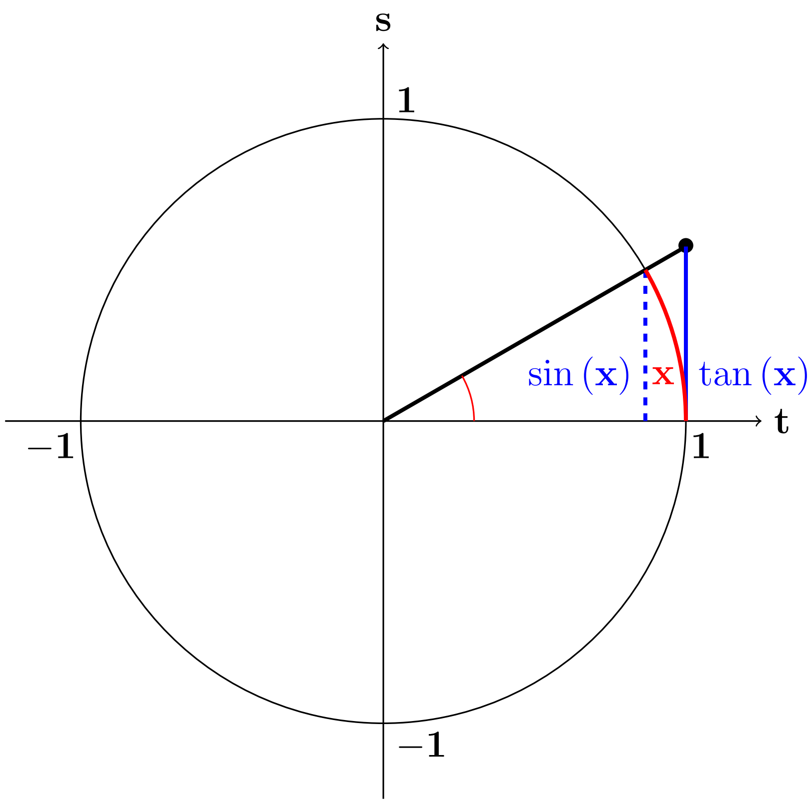



Abbildung 30: Tangens am Einheitskreis

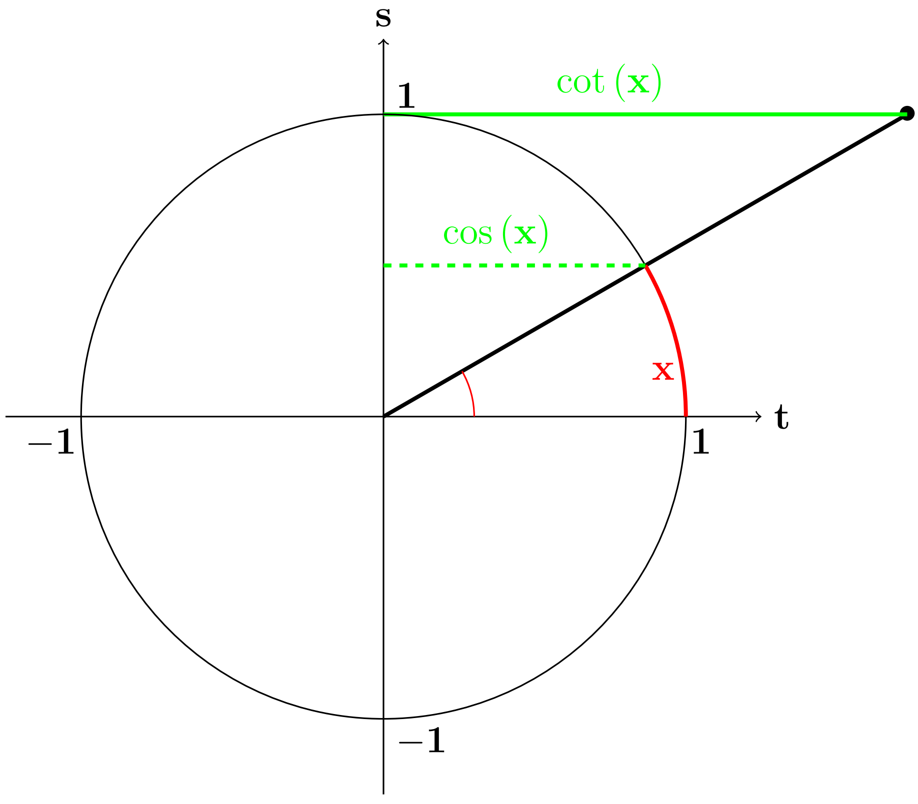



Abbildung 31: Kotangens am Einheitskreis

**Aufgabe**

a) Begründen Sie am Einheitskreis, warum $\tan(x)$ und $\cot(x)$ $\pi$-periodische Funktionen sind.

b) Stellen Sie mit Hilfe der Werte für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ eine Wertetabelle für $\tan(x)$ und $\cot(x)$ auf.

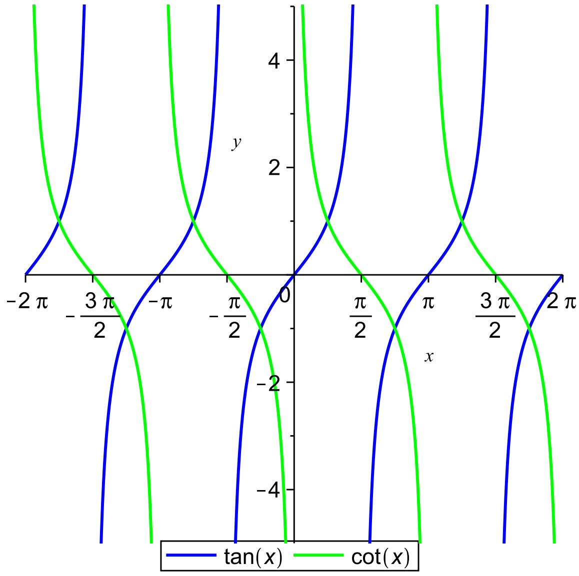



Abbildung 32: Tangens- und Kotangensfunktion

**Aufgabe**

Beschreiben Sie die Monotonie- und Symmetrieeigenschaften der Tangens- und Kotangensfunktion.

**Trigonometrische Formeln**

Es gibt eine große Zahl von Formeln und Gleichungen im Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen. Blättern Sie einmal in einer Formelsammlung. Hier werden einige sehr häufig benutzte Formeln zusammengestellt.

**Zusammenhang zwischen Sinus- und Kosinusfunktion**

Die Sinusfunktion lässt sich als verschobene Kosinusfunktion darstellen, die Kosinusfunktion als verschobene Sinusfunktion.

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

**Trigonometrischer Pythagoras**

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$$

Statt $(\sin(x))^2$ bzw. $(\cos(x))^2$ schreibt man meistens $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$.

**Additionstheoreme**

$$\begin{aligned}\sin(x_1 \pm x_2) &= \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) \pm \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \cos(x_1 \pm x_2) &= \cos(x_1) \cdot \cos(x_2) \mp \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)\end{aligned}$$

**Beispiel**

Mit $x_1 = x_2 = x$ erhält man aus dem Additionstheorem für den Sinus die Formel für den Sinus des doppelten Winkels.

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cdot\cos(x) + \cos(x)\cdot\sin(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$$

**Aufgabe**

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Kosinus und Verwendung des trigonometrischen Pythagoras die Gleichung

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1.$$

b) Verwenden Sie nun die Formeln für den Sinus und Kosinus des doppelten Winkels, um die folgende Formel für den Tangens des doppelten Winkels herzuleiten.

$$\tan(2x) = \frac{2\cdot\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

c) Finden Sie Formeln für $\sin(3x)$ und $\cos(3x)$.

**Beispiel**

Wir bestimmen die Nullstellen von $f(t) = \sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$.
Zur Erinnerung: $\sin(x) = 0 \iff x = k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$. Hier ist $x = 3t + \frac{\pi}{6}$, also

$$\begin{aligned}\sin\left(3t+\frac{\pi}{6}\right) = 0 &\iff 3t + \frac{\pi}{6} = k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z}\\ &\iff 3t = k\cdot\pi - \frac{\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}\\ &\iff t = \frac{1}{3}k\cdot\pi - \frac{\pi}{18}, k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen.

a) $f_1(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $f_2(x) = 2\cdot\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

**Beispiel**

Wir vereinfachen den Ausdruck $\sqrt{1+\sin(t)}\cdot\sqrt{1-\sin(t)}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sin(t)}\cdot\sqrt{1-\sin(t)} &= \sqrt{(1+\sin(t))\cdot(1-\sin(t))} && |\text{3. binomische Formel}\\ &= \sqrt{1-\sin^2(t)} && |\text{trigonometrischer Pythagoras}\\ &= |\cos(t)|.\end{aligned}$$

**Aufgabe**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke.

a) $\sqrt{1-\cos(t)} \cdot \sqrt{1+\cos(t)}$ b) $\dfrac{1}{1+\tan(t)} + \dfrac{1}{1+\cot(t)}$

**Aufgabe**

Schauen Sie sich für diese Aufgabe noch einmal genau die Wertetabellen und Graphen der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion an. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $\cos(t) = \dfrac{1}{2}$ b) $\sin(t) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ c) $|\tan(t)| = 1$

**Beispiel**

Wir bestimmen alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung

$$\cos(2x) - 4\cos(x) + 3 = 0$$

erfüllt ist.
Wir verwenden die Formel für den Kosinus des doppelten Winkels: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
Damit gilt

$$\begin{aligned}
\cos(2x) - 4\cos(x) + 3 = 0 &\Longleftrightarrow 2\cos^2(x) - 1 - 4\cos(x) + 3 = 0\\
&\Longleftrightarrow \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0\\
&\Longleftrightarrow (\cos(x) - 1)^2 = 0\\
&\Longleftrightarrow \cos(x) = 1\\
&\Longleftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung

$$\sin(2x) = 4\cos(x)$$

erfüllt ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Formel für den Sinus des doppelten Winkels.

# 32 Arkusfunktionen

Die Arkusfunktionen sind Umkehrfunktionen zu geeigneten Einschränkungen der trigonometrischen Funktionen.
Streng monotone Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion. Da die trigonometrischen Funktionen nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton sind, betrachten wir geeignete Einschränkungen.

**Arkussinus**
$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1;1]$ ist streng monoton steigend und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt Arkussinus.
$\arcsin : [-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ist definiert durch

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x.$$

Wertetabelle für die Sinusfunktion auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

Daraus kann man nun eine Wertetabelle für die Arkussinusfunktion ablesen.

| $x$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\arcsin x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

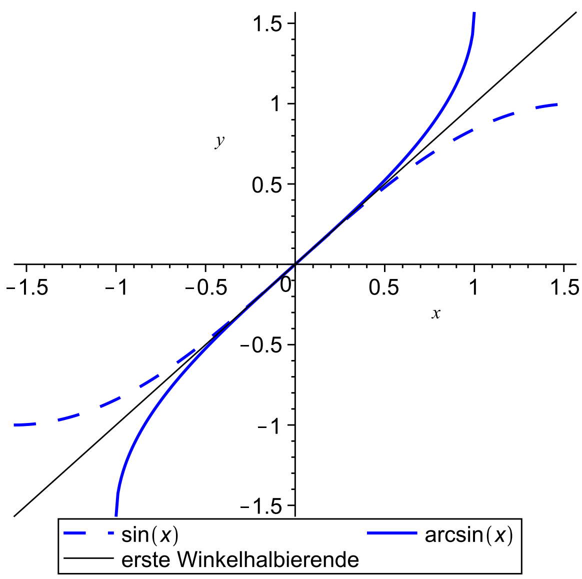



Abbildung 33: Sinus und Arkussinus

Den Graphen der Arkussinusfunktion erhält man durch Spiegelung der Sinusfunktion für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ an der ersten Winkelhalbierenden.

**Arkuskosinus**
$\cos : [0;\pi] \longrightarrow [-1;1]$ ist streng monoton fallend und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt Arkuskosinus.
$\arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$ ist definiert durch

$$\arccos x = y \iff \cos y = x.$$

Wertetabelle für die Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0; \pi]$:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |

Daraus kann man nun eine Wertetabelle für die Arkuskosinusfunktion ablesen.

| $x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\arccos x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |

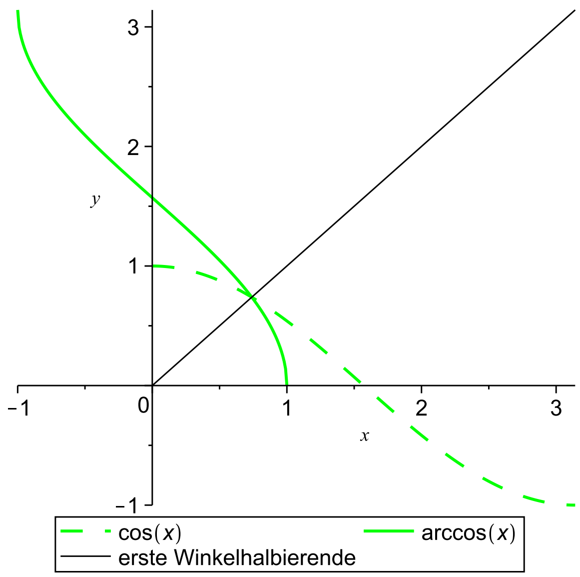



Abbildung 34: Kosinus und Arkuskosinus

Den Graphen der Arkuskosinusfunktion erhält man durch Spiegelung der Kosinusfunktion für $x \in [0; \pi]$ an der ersten Winkelhalbierenden.

**Arkustangens**
$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt Arkustangens.
$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ist definiert durch

$$\arctan x = y \iff \tan y = x.$$

Wertetabelle für die Tangensfunktion auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$:

| $x$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan x$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |

Daraus kann man nun eine Wertetabelle für die Arkustangensfunktion ablesen.

| $x$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\arctan x$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |

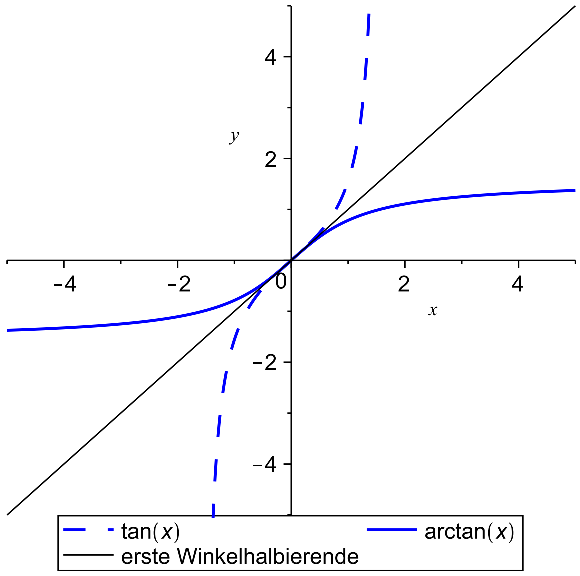



Abbildung 35: Tangens und Arkustangens

Den Graphen der Arkustangensfunktion erhält man durch Spiegelung der Tangensfunktion für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ an der ersten Winkelhalbierenden.

