Skript zur Vorlesung
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Sommersemester 2015
(Master Studiengang)

© Prof. Dr. Margareta Heilmann

Bergische Universität Wuppertal

Das Skript eignet sich zur Vor- und Nachbereitung der in der Veranstaltung vermittelten Inhalte.

Das Skript ist kein Ersatz für die Vorlesung und die begleitenden Übungen.

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen

I.1 Einführung

In vielen Bereichen der Wirtschaftswissenschaften wie z.B. in der ökonomischen Wachstumstheorie, in Untersuchungen der Ausnutzung natürlicher Ressourcen, in Modellen der Umweltökonomie und in der Finanzmathematik hat man es häufig mit Gleichungen zu tun, in denen die gesuchten Größen Funktionen sind und in denen neben der unabhängigen Variablen auch Ableitungen der Funktion auftreten.

Handelt es sich um Funktionen einer Variablen und ihren Ableitungen, so spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen; bei Gleichungen mit Funktionen mehrerer Variablen und zugehörigen partiellen Ableitungen von partiellen Differentialgleichungen.

Als Beispiel für die große Bedeutung der Differentialgleichungen sei hier das Black-Scholes Modell, ein Modell zur Bewertung von Finanzoptionen, genannt. Fischer Black, Myron Samuel Scholes und Robert C. Merton erhielten 1997 für ihre Arbeiten den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Die inzwischen als Black-Scholes-DGL bezeichnete Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r V$$

dient unter gewissen vereinfachenden Annahmen als Modell für den Wert V einer (europäischen) Aktienoption mit dem Zinssatz r, dem Aktienkurs S und der Volatilität σ^2.

Wir werden uns im Rahmen dieser Veranstaltung auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken. Wir werden häufig die Punkt-Notation für Ableitungen verwenden, insbesondere dann, wenn die unabhängige Variable die Zeit t ist, was in den meisten Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften der Fall ist.

Zur Einführung behandeln wir nun zunächst ein einfaches Beispiel.

Beispiel 1.1.1: Stetige Verzinsung

Mit $K(t)$ bezeichnen wir das Kapital zum Zeitpunkt t. Nimmt man an, dass die momentane Änderungsrate $\dot{K}(t)$ des Kapitals zu jedem Zeitpunkt proportional zum Kapital $K(t)$ ist, oder anders ausgedrückt, dass die relative Änderungsrate $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}$ zu jedem Zeitpunkt t konstant gleich $i = p\%$ ist, so bedeutet dies

$$\dot{K}(t) = i \cdot K(t).$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL, bei der man durch einfache Überlegungen Funktionen $K(t)$ ermitteln kann, die die Gleichung erfüllen. Eine Funktion, die bis auf einen konstanten Faktor mit ihrer Ableitung übereinstimmt, muss eine Exponentialfunktion sein. Genauer gilt: $K(t) = C \cdot e^{it}$ erfüllt für jede beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$ die angegebene DGL. Gibt man zusätzlich das Anfangskapital, d.h. das Kapital zum Zeitpunkt $t=0$ durch $K(0) = K_0$ vor, so ergibt sich durch Einsetzen

$$K(0) = C \cdot e^0 = K_0 \text{ , d.h. } C = K_0 .$$

Die Funktion $K(t) = K_0 \cdot e^{it}$, die die stetige Verzinsung beschreibt, erfüllt die oben angegebene DGL und die zusätzliche (Anfangs-)Bedingung $K(0) = K_0$.

Beispiel 1.1.2: Wir betrachten drei etwas allgemeinere typische Beispiele.

Seien $a > 0$, $b > 0$ reelle Konstanten.

Die DGL $\dot{y}(t) = a \cdot y(t)$ beschreibt bestimmte Wachstumsprozesse wie z.B. die stetige Verzinsung. Man verifiziert leicht, dass $y(t) = C \cdot e^{at}$ für alle $C \in \mathbb{R}$ die Gleichung erfüllt.

Die DGL $\dot{y}(t) = a y(t) - b[y(t)]^2$ beschreibt logistisches Wachstum.