**Arkuskotangens**
$\cot\,:\,(0;\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt Arkuskotangens.
$\operatorname{arccot}\,:\mathbb{R} \longrightarrow (0;\pi)$ ist definiert durch

$$\operatorname{arccot} x = y \iff \cot y = x.$$

Wertetabelle für die Kotangensfunktion auf dem Intervall $(0;\pi)$:

| $x$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cot x$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ |

Daraus kann man nun eine Wertetabelle für die Arkuskotangensfunktion ablesen.

| $x$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{arccot} x$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |

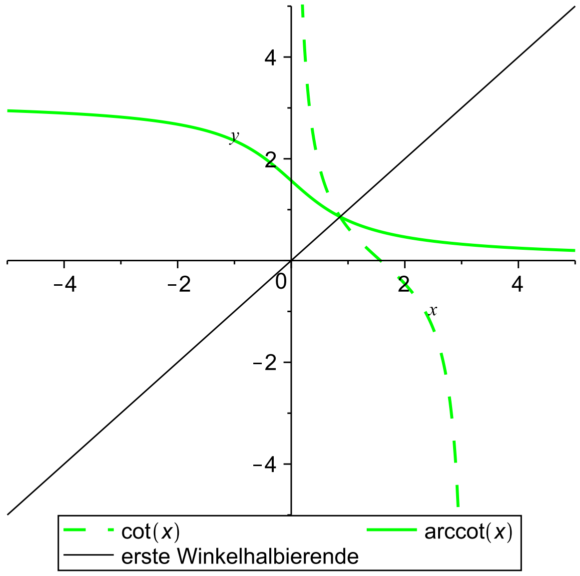



Abbildung 36: Kotangens und Arkuskotangens

Den Graphen der Arkuskotangensfunktion erhält man durch Spiegelung der Kotangensfunktion für $x \in (0;\pi)$ an der ersten Winkelhalbierenden.

## 33 Zusammengesetzte Funktionen

Aus den mathematischen Grundfunktionen werden durch Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen zusammengesetzte Funktionen gebildet.

**Definition**

Seien $f$ und $g$ Funktionen mit den Definitionsbereichen $\mathbb{D}_f$ und $\mathbb{D}_g$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann definiert man

$$h = f + g \text{ durch } h(x) = f(x) + g(x) \text{ mit } \mathbb{D}_h = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g,$$

$$h = f - g \text{ durch } h(x) = f(x) - g(x) \text{ mit } \mathbb{D}_h = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g,$$

$$h = f \cdot g \text{ durch } h(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ mit } \mathbb{D}_h = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g,$$

$$h = \frac{f}{g} \text{ durch } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ mit } \mathbb{D}_h = (\mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\},$$

$$h = a \cdot f \text{ durch } h(x) = a \cdot f(x) \text{ mit } \mathbb{D}_h = \mathbb{D}_f.$$

**Beispiel**

a) Polynome entstehen aus $f(x) = x$ und Konstanten durch Summen- und Produktbildung.

b) Rationale Funktionen enstehen aus Polynomen durch Division.

**Beispiel**

a) Für $f(x) = e^x$ und $g(x) = \ln(x)$ gilt $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}^+$. $f+g$, $f-g$ und $f \cdot g$ haben also den Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$.
Da $\ln(x) = 0 \iff x = 1$ gilt, ist $\mathbb{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

b) Für $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-1}{x^2-6x-7}$ gilt $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.
Die Nullstellen von $g(x)$ lassen sich mit der $pq$-Formel zu $x = -1$ und $x = 7$ bestimmen.
Also ist $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}\backslash\{-1; 7\}$.

**Aufgabe**

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich.

a) $h_1(x) = x^{-2} + x^2$ b) $h_2(x) = \sqrt[4]{x} - \dfrac{1}{x^4 - 5x^2 + 4}$

**Definition**

Seien $f$ und $g$ Funktionen mit den Definitionsbereichen $\mathbb{D}_f$ und $\mathbb{D}_g$. Dann definiert man die Verkettung

$$h = f \circ g \text{ durch } h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Der Definitionsbereich von $h$ enthält alle Elemente $x \in \mathbb{D}_g$ für die gilt, dass $y = g(x)$ im Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ ist, d. h. $\mathbb{D}_h = \{x \in \mathbb{D}_g : g(x) \in \mathbb{D}_f\}$.

Statt Verkettung von $f$ und $g$ sagt man auch Hintereinanderausführung. Bei $f(g(x))$ nennt man $f$ die „äußere“ und $g$ die „innere“ Funktion.

**Beispiel**

Sei $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = x^2 - 9$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$. Dann ist $f(g(x)) = \ln(x^2 - 9)$. Da der Logarithmus nur für positive Werte definiert ist, müssen wir die Ungleichung $x^2 - 9 > 0$ lösen. Es gilt

$$x^2 - 9 > 0 \iff (x-3)(x+3) > 0 \iff x > 3 \vee x < -3.$$

Also ist $\mathbb{D}_{f \circ g} = (-\infty; -3) \cup (3; \infty) = \mathbb{R}\backslash[-3; 3]$.

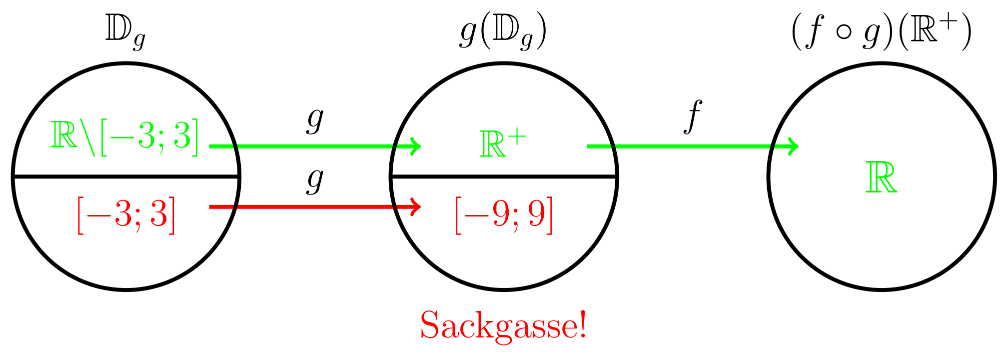



Abbildung 37: Verkettungen von Funktionen

**Beispiel**

Sei $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = -x^2 + 6x + 5$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$ und $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$. Dann ist $f(g(x)) = \sqrt{-x^2 + 6x + 5}$.
Da die Wurzelfunktion nur für nichtnegative Werte definiert ist, müssen wir die Ungleichung

$-x^2 + 6x + 5 \geq 0 \iff x^2 - 6x - 5 \leq 0$ lösen.
Mit der $pq$-Formel erhält man

$$x^2 - 6x - 5 = [x - (3 - \sqrt{14})][x - (3 + \sqrt{14})].$$

Also gilt

$$x^2 - 6x - 5 \leq 0 \iff [x - (3 - \sqrt{14})][x - (3 + \sqrt{14})] \leq 0 \iff x \in [3 - \sqrt{14}; 3 + \sqrt{14}].$$

Damit ist $\mathbb{D}_{f \circ g} = [3 - \sqrt{14}; 3 + \sqrt{14}]$.

**Aufgabe**

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich.

a) $h(x) = \ln(1 - x)$ b) $h(x) = \ln(|x|)$ c) $h(x) = \ln(|x + 3|)$

d) $h(x) = \ln(|x^2 - 3|)$ e) $h(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 16}$ f) $h(x) = \sqrt{16 - 6x - x^2}$

**Aufgabe**

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x^2$ und $p(x) = \sqrt{x + 7}$. Bestimmen Sie die Funktionsterme und Definitionsbereiche von

a) $h_1 = f \circ g \circ p$ b) $h_2 = p \circ g \circ f$ c) $h_3 = g \circ (f + p)$

# 34 Zahlenfolgen

In diesem Kapitel werden wir uns mit Zahlenfolgen beschäftigen. Die Konvergenz von Funktionen bei Annäherung an eine Stelle $x_0$ werden wir mit solchen Zahlenfolgen erklären. Dies ist eine wichtige Grundlage der Differentialrechnung. Ein wirkliches Verständnis von Begriffen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit ist ohne Basiswissen über Grenzwerte nicht möglich.

**Definition**

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$ heißt reelle Zahlenfolge. Jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird eine reelle Zahl $a_n$ zugeordnet. Die Zahl $a_n$ heißt $n$-tes Folgenglied.

Folgen lassen sich in aufzählender Art

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots$$

oder in beschreibender Form durch Angabe des Bildungsgesetzes für das $n$-te Folgenglied

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ oder einfach } (a_n)$$

angeben. In den runden Klammern steht praktisch die Funktionsvorschrift.

**Beispiel**

a) $1; 2; 3; 4; \cdots = (n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \cdots = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

c) $-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

d) $-\frac{1}{2}; +\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; +\frac{1}{16}; \dots = \left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie jeweils die ersten 5 Folgenglieder.

a) $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ b) $(3n-5)_{n\in\mathbb{N}}$ c) $\left((-1)^n(17-2n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Aufgabe**

Geben Sie jeweils das Bildungsgesetz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

a) $2; -2; 2; -2; 2; -2; \dots$

b) $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \frac{7}{6}; \dots$

c) $1; 3; 7; 15; 31; 63; \dots$

d) $1; 4; 27; 256; 3125; 46656; \dots$

Folgen lassen sich wie Funktionen im kartesischen Koordinatensystem oder auch am Zahlenstrahl veranschaulichen. Da der Definitionsbereich bei Zahlenfolgen die natürlichen Zahlen sind, erhält man nur einzelne Punkte.

**Beispiel**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(2^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$$

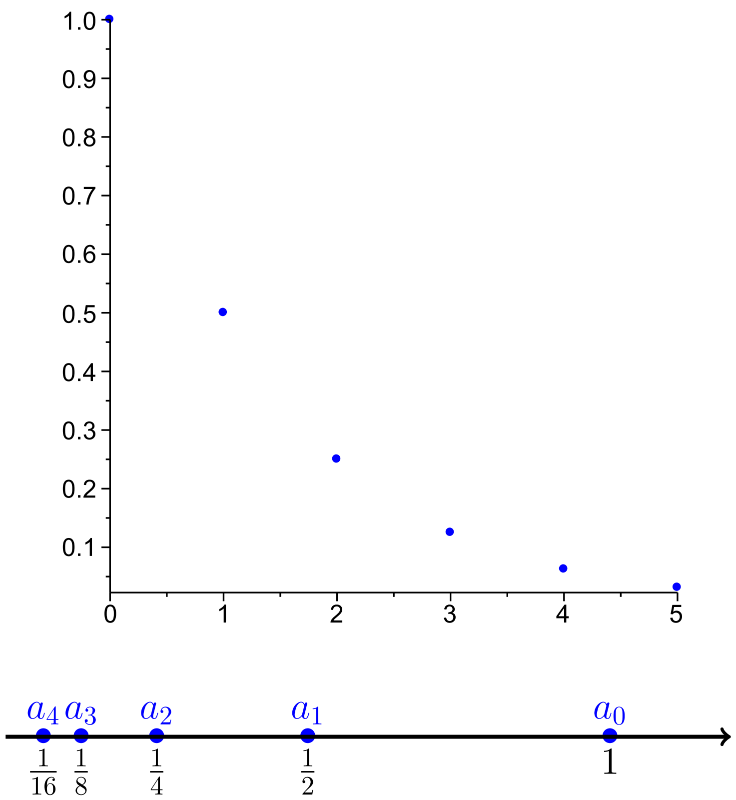



Abbildung 38: Darstellung der Folge $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$

**Beispiel**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n \cdot n\right)_{n\in\mathbb{N}} = -1; 2; -3; 4; -5; 6; \ldots$$

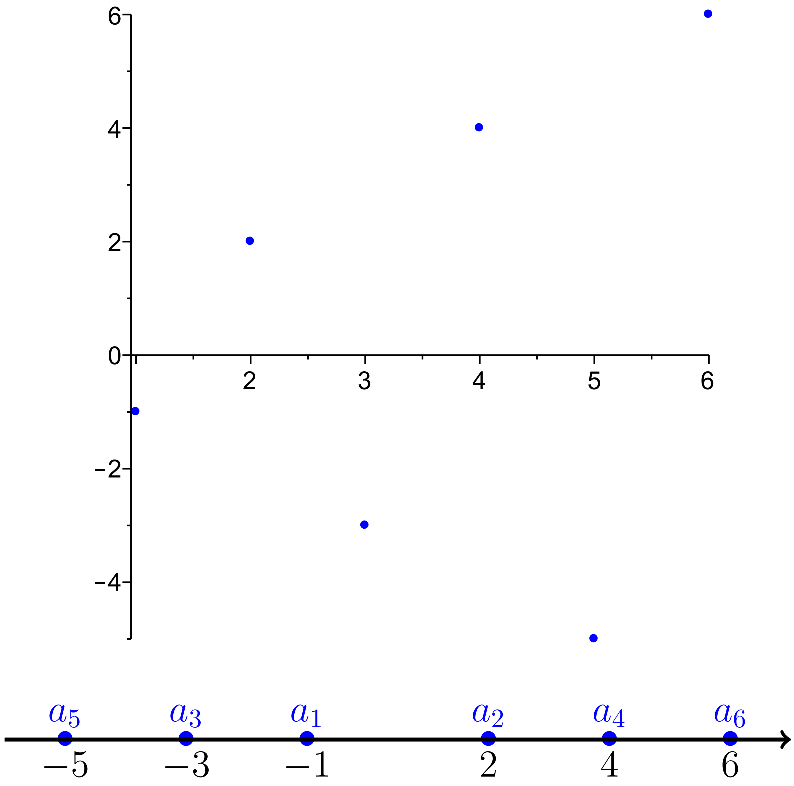



Abbildung 39: Darstellung der Folge $\left((-1)^n \cdot n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Aufgabe**

Skizzieren Sie jeweils die ersten Folgenglieder im kartesischen Koordinatensystem und am Zahlenstrahl.

a) $\left(n^2 - 3n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ b) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Definition**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt arithmetische Folge, wenn mit $a,d \in \mathbb{R}$ gilt

$$a_n = a + (n-1)d\,, n \in \mathbb{N}, \text{ d. h. } (a_n) = a;\ a+d;\ a+2d;\ a+3d;\ \ldots$$

bzw. rekursiv

$$a_{n+1} = a_n + d \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_1 = a.$$

$a_{n+1}$ unterscheidet sich also vom Vorgänger $a_n$ um eine additive Konstante $d$.

**Beispiel**

a) $2; 4; 6; 8; 10; 12; \cdots = (2n)_{n\in\mathbb{N}} = (2 + (n-1)\cdot 2)_{n\in\mathbb{N}}$: Folge der geraden Zahlen ($a = 2$, $d = 2$).

b) $1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots = (2n-1)_{n\in\mathbb{N}} = (1+(n-1)\cdot 2)_{n\in\mathbb{N}}$: Folge der ungeraden Zahlen ($a = 1$, $d = 2$).

**Aufgabe**

Geben Sie die arithmetischen Folgen für die gegebenen Werte für $a$ und $d$ an.

a) $a = 7,\ d = \dfrac{1}{2}$ b) $a = -5,\ d = \sqrt{\pi}$

**Definition**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt geometrische Folge, wenn mit $a,q \in \mathbb{R}$ gilt

$$a_n = aq^{n-1}\,, n \in \mathbb{N}, \text{ d. h. } (a_n) = a;\ aq;\ aq^2; \dots$$

bzw. rekursiv

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_1 = a.$$

$a_{n+1}$ unterscheidet sich also vom Vorgänger $a_n$ um eine multiplikative Konstante $q$.

**Beispiel**

a) $1; 10; 100; 1000; 10000; \dots = (10^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$: Folge der Zehnerpotenzen, geometrische Folge mit $a = 1$, $q = 10$.

b) $4; 4\sqrt{2}; 8; 8\sqrt{2}; \dots = \left(4(\sqrt{2})^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: geometrische Folge mit $a = 4$, $q = \sqrt{2}$.

**Aufgabe**

Geben Sie die geometrischen Folgen für die gegebenen Werte für $a$ und $q$ an.

a) $a = 3,\ q = \sqrt[3]{2}$ b) $a = 2,\ q = -\dfrac{1}{3}$

**Definition**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt alternierend, wenn je zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder $a_n$ und $a_{n+1}$ unterschiedliches Vorzeichen haben, d. h. wenn

$$a_n a_{n+1} < 0 \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beispiel**

$$-\frac{1}{2}; +\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; +\frac{1}{16}; \dots = \left((-1)^n \frac{1}{2^n}\right)$$

Für Funktionen haben wir bereits allgemein die Begriffe Monotonie und Beschränktheit definiert. Da Folgen Funktionen mit speziellem Definitionsbereich sind, lassen sich die Begriffe übertragen. Hier genügt der Vergleich jeweils aufeinanderfolgender Folgenglieder.

**Definition**

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton steigend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt streng monoton steigend, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. streng monoton fallend, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

**Beispiel**

Wir untersuchen die Monotonieeigenschaften der Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Wir vermuten, dass die Folge streng monoton steigend ist. Es gilt

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\iff \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} && | \cdot n(n+1) \\ &\iff (n-1)(n+1) < n^2 \\ &\iff n^2 - 1 < n^2 && | - n^2 \\ &\iff -1 < 0. \end{aligned}$$

Da $-1 < 0$ offensichtlich eine wahre Aussage ist, gilt auch $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist also streng monoton steigend.

**Aufgabe**

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Folgen.

a) $\left(\frac{3n^2 - 2n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ b) $(2n + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Definition**

a) Eine Folge $(a_n)$ heißt nach oben beschränkt, falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $C$ heißt dann obere Schranke von $(a_n)$.

b) $(a_n)$ heißt nach unten beschränkt, falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \geq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $C$ heißt dann untere Schranke von $(a_n)$.

c) Eine Folge $(a_n)$ heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Dies ist genau dann erfüllt, wenn eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Beispiel**

a) Die Folge $(a_n) = \left(\frac{1-3n}{n}\right)$ ist beschränkt, da $|a_n| = \left|\frac{1}{n} - 3\right| = 3 - \frac{1}{n} < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $(b_n) = (2n-1)$ ist nach unten beschränkt, da $1 \leq 2n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) $(c_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$ ist beschränkt, da $|c_n| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe**

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen nach unten beschränkt, nach oben beschränkt oder unbeschränkt sind.

a) $(3n + (-1)^n)$ b) $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ c) $\left(\frac{1+2^n}{1+2^n+(-2)^n}\right)$

d) $\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)$ e) $\left(1000 - \frac{1+n^2}{n}\right)$ f) $(\sin(2^n))$

**Aufgabe**

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Eine monoton wachsende Folge ist immer nach unten beschränkt.

b) Eine streng monoton fallende Folge ist immer beschränkt.

c) Eine alternierende Folge ist immer unbeschränkt.

d) Eine geometrische Folge ist immer monoton wachsend.

e) Eine arithmetische Folge ist nie streng monoton fallend.

**Beispiel**

Bevor wir genauer definieren, was unter der Konvergenz einer Folge zu verstehen ist, betrachten wir einige Beispiele.

a) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right) = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$ ist beschränkt und streng monoton fallend. Jedes Folgenglied ist zwar von Null verschieden, mit wachsendem Index $n$ wird der Abstand zu Null aber immer kleiner.

b) Die Folge $(2n-1) = 1; 3; 5; 7; \ldots$ ist streng monoton wachsend und nach oben nicht beschränkt. Es kann daher keine reelle Zahl geben, der sich die Folgenglieder beliebig nähern.

**Definition**

Sei $(a_n)$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. $(a_n)$ heißt konvergent gegen $a$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n(\varepsilon)$ gibt, so dass $a_{n(\varepsilon)}$ und alle Nachfolger in einem Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen, d. h. $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$ erfüllt ist. Ab einem Index $n(\varepsilon)$ unterscheiden sich die Folgenglieder von $a$ also um weniger als $\varepsilon$.
$a$ heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 heißt Nullfolge.
Folgen, die nicht konvergieren, nennt man divergent.

**Beispiel**

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$

Wir vermuten, dass die Folge gegen 0 konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$|a_n| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Für jedes $n > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt also $|a_n| < \varepsilon$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n+5}{3n}\right) = \frac{7}{3}; \frac{9}{6}; \frac{11}{9}; \frac{13}{12}; \frac{15}{15}; \frac{17}{18}; \ldots$

Es ist z. B. $b_{100} = \frac{205}{300}$, $b_{1000} = \frac{2005}{3000}$, $b_{10000} = \frac{20005}{30000}$.

Wir vermuten, dass die Folge gegen $\frac{2}{3}$ konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\left|b_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{2n+5}{3n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \iff \frac{5}{3n} < \varepsilon \iff \frac{5}{3\varepsilon} < n.$$

Für jedes $n > \frac{5}{3\varepsilon}$ gilt also $\left|b_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n} = \frac{2}{3}.$$

**Aufgabe**

a) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{1+n}{1-n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}, n\geq 2}$ eine Nullfolge ist.

b) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{\pi - 3n^2}{2+\pi n^2}\right)$ gegen $-\frac{3}{\pi}$ konvergiert.

**Eigenschaften konvergenter Folgen**

Seien $(a_n)$, $(b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$. Weiter sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

a) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$,

b) $(a_n + b_n)$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$,

c) $(a_n - b_n)$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$,

d) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$,

e) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$.

**Beispiel**

Wir haben bereits gezeigt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt. Also gilt auch

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,\\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{k \text{ Faktoren}} = 0.
\end{aligned}$$

**Beispiel**

a) Sei $(a_n) = \left(\dfrac{1+3n+5n^2}{4n^2}\right)$. Wir kürzen durch die höchste Potenz von $n$ im Nenner.

$$a_n = \frac{1+3n+5n^2}{4n^2} = \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+5\right)}{4n^2} = \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+5}{4}$$

Jede einzelne Folge konvergiert, also gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 5}{\lim\limits_{n\to\infty} 4} = \frac{0+0+5}{4} = \frac{5}{4},$$

d. h. $(a_n)$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{5}{4}$.

b) Sei $(a_n) = \left(\dfrac{3n^2+2}{4n+1}\right)$. Wir kürzen durch die höchste Potenz von $n$ im Nenner.

$$a_n = \frac{3n^2+2}{4n+1} = \frac{n\left(3n+\frac{2}{n}\right)}{n\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3n+\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}}$$

ist nicht beschränkt, denn es gilt $3n + \dfrac{2}{n} \geq 3n$, ferner ist $4 + \dfrac{1}{n} \leq 5$, also

$$\frac{3n+\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}} \geq \frac{3}{5}n.$$

Somit ist $(a_n)$ divergent.

c) Sei $(a_n) = \left(\dfrac{3n^2+4}{n^3+1}\right)$. Wir kürzen durch die höchste Potenz von $n$ im Nenner.

$$a_n = \frac{n^3\left(\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}.$$

Jede Einzelfolge konvergiert, also gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

**Aufgabe**

Sei $(a_n) = \left(\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right)$ eine Folge mit $P(n) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i n^i$, $Q(n) = \sum\limits_{i=0}^{M} b_i n^i$, $a_m \neq 0$, $b_M \neq 0$.
$P(n)$ und $Q(n)$ sind also Polynome in $n$ vom Grad $m$ bzw. $M$.
Was können Sie über $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ aussagen, falls

a) $m = M$ b) $m < M$ c) $m > M$?

Begründen Sie Ihre Aussagen.

Für die Untersuchung des Konvergenzverhaltens von Folgen gibt es einige nützliche Kriterien.

**Satz**

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beispiel**

Die Folge $(\ln(n))$ ist nicht beschränkt, also divergent.

**Satz**

Wenn eine Folge monoton wachsend oder fallend und beschränkt ist, dann ist sie konvergent.

**Beispiel**

Wir betrachten die Folge $(a_n) = \left(\dfrac{2^n}{n!}\right)$.
Die Folge ist monoton fallend, denn

$$\begin{aligned} a_{n+1} \geq a_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^n}{n!} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2^{n+1}}{2^n} \leq \frac{(n+1)!}{n!} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 \leq n+1 \qquad \text{(richtig für } n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Die Folge ist beschränkt, denn es gilt $0 \leq a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ und da $(a_n)$ monoton fallend ist $a_n \leq a_1 = 2$, also $0 \leq a_n \leq 2$.
Da die Folge $(a_n)$ monoton fallend und beschränkt ist, ist sie konvergent.

**Aufgabe**

Zeigen Sie wie im Beispiel, dass jede Folge $(a_n) = \left(\dfrac{m^n}{n!}\right)$ mit $m \in \mathbb{N}$ konvergiert.

**Einschließungssatz (Sandwichsatz)**

Seien $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Der Satz gilt auch, wenn die Ungleichung $a_n \leq b_n \leq c_n$ nicht für alle $n \in \mathbb{N}$, sondern von einem Index $N$ an für alle $n > N$ gilt.

**Beispiel**

Wir betrachten noch einmal die Folge $(c_n) = \left(\frac{2^n}{n!}\right)$. Es gilt

$$a_n = 0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{2}{4}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{<1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{2}{n-1}}_{<1} \cdot \frac{2}{n} < 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n} = b_n.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ist, folgt nach dem Sandwichsatz auch $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{n!}\right) = 0.$

**Aufgabe**

a) Verwenden Sie den Einschließungssatz, um den Grenzwert der Folge $\left(\frac{\cos(n)}{n}\right)$ zu bestimmen.

b) Verwenden Sie den Einschließungssatz, um den Grenzwert der Folge $\left(\frac{4n^2 + \cos(\pi^n)}{3n^2 + 7 + \sin(e^n)}\right)$ zu bestimmen.

**Liste einiger konvergenter Folgen**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} q^n &= 0 \text{ falls } |q| < 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \text{ für jede feste Zahl } a > 0 \\
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} &= 0 \text{ für jede feste Zahl } a \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} &= 0
\end{aligned}$$

**Bestimmte Divergenz, uneigentliche Grenzwerte**

Wenn die Glieder einer Folge beliebig groß oder beliebig klein werden, spricht man von bestimmt divergenten Folgen und uneigentlichen Grenzwerten.

**Definition**

Sei $(a_n)$ eine reelle Folge. Man schreibt

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, wenn es zu jeder Zahl $C > 0$ einen Index $N(C) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > C$ für alle $n \geq N(C)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, wenn es zu jeder Zahl $C < 0$ einen Index $N(C)$ gibt, so dass $a_n < C$ für alle $n \geq N(C)$.

**Aufgabe**

In dieser Aufgabe sollen einige Regeln für Grenzwerte erarbeitet werden. Dazu sind die Lücken passend zu ergänzen.

a) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt, so ist die Folge $(a_n)$ nach oben nicht beschränkt und nur endlich viele Folgenglieder $a_n$ sind negativ.

b) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ gilt, ______________________________________________

______________________________________________ .

c) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und $b_n > 0$ für $n \geq N$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} =$________.

d) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und ________, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = -\infty$.

e) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = \infty$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{c_n} =$________.

In dem folgenden Satz sind einige Regeln für das Rechnen mit eigentlichen und uneigentlichen Grenzwerten zusammengestellt.

**Satz**

Seien $(a_n)$ und $(b_n)$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, wobei $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Dann gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$, außer für $a = +\infty$, $b = -\infty$ oder $a = -\infty$, $b = +\infty$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$, außer für $a = +\infty = b$ oder $a = -\infty = b$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ außer für $a = \pm\infty$, $b = 0$ oder $a = 0$, $b = \pm\infty$.

Dabei setzt man $x + \infty = \infty$, $x - \infty = -\infty$, $x \cdot \infty = \infty$ für $x > 0$, $x \cdot \infty = -\infty$ für $x < 0$.