Für $y(t) = \frac{a}{b + Cae^{-at}}$ gilt $\dot{y}(t) = \frac{Ca^3 e^{-at}}{(b + Cae^{-at})^2}$, also

$$ay(t)-b[y(t)]^2 = y(t)\{a-by(t)\}$$
$$= \frac{a}{b+Cae^{-at}}\left\{\frac{a(b+Cae^{-at})-b\cdot a}{b+Cae^{-at}}\right\}$$
$$= \frac{Ca^3e^{-at}}{(b+Cae^{-at})^2} = y'(t)$$

Im Folgenden stellen wir zunächst einige grundlegende Definitionen und Bezeichnungen zusammen.

Definition 1.1.3: Unter einer gewöhnlichen DGL versteht man eine Gleichung, in der eine Funktion einer Variablen, deren Ableitungen und die unabhängige Variable auftreten. Jede Funktion, die mit ihren Ableitungen die Gleichung erfüllt, heißt eine Lösung der DGL.
Die Menge aller Lösungen heißt Lösungsmenge oder allgemeine Lösung.
Die höchste auftretende Ableitung heißt Ordnung der DGL.
Eine DGL heißt explizit, wenn sie nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist, sonst implizit.

Beispiel 1.1.4: $y''' = x - 2y + \sqrt{y''}$, explizite DGL 3ter Ordnung
$\dot{s} - e^s + t\cdot\ddot{s} = 0$, implizite DGL 2ter Ordnung

Definition 1.1.5: Die Aufgabe, eine Lösung einer DGL n-ter Ordnung zu bestimmen, die zusätzlich sogenannten Anfangsbedingungen (AB)
$$y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_1,\dots,y^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}$$
genügt, heißt Anfangswertproblem (AWP).

In Beispiel 1.1.1 haben wir für das AWP $\dot{K}(t) = i\,K(t)$ mit $K(0)=K_0$ die Funktion $K(t) = K_0\cdot e^{it}$ der stetigen Verzinsung als Lösung ermittelt.
Leider gibt es nicht "das Verfahren", um beliebige DGL zu lösen.
Nur für sehr spezielle Typen von DGLen können allgemeine Methoden zur Bestimmung der Lösungsmenge angegeben werden.
Bestimmte Lösungsmethoden sind also stets im Zusammenhang mit bestimmten Eigenschaften einer DGL zu sehen und umgekehrt.

In den folgenden Abschnitten werden wir einige Lösungsmethoden behandeln. Weiter werden wir uns mit Fragen der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beschäftigen, Abhängigkeiten von weiteren Parametern untersuchen und Stabilität von Gleichgewichtszuständen betrachten. Die folgenden Unterkapitel sind dabei nach dem jeweils betrachteten Typ gegliedert.

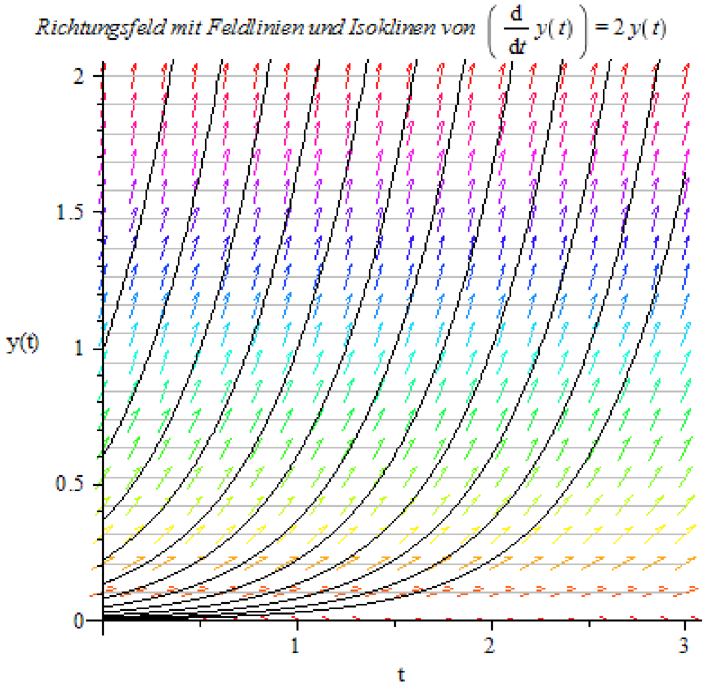
I.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten zunächst die geometrische Interpretation einer expliziten DGL 1. Ordnung, d.h. einer DGL der Form $y' = f(x,y)$. Durch eine solche Gleichung wird eine differenzierbare Kurve $y(x)$ gesucht, deren Tangentensteigung $y'(x)$ in jedem Kurvenpunkt gleich $f(x,y)$ ist. Zeichnet man nun an Punkten (x,y) in der xy-Ebene kurze Strecken (Linienelemente) mit Steigung $y'(x) = f(x,y)$, so entsteht das sogenannte Richtungsfeld der DGL. $y(x)$ ist genau dann eine Lösungskurve der DGL, wenn sie eine Feldlinie dieses Richtungsfeldes beschreibt, d.h. wenn in jedem Punkt der Kurve das zugehörige Linienelement tangential verläuft. Für die praktische Bestimmung eines solchen Richtungsfeldes kann es sinnvoll sein, die durch $f(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, festgelegten sogenannten Isoklinen (Linien mit konstantem Anstieg) zu betrachten. Wir schauen uns den Sachverhalt an einem konkreten Beispiel an.