# 35 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwerte reeller Funktionen lassen sich auf Grenzwerte von Folgen zurückführen. Dies erklären wir zunächst an einem Beispiel.

**Beispiel**

Sei $f(x) = x^2$ , $P_0\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ ein fester Punkt der Parabel und $P(x;x^2)$ variabel.

Die Steigung $s$ der Geraden durch $P_0$ und $P$ beträgt

$$s(x) \quad = \quad \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}}.$$

Die Steigung $s$ hängt von $x$ ab. Sie ist also eine Funktion von x. Der Definitionsbereich der Funktion $s(x)$ ist $\mathbb{D}_s = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Was passiert mit $s(x)$ für $x \to \dfrac{1}{2}$ ?

Wir betrachten Funktionswerte $s(x)$ in der Nähe von $x = \dfrac{1}{2}$.

| $x$ | $0.4$ | $0.49$ | $0.499$ | $\ldots$ | $0.6$ | $0.51$ | $0.501$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s(x)$ | $0.9$ | $0.99$ | $0.999$ | $\ldots$ | $1.1$ | $1.01$ | $1.001$ | $\ldots$ |

Allgemein gilt für $x \in \mathbb{D}_s$ mit Anwendung der dritten binomischen Formel

$$s(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2}.$$

Es liegt die Vermutung nahe, dass $s(x) \to 1$ für $x \to \frac{1}{2}$ gilt.

**Definition**

Sei $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $(x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{D}_f$ für ein $\varepsilon > 0$. $f$ heißt an der Stelle $x_0$ konvergent gegen eine Zahl $f_0$, wenn für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \in \mathbb{D}_f$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f_0$ ist.
$f_0$ heißt dann Grenzwert von $f$ an der Stelle $x_0$ und man schreibt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0.$$

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ gilt, so schreibt man

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ bzw. } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

**Beispiel**

a) Sei $s(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}}$. Wir bestimmen $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} s(x)$.

Sei $(x_n)$ eine beliebige Folge mit den Eigenschaften $x_n \in \mathbb{D}_s = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.
Dann ist

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} s(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - \frac{1}{4}}{x_n - \frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_n + \frac{1}{2}\right)\left(x_n - \frac{1}{2}\right)}{x_n - \frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Also ist $\lim\limits_{x\to 1} s(x) = 1$.

b) Sei $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x > 0, \\ x - 1 & , \ x < 0. \end{cases}$

Für die Folge $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,
für die Folge $(x_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n} - 1\right) = -1$.
Da $0 \neq -1$, besitzt die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert.

**Aufgabe**

Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ für $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & , \ x > 1, \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 & , \ x < 1. \end{cases}$

**Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen**

Seien $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f_0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g_0$. $c \in \mathbb{R}$ sei eine Konstante. Dann gilt

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot f_0$,

b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f_0 + g_0$,

c) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f_0 - g_0$,

d) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f_0 \cdot g_0$,

e) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{f_0}{g_0}$, falls $g_0 \neq 0$.

**Rechts- und linksseitige Grenzwerte**

In manchen Zusammenhängen, wie z. B. an Intervallrändern, betrachtet man sogenannte einseitige Grenzwerte.

**Definition**

a) Seien $f(x)$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $(x_0; x_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{D}_f$ für ein $\varepsilon > 0$.
$f_r$ heißt rechtsseitiger Grenzwert von $f$ für $x \to x_0$, wenn $f(x_n)$ gegen $f_r$ konvergiert für jede Folge $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$.
Man schreibt dann

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f_r.$$

b) Seien $f(x)$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $(x_0 - \varepsilon; x_0) \subset \mathbb{D}_f$ für ein $\varepsilon > 0$.
$f_l$ heißt linksseitiger Grenzwert von $f$ für $x \to x_0$, wenn $f(x_n)$ gegen $f_l$ konvergiert für jede Folge $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$ Man schreibt dann

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f_l.$$

**Beispiel**

Sei $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$.

Dies ist die sogenannte Signumfunktion (gesprochen „Signum von $x$“).
Offensichtlich gilt
$\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$.
Der Grenzwert für $x \to 0$ existiert nicht.

Abbildung 40: Signumfunktion

# 36 Stetigkeit von Funktionen

Im Folgenden befassen wir uns mit dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion. Anschaulich kann man sich das so vorstellen, dass man den Graphen einer stetigen Funktion zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Mathematisch gesehen genügt diese anschauliche Vorstellung jedoch nicht.

**Definition**

Sei $f(x)$ in einer Umgebung von $x_0$ definiert. $f$ heißt stetig an der Stelle $x_0$, wenn

a) rechts- und linksseitiger Grenzwert an der Stelle $x_0$ existieren,

b) rechts- und linksseitiger Grenzwert an der Stelle $x_0$ gleich sind und

c) der Grenzwert an der Stelle $x_0$ mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt.

**Beispiel**

Die Signumfunktion aus dem letzten Beispiel ist nicht stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

Wichtig im Zusammenhang mit den mathematischen Grundfunktionen ist der folgende Satz.

**Satz**

Die mathematischen Grundfunktionen sind stetig auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich. Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

**Beispiel**

Da $f(x) = e^x$ stetig ist auf $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g(x) = \sqrt{x}$ stetig ist auf $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}_0^+$, ist $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\sqrt{x}}$ stetig auf $\mathbb{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}_0^+$.

Im Folgenden betrachten wir noch einige Beispiele zu den Themen Grenzwerte und Stetigkeit. Dabei greifen wir auch noch einmal das Thema der behebbaren Definitionslücken auf, das im Zusammenhang mit der Untersuchung des Verhaltens rationaler Funktionen im Bereich von Definitionslücken behandelt wurde (vgl. Abschnitt 25).

**Beispiel**

Sei $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x - 12}{x^2 + 8x + 15} = \dfrac{z(x)}{n(x)}$. Um den Definitionbereich zu bestimmen, berechnet man die Nullstellen des Nennerpolynoms mit der $pq$-Formel. Diese sind $-3$ und $-5$. Daraus folgt $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-3; -5\}$ und $n(x) = (x + 3)(x + 5)$.
Wir betrachten nun das Verhalten der Funktion $f$ in der Nähe der Definitionslücken genauer. Die Werte des Zählerpolynoms $z(-3) = 0$ und $z(-5) = 648$ können Sie z. B. mit dem Hornerschema bestimmen.
$-3$ ist also auch Nullstelle es Zählerpolynoms, $-5$ nicht. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -3} f(x) &= \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x^3 - 6x^2 + 9x - 4)}{(x+3)(x+5)} = \lim_{x \to -3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x+5} = \frac{-112}{2} = -56 \\ \lim_{x \to -5} f(x) &= \infty, \quad \lim_{x \to -5} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Wenn man sich von links der Stelle $x = -5$ nähert, gehen die zugehörigen Funktionswerte gegen $\infty$, bei der Annäherung von rechts gegen $-\infty$. Man spricht in einem solchen Fall von einer Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Da $-5$ einfache Nullstelle des Nenners ist, spricht man

genauer von einer Polstelle erster Ordnung mit Vorzeichenwechsel.
Für die Stelle $x = -3$ ist der Sachverhalt anders. Da $x = -3$ sowohl Nullstelle des Zählers als auch Nullstelle des Nenners ist, lässt sich der Faktor $(x+3)$ kürzen. Man spricht in diesem Fall von einer hebbaren Singularität. Die Funktion lässt sich an der Stelle $x = -3$ stetig ergänzen.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \mathbb{D}_f, \\ -29 & , \quad x = -3, \end{cases} \quad \text{ist stetig auf } \mathbb{D}_g = \mathbb{D}_f \cup \{-3\} = \mathbb{R}\backslash\{-5\}.$$

**Aufgabe**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+2x-8)}{(x+1)(x^2+3x-4)}$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Zählerpolynoms $z(x)$ und des Nennerpolynoms $n(x)$.

b) Geben Sie den Definitionsbereich von $f$ an.

c) An welchen Stellen hat die Funktion Polstellen?

d) Gibt es hebbare Singularitäten? Wenn ja, bestimmen Sie die stetige Ergänzung.

**Beispiel**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & , \quad x \in [0;1], \\ ax - x^3 + x & , \quad x \in (1;2), \\ \dfrac{b(x^{5-a} - x - 1)}{x^2+1} & , \quad x \in [2;3]. \end{cases}$

Die Parameter $a$ und $b$ sollen so bestimmt werden, dass die Funktion auf $\mathbb{D}_f = [0;3]$ stetig ist. Es sind die Stellen $x = 1$ und $x = 2$ genauer zu untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (2x + x^2) = 3 = f(1), \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (ax - x^3 + x) = a. \end{aligned}$$

Damit $f$ an der Stelle $x = 1$ stetig ist, muss folglich $a = 3$ sein. Mit $a = 3$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} (4x - x^3) = 0, \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{b(x^2 - x - 1)}{x^2+1} = b \cdot \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Folglich muss $b = 0$ sein. Für $a = 3$ und $b = 0$ ist die Funktion insgesamt stetig auf $\mathbb{D}_f$.

**Aufgabe**

Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \le 0, \\ \ln(x+a) & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist.

# 37 Grundlagen der Differentialrechnung

In diesem Abschnitt wird der Begriff der ersten Ableitung einer Funktion eingeführt. Dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel, in dem auch Begriffe wie „durchschnittliche und momentane Änderungsraten“ und „Sekanten und Tangenten“ gegenübergestellt werden.

**Beispiel**

Die Kosten für die Beseitigung von $p\,\%$ Verunreinigungen in einem See sind durch

$$b(p) = \frac{10p}{105-p}, p \in [0;100],$$

gegeben.
Wertetabelle

| $p$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b(p)$ | 0 | $\frac{20}{19}$ | $\frac{40}{17}$ | 4 | $\frac{80}{13}$ | $\frac{100}{11}$ | $\frac{40}{3}$ | 20 | 32 | 60 | 200 |

Wir fragen nun, was der Zuwachs an Kosten ist, wenn statt $p\,\%$ der Verunreinigungen $(p+h)\,\%$, $h > 0$, $p+h < 100$, beseitigt werden sollen. Es gilt

$$b(p+h) - b(p) = \frac{10(p+h)}{105-(p+h)} - \frac{10p}{105-p} = \frac{1050h}{[105-(p+h)](105-p)}.$$

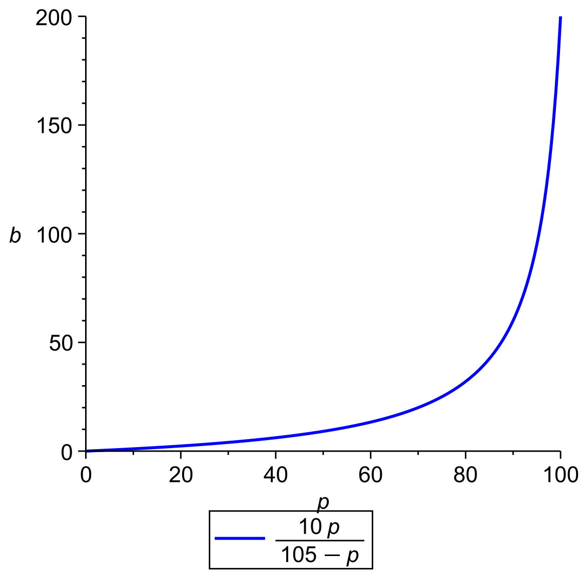



Abbildung 41: Kosten für die Beseitigung von Verunreinigungen

Z. B. beträgt der Zuwachs an Kosten $b(30) - b(20) = \frac{28}{17} \approx 1{,}65$ für die Beseitigung von 30 % statt 20 %, $b(60) - b(50) = \frac{144}{33} \approx 4{,}42$ für die Beseitigung von 60 % statt 50 % und $b(100) - b(80) = 168$ für die Beseitigung von 100 % statt 80 %.

Will man nun eine Aussage über die durchschnittliche Änderung der Kosten machen, so muss man die Änderung der Kosten im Verhältnis zur Änderung in $p$ betrachten.

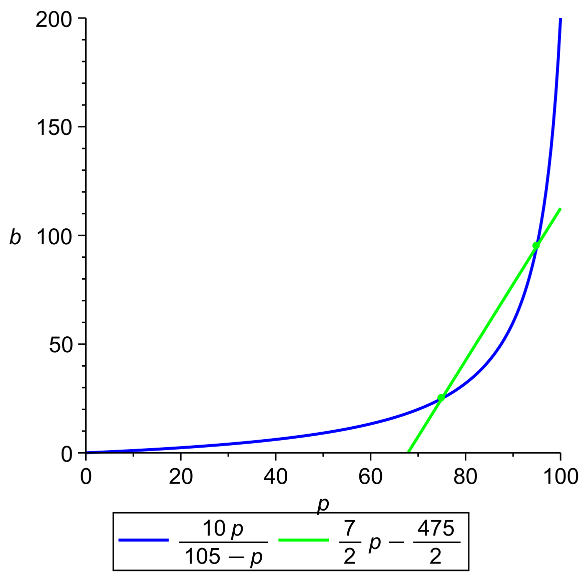



Abbildung 42: Sekante, durchschnittliche Änderungsrate

Der durchschnittliche Zuwachs an Kosten für die Beseitigung von 95 % statt 75 % beträgt $\dfrac{b(95)-b(75)}{95-75} = \dfrac{7}{2}$.
Dieser Wert entspricht der Steigung der Sekanten durch die Punkte $(75; b(75))$ und $(95; b(95))$.

## Definition

Sei $f$ eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion. Die durchschnittliche Änderungsrate von $f$ im Intervall $[x_0;x_1]$ mit $a \le x_0 < x_1 \le b$ beträgt

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Geometrisch ist dies die Steigung der Geraden (der Sekante) durch die Punkte $(x_0; f(x_0))$ und $(x_1; f(x_1))$.
Der Ausdruck $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ heißt Differenzenquotient.