Beispiel 1.2.1: Wir betrachten noch einmal die DGLen aus Beispiel 1.1.2 mit speziellen Werten für die allgemeinen Parameter a und b.

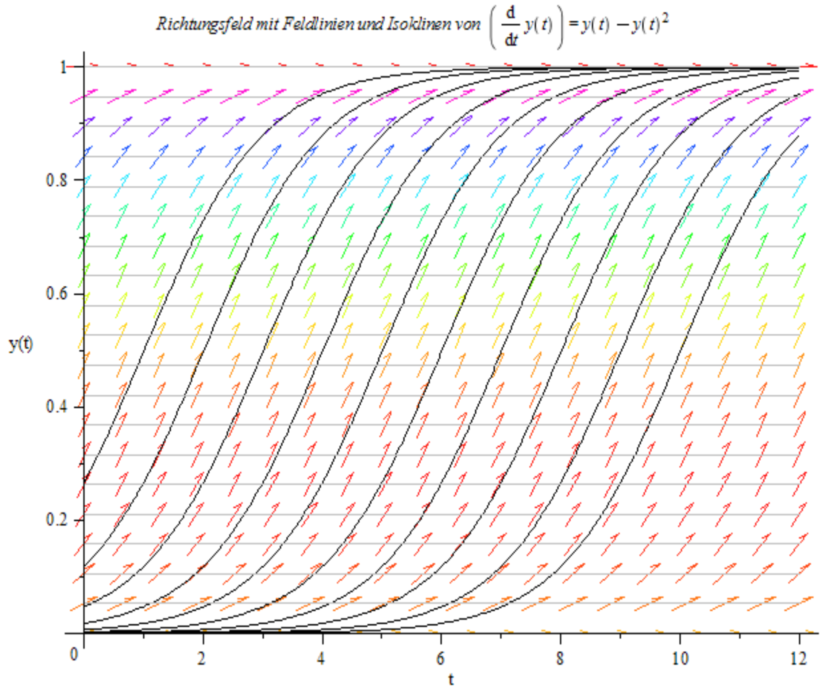
Die DGL $\dot{y}(t) = 2y(t)$ hat die Lösungen $y(t) = C\cdot e^{2t}$.

An den Punkten (t,y) in der ty-Ebene haben die Linienelemente die Steigung $2y$. In jedem Punkt einer Lösungskurve verläuft das zugehörige Linienelement tangential. Die Isoklinen sind gegeben durch $y = c$, d.h. Parallelen zur t-Achse.



In der nebenstehenden Grafik sind Linienelemente mit gleicher Steigung jeweils in derselben Farbe wiedergegeben. Die Isoklinen sind in hellgrau und einige Feldlinien (Lösungskurven) in schwarz gezeichnet.