## Beispiel

Sei $f(x) = x^2 + 1$.
Die durschnittliche Änderungsrate von $f$ im Intervall $[-1; 3]$ beträgt

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = 2.$$

Die durschnittliche Änderungsrate von $f$ im Intervall $[-2; 7]$ beträgt

$$\frac{f(7)-f(-2)}{7-(-2)} = 5.$$

## Aufgabe

Bestimmen Sie die durchschnittlichen Änderungsraten der Funktionen auf den angegegebenen Intervallen.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ für $[1; 2]$ und $[2; 3]$ b) $g(x) = 3 - x^2$ für $[-2; 1]$ und $[-2; 3]$

**Aufgabe**

In der folgenden Tabelle ist die Größe eines Kindes in Abhängigkeit vom Alter angegeben.

| Alter in Jahren | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Größe in cm | 50 | 75 | 87 | 95 | 103 | 110 | 115 | 123 |

a) Wie viel wächst das Kind in den ersten drei Jahren im Durchschnitt pro Jahr?

b) Wie groß ist die durchschnittliche Änderungsrate im Alter von vier bis sieben Jahren?

**Beispiel**

Wir setzen nun die Überlegungen zu den Kosten für die Beseitigung von Verunreinigungen in einem See fort.
Allgemein beträgt die durchschnittliche Änderungsrate bei der Beseitigung von $(75+h)\,\%$ statt $75\,\%$ der Verunreinigungen $\dfrac{b(75+h)-b(75)}{(75+h)-75}=\dfrac{35}{30-h}$. Geometrisch ist dies die Steigung der Sekanten durch die Punkte $P_0(75;25)$ und $P_h\left(75+h;\dfrac{10(75+h)}{30-h}\right)$.
Wir interessieren uns nun dafür, was passiert, wenn $P_h$ immer näher an $P_0$ rückt, d. h. $|h|$ immer kleiner wird. Anders ausgedrückt betrachten wir den Grenzwert für $h$ gegen 0

$$\lim_{h\to 0}\frac{b(75+h)-b(75)}{(75+h)-75}=\lim_{h\to 0}\frac{35}{30-h}=\frac{7}{6}.$$

Dies ist die momentane Änderungsrate der Kosten an der Stelle $p=75$. Geometrisch handelt es sich um die Steigung der Tangenten an den Graphen von $b(p)$ an der Stelle $p=75$.

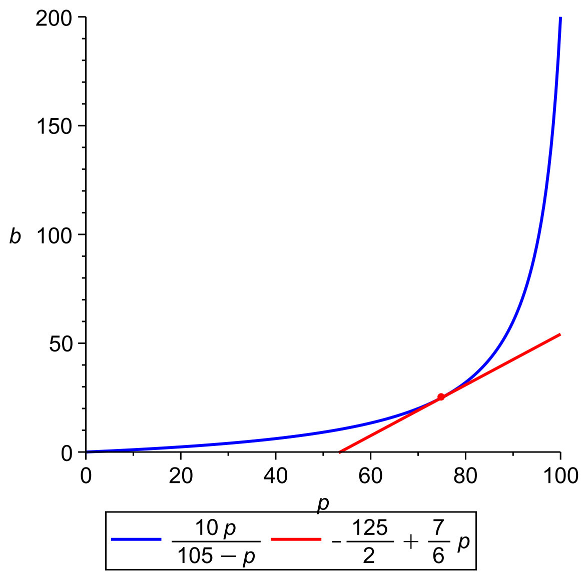



Abbildung 43: Tangente, durchschnittliche Änderungsrate

Diesem Beispiel liegt das folgende allgemeine Konzept zugrunde.

**Definition**

Sei $f$ eine Funktion, die in einer Umgebung von $x_0$ definiert ist. Existiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

so heißt $f$ an der Stelle $x_0$ differenzierbar.
Der Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt erste Ableitung von $f$ an der Stelle $x_0$.
Ist $I$ ein offenes Intervall, so heißt $f$ differenzierbar auf $I$, wenn $f$ an jeder Stelle $x \in I$ differenzierbar ist. Man schreibt dann $f'(x)$.
Eine andere Schreibweise ist $\frac{df(x)}{dx}$ (gesprochen „$df(x)$ nach $dx$“).
$\frac{df(x)}{dx}$ heißt Differentialquotient.

**Beispiel**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.
\end{aligned}$$

Somit ist $f'(x) = 2x$, wie Sie sicher alle bereits in der Schule gelernt haben.

**Aufgabe**

a) Zeigen Sie wie im Beispiel, dass die erste Ableitung von $f(x) = x^3$ durch $f'(x) = 3x^2$ gegeben ist.

b) Können Sie auch allgemein zeigen, dass die erste Ableitung von $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, durch $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ gegeben ist?

   Hinweis: Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz.

**Aufgabe**

Bestimmen Sie für $x > 0$ den Grenzwert $\lim_{n\to 0} \frac{\sqrt{x+n}-\sqrt{x}}{n}$, d. h. die Ableitung von $f(x) = \sqrt{(x)}$.
Hinweis: Verwenden Sie die dritte binomische Formel.

**Ableitungen der mathematischen Grundfunktionen**

Die ersten Ableitungen der mathematischen Grundfunktionen sind in der folgenden Tabelle festgehalten. Dabei sind die jeweiligen Definitionsbereiche zu beachten.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c$ konstant | $0$ |
| $x^a, a \neq 0$ | $ax^{a-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ |
| $\cot(x)$ | $-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$ |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos(x)$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\mathrm{arccot}\,(x)$ | $\frac{-1}{1+x^2}$ |

**Ableitungsregeln**

Die Ableitungen von verknüpften Funktionen berechnet man mit Hilfe der folgenden Ableitungsregeln.
Seien $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar.

a) Faktorregel
$$y = c \cdot f(x), c \in \mathbb{R} \text{ konstant} \implies y' = c \cdot f'(x)$$

b) Summen- bzw. Differenzenregel
$$y = f(x) \pm g(x) \implies y' = f'(x) \pm g'(x)$$

c) Produktregel
$$y = f(x) \cdot g(x) \implies y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

d) Quotientenregel
$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \implies y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

e) Kettenregel
$$y = f(g(x)) \implies y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

**Beispiel**

a) $y = 4x^3 - 5x^2 - 6$
Nach der Regel für konstante Faktoren und der Summenregel differenziert man das Polynom termweise, d. h.

$$y' = 4\left(x^3\right)' - 5\left(x^2\right)' = 4 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x = 12x^2 - 10x.$$

b) $y = \dfrac{x^3 - 2x - 3}{x^2 - 1}$
Die Ableitung des Zählers $f(x) = x^3 - 2x - 3$ ist $f'(x) = 3x^2 - 2$, die Ableitung des Nenners $g(x) = x^2 - 1$ ist $g'(x) = 2x$.
Mit der Quotientenregel folgt

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3x^2 - 2) \cdot (x^2 - 1) \; - \; (x^3 - 2x - 3) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 5x^2 + 2 \; - \; 2x^4 + 4x^2 + 6x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - x^2 + 6x + 2}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

c) $y = x^3 \cdot \sin x$
Anwendung der Produktregel liefert

$$y' = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x.$$

d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$
Die Kettenregel ist anzuwenden. Es ist $y = f(u) = \sqrt{u}$ mit $u = g(x) = x^2 + 1$. Damit ergibt sich

$$y' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

**Aufgabe**

Betrachten Sie diese Aufgabe als „Gehirnjogging“ zum Einüben der Ableitungsregeln.
Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

| | | |
|---|---|---|
| a) $f(x) = 2x^4 - \dfrac{1}{8}x^5 + 5$ | b) $f(t) = \sqrt[5]{t} - \dfrac{1}{\sqrt[6]{t}}$ | c) $f(s) = 8(s^4 + 2s) \cdot e^s$ |
| d) $f(z) = \ln\left(z^2 + 3z - 1\right)$ | e) $f(q) = \left(\dfrac{1}{2}q^3 - \sqrt{q}\right) \cdot \ln\left(q^2 - 1\right)$ | f) $f(p) = \dfrac{p + 4}{p - 4}$ |
| g) $f(x) = x^{-1}(x^2 + 1)\sqrt{x}$ | h) $f(t) = (2t + 1) \cdot \left(\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t}\right)$ | i) $f(z) = \dfrac{\sqrt{z} - 1}{\sqrt{z} + 2}$ |
| j) $f(a) = \dfrac{a^2 - 1}{(a^2 + 1)^2}$ | k) $f(b) = \dfrac{b^2 + b + 1}{b^2 - b + 1}$ | l) $f(d) = \left(\dfrac{1}{2}d^2 + 2\right)^{20}$ |
| m) $f(m) = \sqrt[7]{3m + 1}$ | n) $f(p) = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}p^2 + \sqrt{p}\right)^{70}$ | o) $f(x) = \ln\left(\ln\left(x^2 - 1\right)\right)$ |
| p) $f(z) = \sqrt{\ln\left(2z + 0.5\right)}$ | q) $f(x) = x^4 \cdot e^{-2x^2 + 3x + 1}$ | r) $f(u) = u \cdot \ln\left(u\right)$ |
| s) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ | t) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ | |

**Aufgabe**

Nach der Produktregel gilt für die Ableitung des Produkts zweier Funktionen

$$(f_1(x) \cdot f_2(x))' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x).$$

Stellen Sie eine Formel für die Ableitung des Produktes von drei und von vier Funktionen auf, d. h. für

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x))' \text{ und } (f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot f_4(x))'.$$

Können Sie auch eine Formel für die Ableitung eines Produktes von n Funktionen angeben?

**Ableitungsregel für Umkehrfunktionen**

Ist $y = f(x)$ umkehrbar mit der Umkehrfunktion $x = g(y)$, dann ist

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

**Beispiel**

a) Wir betrachten $y = f(x) = e^x$ mit der Umkehrfunktion $x = g(y) = \ln(y)$. Dann gilt

$$g'(y) = (\ln y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Nach Umbenennung der Variablen erhält man also $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.

b) Wir betrachten für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ die Funktion $y = f(x) = \sin(x)$ mit der Umkehrfunktion $x = g(y) = \arcsin(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g'(y) = (\arcsin(y))' &= \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(x)}} && \text{da } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} && \text{da } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

Nach Umbenennung der Variablen erhält man also $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Die Herleitung der Ableitungen von arccos, arctan und arccot geht ähnlich.

**Weitere Beispiele**

a) Für die Bestimmung der Ableitung von $f(x) = \log_b(x)$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ verwenden wir die Regel für die Umrechnung in andere Basen, d. h. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$. Da $\dfrac{1}{\ln(b)}$ konstant ist, erhalten wir mit der bereits bekannten Ableitung für $\ln(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}.$$

b) Für die Bestimmung der Ableitung von $f(x) = b^x$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ gibt es zwei Möglichkeiten, die auch allgemeiner verwendet werden können.

i) Wir schreiben $f(x) = b^x$ mit Hilfe der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion um in $f(x) = e^{\ln(b^x)}$. Mit Anwendung der entsprechenden Rechenregel für den Logarithmus erhalten wir $f(x) = e^{x \cdot \ln(b)}$. Dies lässt sich nun mit Hilfe der Kettenregel differenzieren zu

$$f'(x) = \ln(b) \cdot e^{x \cdot \ln(b)} = \ln(b) \cdot b^x.$$

ii) Die zweite Methode wird als logarithmisches Differenzieren bezeichnet. Wir wenden auf beiden Seiten von $f(x) = b^x$ den natürlichen Logarithmus an und erhalten $\ln(f(x)) = \ln(b^x)$. Wieder mit der entsprechenden Rechenregel für den Logarithmus ergibt sich

$$\ln(f(x)) = x \ln(b).$$

Wir differenzieren nun beide Seiten dieser Gleichung nach $x$, wobei wir für die Ableitung von $\ln(f(x))$ die Kettenregel verwenden. Damit gilt

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(b), \text{ mit } f(x) = b^x \text{ also } f'(x) = \ln(b) \cdot b^x.$$

c) Wir bestimmen die Ableitung von $f(x) = x^x$. Auch hier gibt es wieder zwei Möglichkeiten.

i) Mit $f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$ folgt

$$f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

ii) Logarithmieren auf beiden Seiten der Gleichung $f(x) = x^x$ liefert

$$\ln(f(x)) = x \cdot \ln(x) \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + 1 \implies f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

**Aufgabe**

Verwenden Sie die beiden Methoden der letzten Beispiele, um die Ableitungen der folgenden Funktionen zu bestimmen.

a) $f(x) = (\sin(x))^x$ b) $f(x) = x^{\sin(x)}$ c) $f(x) = (x^2 + 1)^{x^3 + \sin(2x)}$

# 38 Ableitungen höherer Ordnung

Ist die erste Ableitung $f'(x)$ einer differenzierbaren Funktion wieder differenzierbar, dann können wir die Ableitung von $f'$, also $(f')'$ bilden. Diese wird mit $f''$ bezeichnet und heißt zweite Ableitung von $f$. Entsprechend kann man im Falle der Differenzierbarkeit die Ableitung von $f''$ bilden und erhält die dritte Ableitung $f'''$, etc. Ableitungen auch höherer Ordnung werden im Zusammenhang mit der Untersuchung von Eigenschaften wie Monotonie, Extrema, Krümmungsvehalten hinreichend oft differenzierbarer Funktionen benötigt.

**Beispiel**

Für die Funktion $f(x) = \sin(x)$ gilt $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ usw. Allgemein kann man die Ableitungen von $\sin(x)$ auch schreiben als

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} \cos(x) & , \quad m = 4k+1, k \in \mathbb{N}_0, \\ -\sin(x) & , \quad m = 4k+2, k \in \mathbb{N}_0, \\ -\cos(x) & , \quad m = 4k+3, k \in \mathbb{N}_0, \\ \sin(x) & , \quad m = 4k+4, k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

**Aufgabe**

a) Finden Sie eine allgemeine Darstellung für die $m$-te Ableitung von $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie einige Ableitungen der Funktion $g(x) = \ln(x)$ und finden Sie eine allgemeine Darstellung für die $m$-te Ableitung.

# 39 Tangentengleichung

Sei $f$ eine Funktion, die an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}_f$ differenzierbar ist. Für die Tangente $t_{x_0}$ der Funktion $f$ im Punkt $(x_0; f(x_0))$ gilt:

(1) $t_{x_0}(x_0) = f(x_0)$ Tangente und Funktion haben an der Stelle $x_0$ dieselben Funktionswerte.
(2) $t'_{x_0}(x_0) = f'(x_0)$ Tangente und Funktion haben an der Stelle $x_0$ dieselbe Steigung.

Da die Tangente eine Gerade ist, hat ihre Gleichung die Form $t_{x_0}(x) = a \cdot x + b$.
$a$ und $b$ müssen so bestimmt werden, dass (1) und (2) erfüllt sind, d. h.

$$(1)\ a \cdot x_0 + b = f(x_0) \qquad\qquad (2)\ a = f'(x_0).$$

Setzt man $a = f'(x_0)$ in (1) ein, so erhält man

$$f'(x_0) \cdot x_0 + b = f(x_0) \Longleftrightarrow b = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0).$$

Daraus folgt die allgemeine Form der Tangentengleichung

$$t_{x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0).$$

**Beispiel**

Wir bestimmen die Gleichungen der Tangenten $t_0$, $t_1$ und $t_3$ an die Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 2$ an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Es gilt $f'(x) = 2x - 2$.

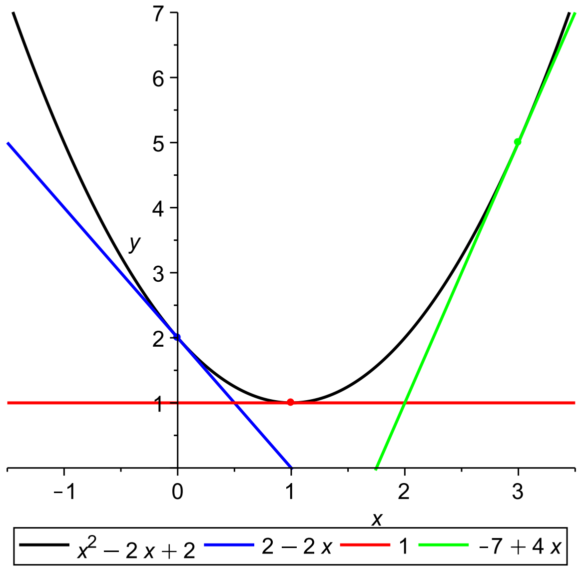



Abbildung 44: Tangenten

$f(0) = 2, f'(0) = -2$
$\Longrightarrow \quad \mathbf{t_0(x) = 2 - 2x}$

$f(1) = 1, f'(1) = 0$
$\Longrightarrow \quad \mathbf{t_0(x) = 1}$

$f(3) = 5, f'(3) = 4$
$\Longrightarrow \quad \mathbf{t_0(x) = 5 + (x - 3) \cdot 4 = -7 + 4x}$

**Aufgabe**

Sei $f(x) = \ln(x)$. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an den Stellen $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

Man nennt $t_{x_0}(x)$ auch lineare Approximation (Näherung) an $f(x)$ an der Stelle $x_0$. Das bedeutet, dass in der Nähe von $x_0$ die Funktionswerte $t_{x_0}$ Näherungen für die Funktionswerte $f(x)$ sind; $t_{x_0}(x) \approx f(x)$ für $x$ nahe bei $x_0$.

**Beispiel**

Für $f(x) = e^x$ ist mit $f(0) = e^0 = 1$ und $f'(0) = e^0 = 1$ die lineare Approximation an der Stelle $x_0 = 0$ durch $t_0(x) = 1 + x$ gegeben. Es gilt z. B.

$$
\begin{aligned}
&t_0(0{,}1) = 1{,}1 \approx f(0{,}1) = e^{0{,}1}, && \text{wobei } |t_0(0{,}1) - f(0{,}1)| < 5{,}2 \cdot 10^{-3},\\
&t_0(-0{,}1) = 0{,}9 \approx f(-0{,}1) = e^{-0{,}1}, && \text{wobei } |t_0(-0{,}1) - f(-0{,}1)| < 4{,}9 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}
$$

**Aufgabe**

a) Bestimmen Sie die lineare Approximation für $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

b) Berechnen Sie damit Näherungen für $\sin(0{,}1)$, $\sin(0{,}2)$ und $\sin(0{,}3)$.

c) Vergleichen Sie die Näherungswerte aus der linearen Approximation mit den Werten, die Ihnen der Taschenrechner liefert.

# 40 Monotonieeigenschaften differenzierbarer Funktionen

Wiederholen Sie zunächst die Definitionen zur Monotonie von Funktionen aus dem Abschnitt 27.

Sei $f'$ eine differenzierbare Funktion. Da die Ableitung $f'(x)$ die Steigung der Funktion beschreibt, können wir aus dem Vorzeichen von $f'(x)$ ablesen, ob die Funktion wachsend oder fallend ist.

**Satz**

Ist $f$ auf einem Intervall $I$ differenzierbar, so gilt

a) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f(x)$ streng monoton wachsend im Intervall $I$,

b) $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f(x)$ streng monoton fallend im Intervall $I$,

c) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I \Longleftrightarrow f(x)$ monoton wachsend im Intervall $I$,

d) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I \Longleftrightarrow f(x)$ monoton fallend im Intervall $I$.

**Beispiel**

a) $f(x) = \ln x$. Es gilt $f'(x) = 1/x > 0$ für alle $x \in (0{,}\infty)$. Also ist $f(x)$ streng monoton wachsend auf $(0{,}\infty)$.

b) $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Es ist $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, da $\cos x \geq -1$ ist. Damit ist $f(x)$ monoton wachsend.

c) $f(x) = (2 - 2x - x^2) \cdot e^{1-x}$. Es gilt $f'(x) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot e^{1-x}$.

Vorzeichentabelle

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{1-x}$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x+2)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(x-2)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| f'(x) | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

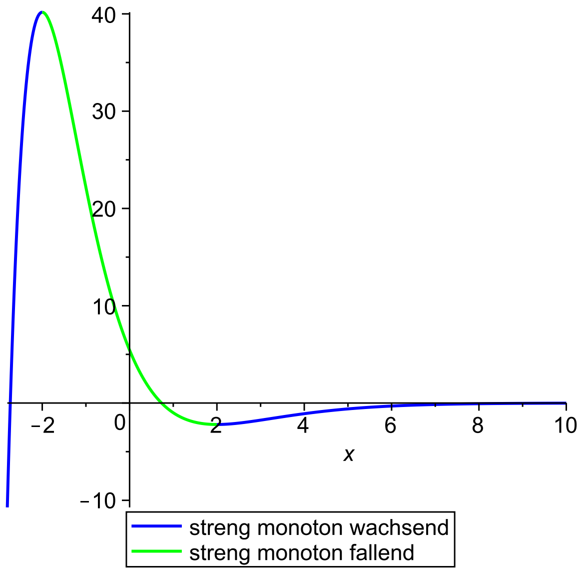



Abbildung 45: Monotonie

Aus der Vorzeichentabelle ermitteln wir $f'(x) > 0$ für $x \in (-\infty; -2)$ und $x \in (2; \infty)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (-2; 2)$ .
Also folgt, dass $f(x)$ streng monoton wachsend ist auf dem Intervall $(-\infty; -2)$ und auf dem Intervall $(2; \infty)$. Auf dem Intervall $(-2; 2)$ ist $f(x)$ streng monoton fallend.

**Aufgabe**

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich und untersuchen Sie das Monotonieverhalten.

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{4}(x^4 - 6x^2)$  b) $f_2(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$  c) $f_3(x) = \dfrac{3x}{x^2+x-2}$

d) $f_4(x) = e^{-x^2}$  e) $f_5(x) = \ln(x^2+2)$

**Aufgabe**

In einer 90 Minuten dauernden Vorlesung über Folgen und Grenzwerte wurde die Aufmerksamkeit des Studenten Xaver Fidelius, gemessen auf einer Skala von 0 bis 100, analysiert. Dabei bedeutet der Wert 0 Tiefschlaf und der Wert 100 hellwach mit voller Aufmerksamkeit. Den Beobachtungen zufolge lässt sich die Aufmerksamkeit des Studenten gut durch das Modell

$$A(t) = \frac{1}{1080}t^3 - \frac{17}{180}t^2 + \frac{4}{3}t + 60, t \in [0{,}90]$$

beschreiben.

a) In welchen Zeitintervallen wächst die Aufmerksamkeit?

b) In welchen Zeitintervallen lässt die Aufmerksamkeit nach?

c) Zu welchem Zeitpunkt befindet sich der Student im Tiefschlaf?

d) Ist der Student zu irgendeinem Zeitpunkt hellwach?

e) Skizzieren Sie die Graphen von $A(t)$ und $A'(t)$.

f) Wie lässt sich der Verlauf der Aufmerksamkeit des Studenten erklären?
Schreiben Sie dazu eine kleine Geschichte. ☺

# 41 Globale und lokale Extrema

In vielen Anwendungen treten Fragen nach optimalen Lösungen auf, z. B. nach maximalen Gewinnen oder minimalen Kosten. Bei zugrundeliegenden Modellen in Form von Funktionen bedeutet dies, maximale bzw. minimale Funktionswerte und Stellen, an denen diese angenommen werden, zu bestimmen.

**Definition**

Sei $f$ eine Funktion und $x_0 \in D_f$.

a) Globale Extrema

  i) $f(x_0)$ heißt globales Maximum von $f(x)$, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.

  ii) $f(x_0)$ heißt globales Minimum von $f(x)$, wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.

b) Lokale Extrema
Zu $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit $U_\varepsilon(x_0)$ das offene Intervall $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$.

  i) $f(x_0)$ heißt lokales Maximum, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$ gilt für ein $\varepsilon > 0$.

  ii) $f(x_0)$ heißt lokales Minimum, wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$ gilt für ein $\varepsilon > 0$.

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe Optimal-, Extremalstellen bzw. Optimal-, Extremwerte.
Gilt in oben stehender Definition „$>$“ bzw. „$<$“ statt „$\geq$“ bzw. „$\leq$“, so spricht man auch von strikten Maxima bzw. Minima.

Wir beschäftigen uns nun mit Kriterien für die Existenz von Extremwerten und mit Methoden, wie man diese findet.

Ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die Existenz von Extremalstellen liefert der folgende Satz.

**Satz**

Sei $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$. Dann existiert (mindestens) eine Stelle $x_0 \in [a; b]$, an der $f$ ein Minimum besitzt und (mindestens) eine Stelle $x_1 \in [a; b]$, an der $f$ ein Maximum besitzt, d. h.

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ für alle } x \in [a; b].$$

Um zu untersuchen, ob eine Funktion globale Extrema besitzt und diese gegebenenfalls zu bestimmen, müssen folgende Punkte berücksichtigt werden.

a) Bestimmung aller lokalen Extrema,

b) Untersuchung der Funktion an Intervallrändern,

c) Untersuchung der Funktion an Definitionslücken,

d) Untersuchung des Verhaltens für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Wir beschäftigen uns nun mit der Bestimmung lokaler Extrema mit Hilfe der Methoden der Differentialrechnung, d. h. unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Funktion, die untersucht werden soll.
Anschaulich gilt zunächst Folgendes.

Bei einem lokalen Minimum ist die Funktion vor dem Minimum fallend und danach wachsend. Ist $f$ differenzierbar, so bedeutet dies, dass die Tangentensteigung vor dem Minimum kleiner oder gleich Null, im Minimum gleich Null und danach größer oder gleich Null ist.

Bei einem lokalen Maximum ist die Funktion vor dem Maximum wachsend und danach fallend. Ist $f$ differenzierbar, so bedeutet dies, dass die Tangentensteigung vor dem Maximum größer oder gleich Null, im Maximum gleich Null und danach kleiner oder gleich Null ist.

Abbildung 46: Extrema

Diese anschaulichen Überlegungen fassen wir nun in einem Satz zusammen. Dabei bezeichnen wir Punkte, in denen $f'(x) = 0$ ist, d. h. Punkte mit waagerechter Tangente, als stationäre Punkte.

**Satz**

a) Der Graph einer differenzierbaren Funktion besitzt an einem lokalen Extremum $f(x_0)$ stets eine waagerechte Tangente, d. h. es gilt $f'(x_0) = 0$.

b) Ist $f$ eine differenzierbare Funktion und $(x_0; f(x_0))$ ein stationärer Punkt, dann gilt:

   i) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$, dann besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Minimum.

   ii) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$, dann besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Maximum.

   iii) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon)$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon)$, dann ist $(x_0; f(x_0))$ ein sogenannter Sattelpunkt.

**Beispiel**

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$.

Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Nullstellen: Es gilt

$$f(x) = 0 \iff x^3 \cdot e^{-x} = 0 \iff x = 0.$$

Die Funktion besitzt eine Nullstelle für $x = 0$.

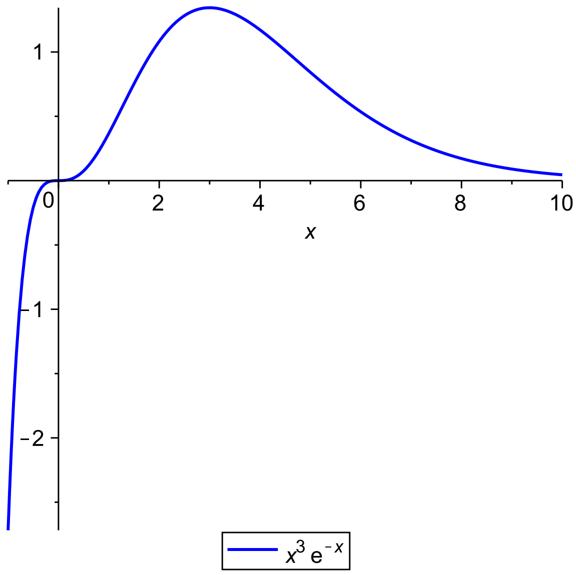



Abbildung 47: Extrema

Monotonie und Extrema: Es gilt $f'(x) = x^2(3-x) \cdot e^{-x}$ und

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x^2(3-x) \cdot e^{-x} = 0 \\ &\iff x = 0 \vee x = 3. \end{aligned}$$

Für $x \in (-\infty; 0)$ und $x \in (0; 3)$ gilt $f'(x) > 0$, für $x \in (3; \infty)$ ist $f'(x) < 0$.
Damit erhalten wir: $f$ ist monoton wachsend auf dem Intervall $(-\infty; 3]$ und monoton fallend auf dem Intervall $[3; \infty)$. An der Stelle $x = 3$ besitzt die Funktion ein striktes lokales Maximum $f(3) = 27 \cdot e^{-3}$. Da $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \cdot e^{-x} = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 \cdot e^{-x} = 0$, ist $f(3)$ ein globales Maximum.
An der Stelle $x = 0$ besitzt die Funktion einen Sattelpunkt.