Die DGL $y'(t) = y(t) - [y(t)]^2$ hat die Lösungen $y(t) = \dfrac{1}{1 + Ce^{-t}}$.
An den Punkten (t, y) in der ty-Ebene haben die Linienelemente die Steigung $y - y^2$. Die Isoklinen sind gegeben durch $y - y^2 = c$, d.h. auch hier wieder durch Parallelen zur t-Achse.



Wie oben sind auch hier Linienelemente mit gleicher Steigung in derselben Farbe wiedergegeben, die Isoklinen in hellgrau und einige Lösungskurven in schwarz gezeichnet.

Im Folgenden behandeln wir nun einige Lösungsmethoden für DGL 1. Ordnung.

DGL mit getrennten Variablen

Dabei handelt es sich um DGLen, die sich in der Form

$$y' = f(t) \cdot g(y)$$

darstellen lassen, d.h. y' ist ein Produkt zweier Funktionen, in dem jeder Faktor nur von einer der Variablen abhängt. Dabei sind $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf den Intervallen I bzw. J. Die Methode zur Bestimmung der Lösungen einer solchen DGL wird mit Trennung der Variablen (TdV) bezeichnet. Zur Bestimmung der Lösungen müssen 2 Fälle unterschieden werden.

1. Fall: $g(\eta) = 0$ für ein $\eta \in J$. Dann ist $y(t) = \eta$ eine (konstante) Lösung der DGL. Solche speziellen Lösungen nennt man auch singuläre Lösungen.

2. Fall: $g(y) \neq 0$. Die Bestimmung der allgemeinen Lösung erfolgt in 5 Schritten.

1. Schritt: Umschreiben der DGL in

$$\frac{dy}{dt} = f(t) g(y) \qquad (*)$$

2. Schritt: Trennung der Variablen

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(t) dt$$

3. Schritt: Integration auf beiden Seiten

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt$$

4. Schritt: Berechnung der beiden Integrale liefert Lösungen der DGL, möglicherweise in impliziter Form.

5. Schritt: Wenn möglich bzw. sinnvoll, Umformen der Lösungen in explizite Form.

Bevor wir zu dieser Methode Beispiele betrachten, wollen wir zunächst die Vorgehensweise für den 2. Fall rechtfertigen.

Dazu setzen wir $\tilde{g}(y) = \frac{1}{g(y)}$ und bezeichnen mit $\tilde{G}$ und F Stammfunktionen von $\tilde{g}$ und f.

Unter Verwendung der Kettenregel und der DGL erhalten wir zunächst

$$\frac{d}{dt}\tilde{G}(y(t)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} \tilde{g}(y)\cdot y' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition } \tilde{g}}}{=} \frac{1}{g(y)}\cdot y' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DGL}}}{=} f(t)$$

Integriert man nun auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$\tilde{G}(y) = F(t) + C \quad \text{bzw.} \quad \int \tilde{g}(y)\,dy = \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt.$$

Beispiel 1.2.2: a) Gesucht sind die Lösungen der DGL $\dot{y} = -2ty^2$.

b) Was ist die Lösung des AWP $\dot{y} = -2ty^2$ mit $y(1) = -1$.

Die DGL hat getrennte Variablen mit $g(y) = y^2$, $f(t) = -2t$.