**Beispiel**

Es ist sinnvoll, an dieser Stelle den Abschnitt 31 über trigonometrische Funktionen zu wiederholen. Schauen Sie insbesondere noch einmal die Wertetabellen an.
Wir untersuchen das Monotonieverhalten und bestimmen die Extrema der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f(x) = x - 2\cos(x)$.
Es gilt $f'(x) = 1 + 2\sin(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 1 + 2\sin(x) = 0 \\ &\iff \sin(x) = -\frac{1}{2} \\ &\iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ f'(x) > 0 &\iff 1 + 2\sin(x) > 0 \\ &\iff \sin(x) > -\frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ f'(x) < 0 &\iff 1 + 2\sin(x) < 0 \\ &\iff \sin(x) < -\frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

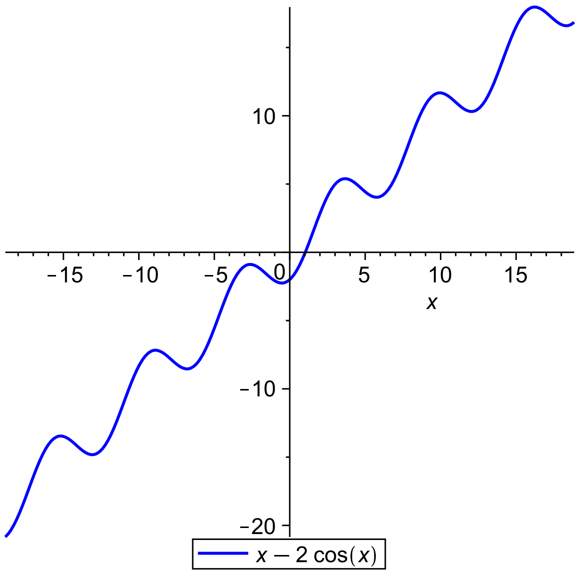



Abbildung 48: Monotonie, Extrema

Für $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ist $f$ streng monoton wachsend.

Für $x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ist $f$ streng monoton fallend.

Die Funktion besitzt an den Stellen $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, lokale Minima

$$f\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi - \sqrt{3}$$

und an den Stellen $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, lokale Maxima

$$f\left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi + \sqrt{3}.$$

**Aufgabe**

a) Sei $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x^2}$.

   i) Bestimmen Sie den Definitionsbereich, und berechnen Sie die Nullstellen von f.

   ii) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten, und bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima. Besitzt die Funktion globale Extrema?

b) Sei $f(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x)$.

   i) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

   ii) Berechnen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f. Besitzt die Funktion f globale Extrema?

# 42 Konvexität, Krümmungsverhalten

Wir erklären zunächst einige Begriffe und Zusammenhänge an Hand von Graphiken.

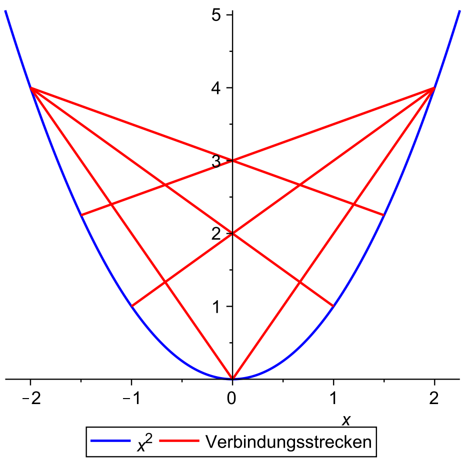



Abbildung 49: Konvexe Funktion

Der blau gezeichnete Funktionsgraph beschreibt eine Linkskurve.

Die Verbindungsstrecken (rote Linien) zu je zwei Punkten des Funktionsgraphen liegen stets über dem Funktionsgraphen.

Solche Funktionen nennt man konvex.

In der Umgebung eines lokalen Minimums beschreibt der Graph eine Linkskurve. Die Tangentensteigung, d. h. $f'(x)$ nimmt mit wachsendem $x$ zu.

Die Ableitung ist also monoton wachsend.

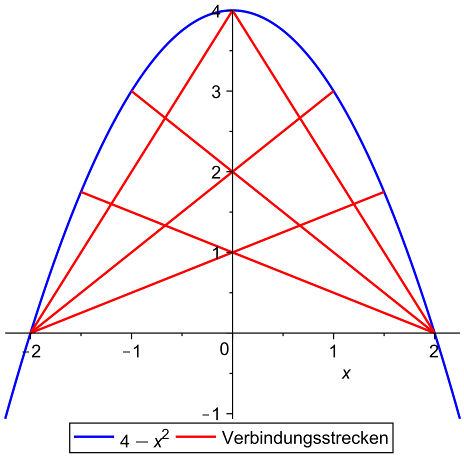



Abbildung 50: Konkave Funktion

Der blau gezeichnete Funktionsgraph beschreibt eine Rechtskurve.

Die Verbindungsstrecken (rote Linien) zu je zwei Punkten des Funktionsgraphen liegen stets unter dem Funktionsgraphen.

Solche Funktionen nennt man konkav.

In der Umgebung eines lokalen Maximums beschreibt der Graph eine Rechtskurve. Die Tangentensteigung, d. h. $f'(x)$ nimmt mit wachsendem $x$ ab.

Die Ableitung ist also monoton fallend.

Es folgen nun einige mathematische Definitionen und Sätze.

**Definition**

Sei $f$ auf einem Intervall $I$ definiert.

a) $f$ heißt konvex auf $I$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und jedes $\lambda \in (0;1)$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

D. h. die Verbindungsstrecke zwischen $(x_1; f(x_1))$ und $(x_2; f(x_2))$ verläuft nicht unterhalb des Graphen von $f$.

b) $f$ heißt strikt konvex auf $I$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und jedes $\lambda \in (0;1)$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

D. h. die Verbindungsstrecke zwischen $(x_1; f(x_1))$ und $(x_2; f(x_2))$ verläuft oberhalb des Graphen von $f$.

c) $f$ heißt konkav auf $I$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und jedes $\lambda \in (0;1)$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

D. h. die Verbindungsstrecke zwischen $(x_1; f(x_1))$ und $(x_2; f(x_2))$ verläuft nicht oberhalb des Graphen von $f$.

d) $f$ heißt strikt konkav auf $I$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und jedes $\lambda \in (0;1)$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

D. h. die Verbindungsstrecke zwischen $(x_1; f(x_1))$ und $(x_2; f(x_2))$ verläuft unterhalb des Graphen von $f$.

Ist die Funktion differenzierbar, so lässt sich das Krümmungsverhalten mit Hilfe der Monotonieeigenschaften der ersten Ableitung untersuchen.
Ist $f'$ monoton wachsend, so ist $f$ konvex, ist $f'$ monoton fallend, so ist $f$ konkav.

Ist nun $f$ zweimal differenzierbar auf $I$, so können wir die Monotonieeigenschften von $f'$ und damit das Krümmungsverhalten von $f''$ untersuchen (vgl. auch Abschnitt 40). Es gilt:

a) $f''(x) > 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f'(x)$ streng monoton wachsend im Intervall $I$,

b) $f''(x) < 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f'(x)$ streng monoton fallend im Intervall $I$,

c) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I \Longleftrightarrow f'(x)$ monoton wachsend im Intervall $I$,

d) $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I \Longleftrightarrow f'(x)$ monoton fallend im Intervall $I$.

Damit erhalten wir folgende Aussage.

**Satz**

Sei $f$ auf einem Intervall $I$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

a) $f''(x) > 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f(x)$ strikt konvex auf dem Intervall $I$,

b) $f''(x) < 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f(x)$ strikt konkav auf dem Intervall $I$,

c) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I \Longleftrightarrow f(x)$ konvex auf dem Intervall $I$,

d) $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I \Longleftrightarrow f(x)$ konkav auf dem Intervall $I$.

Für lokale Extrema gilt damit der folgende Satz.

**Satz**

Sei $f$ zweimal differenzierbar und $(x_0; f(x_0))$ ein stationärer Punkt, d. h. $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:

a) Ist $f''(x_0) > 0$ , dann besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Minimum $f(x_0)$.

b) Ist $f''(x_0) < 0$ , dann besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Maximum $f(x_0)$.

# 43 Wendepunkte

Wendepunkte sind solche Punkte, an denen der Graph einer Funktion das Krümmungsverhalten ändert, d. h. von einer Rechts- in eine Linkskurve oder von einer Links- in eine Rechtskurve übergeht.

Unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Funktion lassen sich Wendestellen mit Hilfe von Ableitungen bestimmen.

Wendestellen sind Extremalstellen der ersten Ableitung! Wir können daher die Ergebnisse zu Extremalstellen sinngemäß übertragen.

**Satz**

Sei $f$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

a) Ist $f''(x_0) = 0$ und für ein $\varepsilon > 0$ $f''(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ und $f''(x) < 0$ für alle $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$, dann besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ eine Wendestelle (Wechsel von konvex nach konkav).

b) Ist Ist $f''(x_0) = 0$ und für ein $\varepsilon > 0$ $f''(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$, dann besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ eine Wendestelle (Wechsel von konkav nach konvex).

**Satz**

Sei $f$ dreimal differenzierbar. Dann gilt:

a) Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$, dann besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ eine Wendestelle (Wechsel von konvex nach konkav).

b) Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) > 0$, dann besitzt $f$ an der Stelle $x_0$ ein Wendestelle (Wechsel von konkav nach konvex).

Wir betrachten noch einmal die letzten beiden Beispiele aus Abschnitt 41.

**Beispiel**

Für $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$ ist $f''(x) = x \cdot (6 - 6x + x^2) \cdot e^{-x}$ und $f'''(x) = (6 - 18x + 9x^2 - x^3) \cdot e^{-x}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \cdot (6 - 6x + x^2) \cdot e^{-x} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 3 - \sqrt{3} \vee x = 3 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $f'''(0) = 6 > 0$, $f'''(3 - \sqrt{3}) = -6 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot e^{-3+\sqrt{3}} < 0$ und $f'''(3 - \sqrt{3}) = 6 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot e^{-3-\sqrt{3}} > 0$.
Der Graph der Funktion wechselt also an der Wendestelle $x = 0$ von einer Rechts- in eine Linkskurve, an der Wendestelle $x = \sqrt{3} - 1$ von einer Links- in eine Rechtskurve und an der Wendestelle $x = \sqrt{3} + 1$ wieder von einer Rechts- in eine Linkskurve.

**Beispiel**

Für $f(x) = x - 2\cos(x)$ ist $f''(x) = 2 \cdot \cos(x)$ und $f'''(x) = -2 \cdot \sin(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 \cdot \cos(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $f'''\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -2 < 0$ und $f'''\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 2$ für $k \in \mathbb{Z}$.
Der Graph der Funktion wechselt also für $k \in \mathbb{Z}$ an den Wendestellen $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ von einer Links- in eine Rechtskurve und an den Wendestellen $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ von einer Rechts- in eine Linkskurve.

# 44 Beispiel zur Kurvendiskussion

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

a) Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

b) Symmetrie: $f(-x) = x^2 \cdot e^{-x}$, d. h. $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$.
Die Funktion ist also weder gerade noch ungerade.

c) Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^x = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot e^x = \infty$

d) Nullstellen: Offensichtlich besitzt die Funktion genau eine Nullstelle $x_0 = 0$, da $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

e) Monotonie und Extrema: Es gilt $f'(x) = x(x+2) \cdot e^x$. Mit Hilfe einer Vorzeichentabelle ermittelt man, dass $f'(x) > 0$ ist für $x \in (-\infty; -2)$ und $x \in (0; \infty)$. $f'(x) < 0$ gilt für $x \in (-2; 0)$.

   Also ist $f$ streng monoton wachsend auf den Intervallen $(-\infty; -2)$ und $(0; \infty)$ und streng monoton fallend auf dem Intervall $(-2; 0)$.

   $f$ besitzt an der Stelle $x_1 = -2$ ein lokales Maximum $f(-2) = 4 \cdot e^{-2}$ und an der Stelle $x_2 = 0$ ein lokales Minimum $f(0) = 0$.

   Da $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot e^x = \infty$, ist $f(0) = 0$ ein globales Minimum. Ein globales Maximum existiert nicht.

f) Wendepunkte und Krümmungsverhalten: Es gilt $f''(x) = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$und $f'''(x) = (x^2 + 6x + 6) \cdot e^x$. Da $e^x \neq 0$ erhält man mit der $pq$-Formel $f''(x) = 0$ für $x_3 = -2 - \sqrt{2}$ und $x_4 = -2 + \sqrt{2}$.

   Da $f'''(-2-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} < 0$ und $f'''(-2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} > 0$, besitzt $f$ die Wendestellen $x_3 = -2 - \sqrt{2}$ und $x_4 = -2 + \sqrt{2}$.

   $f$ ist strikt konvex auf den Intervallen $(-\infty; -2 - \sqrt{2})$ und $(-2 + \sqrt{2}; \infty)$. $f$ ist strikt konkav auf dem Intervall $(-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2})$.

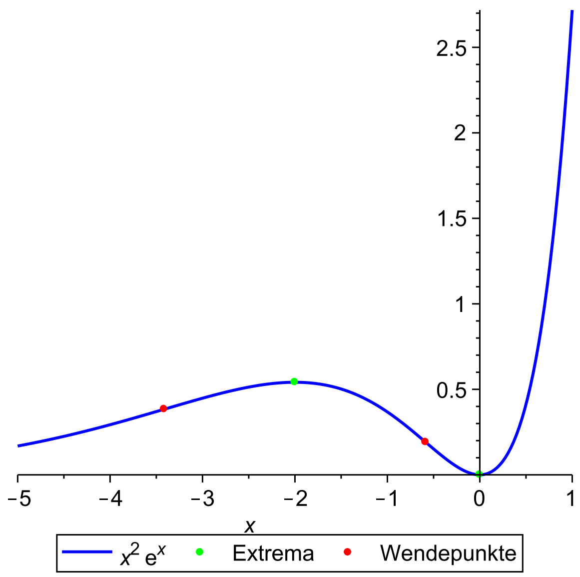



Abbildung 51: Graph von $f(x) = x^2 e^x$

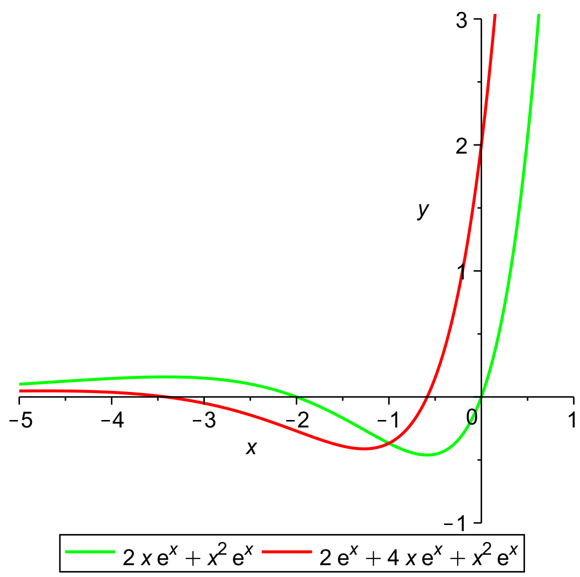



Abbildung 52: Graphen der Ableitungen

**Aufgabe**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$. Führen Sie eine Kurvendiskussion wie im Beispiel durch.

# 45 Die Regel von l'Hospital

Die Regel von l'Hospital ist ein nützliches Werkzeug für die Berechnung von Grenzwerten von Quotienten zweier Funktionen, wenn sowohl Zähler- als auch Nennerfunktion entweder gegen einen unendlichen Wert oder gegen Null streben.

**Satz**

Seien $f(x)$ und $g(x)$ in einer Umgebung von $x_0$ stetig differenzierbare Funktionen. Es gelte entweder

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \text{ oder } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Dann ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ falls } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.}$$

Die Regel gilt sinngemäß auch für die Berechnung von Grenzwerten für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$ sowie einseitige Grenzwerte.

**Beispiel**

Sei $f(x) = x^2 - 9$ und $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Da $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 0$ ist, ist $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ vom Typ „$\frac{0}{0}$“. Nun gilt

$$\lim_{x\to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{2x-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Daraus folgt mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \frac{3}{2}.$$

**Beispiel**

Sei $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = x$. Da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ ist, ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“. Nun gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Daraus folgt mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital. Prüfen Sie immer zuerst, ob die Voraussetzungen erfüllt sind, d. h. bestimmen Sie den Typ. Verwenden Sie die Regel wenn nötig mehrfach.

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{(x)}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-7}{x^3+x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^p}, p > 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{x^n}, n \in \mathbb{N}$

Häufig lassen sich durch passende Umformungen auch unbestimmte Ausdrücke des Typs „$0 \cdot \infty$“, „$\infty - \infty$“, „$1^\infty$“, „$0^0$“, „$\infty^0$“ behandeln, wie die folgenden Beispiele zeigen.

**Beispiel**

Sei $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = x$. Gesucht ist $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \cdot \ln(x))$. Dies ist vom Typ „$0 \cdot (-\infty)$“. Es gilt zunächst

$$f(x) \cdot g(x) = x \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Dies ist nun vom Typ „$\frac{-\infty}{\infty}$“. Nun gilt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Daraus folgt mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = 0.$$

**Merke:** Ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ vom Typ „$0 \cdot \infty$“, so formt man um in

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ vom Typ „}\frac{0}{0}\text{“ oder in } \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \text{ vom Typ „}\frac{\infty}{\infty}\text{“}.$$

**Beispiel**

Gesucht ist $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$. Dies ist vom Typ „$0^0$“. Schreibt man $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln x}$, so gilt

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \cdot \ln x} = e^{\left[\lim\limits_{x \to 0^+} (x \cdot \ln(x))\right]},$$

da die Exponentialfunktion stetig ist. Mit dem letzten Beispiel folgt also

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

**Merke:** Ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ vom Typ „$1^\infty$“, „$0^0$“ oder „$\infty^0$“ , dann wird

$$f(x)^{g(x)} \text{ umgeformt zu } e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}.$$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist dann

$$e^{\lim\limits_{x \to x_0} (g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

zu bestimmen.

**Beispiel**

Gesucht ist $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$. Dies ist vom Typ „$\infty - \infty$“. Es gilt

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)}, \text{ vom Typ „}\frac{0}{0}\text{“}.$$

Es ist

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin(x) - x)'}{(x\cdot\sin(x))'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x\cdot\cos(x)}, \text{ vom Typ „}\frac{0}{0}\text{“.}$$

Weiter gilt nun

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos(x) - 1)'}{(\sin(x) + x\cdot\cos(x))'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin(x)}{(2\cdot\cos(x) - x\cdot\sin(x))} = \frac{0}{2} = 0.$$

Damit folgt nun auch

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) = 0.$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Beachten Sie auch die in den Beispielen verwendeten Umformungen.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot e^x}{e^x - 1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}, p > 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi - x)\cdot\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan(x)}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

# 46 Einführung in die Integralrechnung

In den folgenden Abschnitten werden einige Grundlagen der Integralrechnung behandelt.
Mit Hilfe der Integralrechnung lassen sich Probleme behandeln, bei denen eine Funktion aus der (bekannten) Ableitung bestimmt werden muss. Aus der bekannten Beschleunigung $a(t)$ lässt sich die Geschwindigkeit $v(t)$ ermitteln, da $v'(t) = a(t)$ gilt.
Die Integralrechnung lässt sich auch als Umkehrung der Differentialrechnung auffassen; zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ sind Funktionen $F(x)$ gesucht, so dass $F'(x) = f(x)$ gilt.

**Beispiel**

Sei $f(x) = x$. Wir wissen, dass $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$ ist. Für $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ gilt also $F'(x) = x = f(x)$.
Sei $g(x) = x^2$. Wir wissen, dass $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ ist. Für $G(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ gilt also $G'(x) = x^2 = g(x)$.

**Definition**

Ist $F(x)$ eine differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$, dann heißt $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$.

**Beispiel**

$G_1(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 7$ ist ebenfalls Stammfunktion von $g(x) = x^2$, da $G_1'(x) = x^2 = g(x)$ gilt.

Da die Ableitung einer Konstanten Null ist, gilt allgemein der folgende Satz.

**Satz**

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ , so erhält man durch $F(x) + C$ mit beliebigem $C \in \mathbb{R}$ sämtliche Stammfunktionen von $f(x)$.

**Definition**

Sei $F(x)$ eine (beliebige) Stammfunktion von $f(x)$ . Dann heißt die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R},$$

unbestimmtes Integral von $f$.
Dabei ist $\int$ das Integralzeichen, $f(x)$ der Integrand, $C$ die Integrationskonstante. Aus $dx$ ist ersichtlich, dass $x$ die Integrationsvariable ist.

Aus der Definition des unbestimmten Integrals folgt, dass die Ableitung eines unbestimmten Integrals mit dem Integranden übereinstimmt, d. h.

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\} = f(x).$$

In der folgenden Tabelle sind die Stammfunktionen zu einigen Funktionen aufgelistet, die man aus der Tabelle der Ableitungen einiger Grundfunktionen (vgl. Abschnitt 37) ablesen kann.

| $f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|
| $x^a, a \neq -1$ | $\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ |
| $x^{-1},$ | $\ln\|x\| + C$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x) + C$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x) + C$ |
| $\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x) + C$ |
| $\frac{1}{\sin^2(x)}$ | $-\cot(x) + C$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x) + C$ |

In mathematischen Formelsammlungen finden Sie umfangreiche Tabellen. Trotzdem benötigt man einige Regeln für die Berechnung von Integralen, die im Folgenden behandelt werden.

**Elementare Integrationsegeln**

Konstante Faktoren bleiben erhalten,

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx.$$

Das Integral einer Summe bzw. Differenz ist die Summe bzw. Differenz der Integrale,

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

**Beispiel**

a)

$$\int (2x^2 + x - 3)dx = 2 \cdot \int x^2 dx + \int x dx - 3 \cdot \int 1 dx = 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

b)

$$\int \left(\frac{2}{x} - 4e^x\right) dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx - 4 \cdot \int e^x dx = 2 \ln|x| - 4e^x + C$$

**Aufgabe**

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\int \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(x) + \frac{3}{x}\right) dx$ b) $\int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{5}{1+x^2}\right) dx$ c) $\int \left(\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right) dx$

# 47 Partielle Integration

Aus der Regel für die Differentiation des Produktes zweier Funktionen lässt sich eine wichtige Regel für die Integration eines Produktes der Form $f'(x) \cdot g(x)$ herleiten.
Wir wissen

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Wir bilden auf beiden Seiten das unbestimmte Integral

$$\underbrace{\int (f(x) \cdot g(x))' \, dx}_{=f(x) \cdot g(x)} = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Durch Auflösen der Gleichung nach $\int f'(x) \cdot g(x) dx$ erhält man daraus die Formel für die partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

**Beispiel**

a) $\int x \cdot e^x dx$

$$f'(x) = e^x \quad g(x) = x$$
$$f(x) = e^x \quad g'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= (x-1)e^x + C \end{aligned}$$

b) $\int (2x^2+3x-1)e^x dx$ $\qquad f'(x) = e^x \quad g(x) = 2x^2+3x-1$

$f(x) = e^x \quad g'(x) = 4x+3$

$= (2x^2+3x-1)e^x - \int (4x+3)e^x dx$ $\qquad f'(x) = e^x \quad g(x) = 4x+3$

$f(x) = e^x \quad g'(x) = 4$

$$= (2x^2+3x-1)e^x - \left\{(4x+3)e^x - 4\int e^x dx\right\}$$
$$= (2x^2+3x-1)e^x - (4x+3)e^x + 4e^x + C$$
$$= x(2x-1)e^x + C$$

Wie in den Beispielen lassen sich Integrale für Funktionen der Form $p(x) \cdot e^x$, $p(x) \cdot \sin(x)$ und $p(x) \cdot \cos(x)$ berechnen. Dabei bezeichnet $p(x)$ ein Polynom.

**Aufgabe**

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit partieller Integration.

a) $\int (5x-2) \cdot \sin(x) dx$ $\quad$ b) $\int (x^2 - x + 3) \cdot \cos(x) dx$

**Aufgabe**

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit partieller Integration.

a) $\int 1 \cdot \ln(x) dx$ $\quad$ b) $\int x^a \ln(x) dx, a \neq -1$ $\quad$ c) $\int x^{-1} \cdot \ln(x) dx$ $\quad$ d) $\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$

# 48 Integration durch Substitution

Die Kettenregel der Differentialrechnung (vgl. Abschnitt 37) lässt sich verwenden, um eine weitere wichtige Integrationsmethode herzuleiten.
Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, so gilt mit der Kettenregel

$$\underbrace{F'(g(x)) \cdot g'(x)}_{=f(g(x)) \cdot g'(x)} = \frac{d}{dx}\left\{F(g(x)) + C\right\}.$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung das unbestimmte Integral, so erhält man wegen $\int (F(g(x)) + C)' dx = F(g(x)) + C$ die Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C = \int f(u) du \text{ mit } u = g(x).$$

**Beispiel**

a) $\int 9x^2(3x^3-1)^{16} dx$ $\qquad$ Substitution: $u = 3x^3 - 1$

$= \int u^{16} du$ $\qquad$ $\frac{du}{dx} = 9x^2 \Longrightarrow du = 9x^2 dx$

$$= \frac{1}{17}u^{17} + C$$
$$= \frac{1}{17}(3x^3-1)^{17} + C$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}dx & & \text{Substitution: } u = \sqrt{x^3+8} \\
= \frac{2}{3}\int 1du & & \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(x^3+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} \\
= \frac{2}{3}u + C & & \Longrightarrow \frac{2}{3}du = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}dx \\
= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+8} + C & &
\end{aligned}
$$

Zwei häufig vorkommende Spezialfälle lassen sich allgemein angeben. Es lohnt, sich diese besonders zu merken.

a) Ist $F$ Stammfunktion von $f$ und $a \neq 0$, so gilt

$$
\begin{aligned}
\text{a)} \int f(ax+b)dx & & \text{Substitution: } u = ax+b \\
= \frac{1}{a}\int f(u)du & & \frac{du}{dx} = a \Longrightarrow \frac{1}{a}du = dx \\
= \frac{1}{a}F(u) + C & & \\
= \frac{1}{a}F(ax+b) + C. & &
\end{aligned}
$$

Also

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

b) Ist $g$ differenzierbar, so gilt

$$
\begin{aligned}
\text{a)} \int \frac{g'(x)}{g(x)}dx & & \text{Substitution: } u = g(x) \\
= \int \frac{1}{u}du & & \frac{du}{dx} = g'(x) \Longrightarrow du = g'(x)dx \\
= \ln|u| + C & & \\
= \ln|g(x)| + C. & &
\end{aligned}
$$

Also

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)| + C.$$

**Beispiel**

a) $\int \cos(3x+7)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+7) + C$

b) $\int \ln(1-0{,}5x)dx = -2\{(1-0{,}5x)\ln(1-0{,}5x) - (1-0{,}5x)\} + C$

c) $\int \frac{\overbrace{7x^6+6x-9}^{g'(x)}}{\underbrace{x^7+3x^2-9x+10}_{g(x)}}dx = \ln|x^7+3x^2-9x+10| + C$

**Aufgabe**

Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Substitution die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$

b) $\displaystyle\int \tan(x) dx$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$

e) $\displaystyle\int \tan(5-3x) dx$

f) $\displaystyle\int \cos^3(x) \sin(x) dx$

g) $\displaystyle\int \cot(x) dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{3x-7}} dx$

i) $\displaystyle\int e^x \cdot \frac{\cot(e^x)}{\ln(\sin(e^x))} dx$

j) $\displaystyle\int \cos^3(x) dx$

k) $\displaystyle\int \sin^3(x) dx$

l) $\displaystyle\int (1-\sin^2 x) \cdot \cos(x) dx$

m) $\displaystyle\int (2x - \sin(x)) \cdot (x^2 + \cos(x)) dx$

Mathematics in German

الرياضيات باللغة الألمانية

Matemáticas en Alemán

Alman dilinde matematik

Matematică în limba germană

ریاضی به زبان آلمانی

Wiskunde in het duits

Mathématiques en allemand

ریاضی جرمن زبان میں

Математика на немецком

بیرکاری ب زمانی ئه لمانی

Matematika németü

Der Druck dieser Publikation wird aus Zuwendungen des DAAD, des Bundesministeriums für Bildung und Forschung und des Ministeriums für Kultur und Wissenschaft des Landes Nordrhein-Westfalen finanziert.

DAAD
Deutscher Akademischer Austauschdienst
German Academic Exchange Service

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

Ministerium für
Kultur und Wissenschaft
des Landes Nordrhein-Westfalen