1. Fall: $g(\eta) = 0$ für $\eta = 0$. Also ist $y(t) = 0$ eine singuläre Lösung.

2. Fall: $g(y) \neq 0$

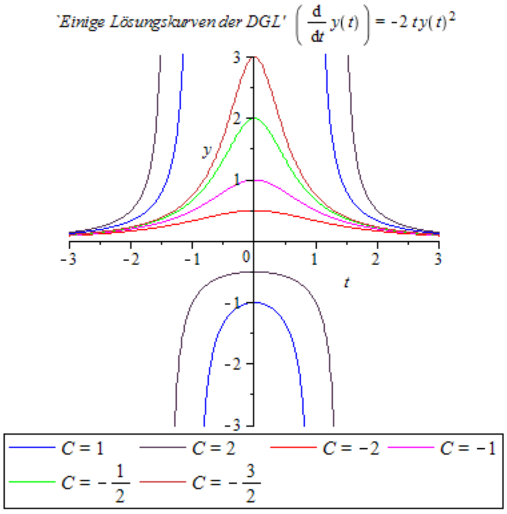
1. Schritt: $\frac{dy}{dt} = -2ty^2$

2. Schritt: $\frac{1}{y^2}\,dy = -2t\,dt$

3. Schritt: $\int \frac{1}{y^2}\,dy = -2\int t\,dt$

4. Schritt: $-y^{-1} = -t^2 + C$

5. Schritt: $y = \frac{1}{t^2 - C}$



Einige der Lösungskurven für verschiedene Werte der Integrationskonstanten C sind in der nebenstehenden Grafik abgebildet. Für $C > 0$ haben die Lösungen Polstellen mit Vorzeichenwechsel an den Stellen $t = \pm\sqrt{C}$. Für $C = 0$ gibt es eine Polstelle bei $t = 0$.

Beispiel 1.2.3: Logistisches Wachstum

Der Automobilbestand eines Landes zum Zeitpunkt t sei $a(t)$. Eine Modellannahme geht davon aus, dass die relative Wachstumsrate $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ bei einem geringen Bestand annähernd konstant ist und gegen Null konvergiert, wenn sich der Bestand einer gewissen Kapazitätsgrenze K nähert. Eine spezielle Form dieses Modells ist die Annahme, dass die relative Änderungsrate mit steigendem Bestand linear abnimmt. Daraus ergibt sich die DGL

$$\frac{\dot{a}}{a} = r\left(1 - \frac{a}{K}\right) \quad \text{bzw.} \quad \dot{a} = r \cdot \frac{a(K-a)}{K}$$

mit den Bedingungen $0 < a(t) < K$, d.h. der Bestand ist zu jeder Zeit positiv und unterhalb der Kapazitätsgrenze.

Wir bestimmen die allgemeine Lösung der DGL mit der Methode TdV.

1. Schritt: $\frac{da}{dt} = r \cdot \frac{a(K-a)}{K}$

2. Schritt: $\frac{K}{a(K-a)}\,da = r\,dt$

3. Schritt: $\int \frac{K}{a(K-a)}\,da = r \int 1\,dt$

4. Schritt: Es gilt $\frac{K}{a(K-a)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{K-a}$. Damit erhält man

$$\ln|a| - \ln|K-a| = r \cdot t + C.$$

5. Schritt: Da $0 < a < K-a$, gilt $\ln|a| - \ln|K-a| = \ln(a) - \ln(K-a) = \ln\frac{a}{K-a}$.

$$\ln\frac{a}{K-a} = r \cdot t + C \iff \frac{a}{K-a} = \underbrace{e^{rt+C}}_{= e^{rt} \cdot e^{C}}$$

$$\iff a \cdot e^{-C} \cdot e^{-rt} = K - a$$

$$\iff a = \frac{K}{1 + A \cdot e^{-rt}}, \text{ wobei } A = e^{-C} > 0$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist $a(t) = \frac{K}{1 + A \cdot e^{-rt}}$, $A > 0$. Dies ist eine logistische Funktion. Da $A > 0$, gilt $\lim_{t\to\infty} a(t) = K$, d.h. für wachsendes t nähert sich der Bestand der Kapazitätsgrenze.

Beispiel 1.2.4: Ökonomisches Wachstum

Wir bezeichnen mit $b(t)$ das Bruttonationaleinkommen eines Landes, mit $k(t)$ den Kapitalbestand und mit $\ell(t)$ die Arbeitskraft zur Zeit t.
Wir legen folgende Modellannahmen zugrunde:
Es seien $A, \alpha, s, \ell_0, \lambda$ positive Konstanten mit $\alpha < 1$.

1) $b(t) = A \cdot [k(t)]^{1-\alpha} [\ell(t)]^{\alpha}$ (Cobb-Douglas Produktionsfunktion)
2) $\dot{k}(t) = s \cdot b(t)$ (Änderungsrate des Kapitals proportional zu $b(t)$)
3) $\ell(t) = \ell_0 \cdot e^{\lambda t}$ (Exponentielles Wachstum der Arbeitskraft)

Wir wollen wissen, wie sich das Kapital entwickelt mit der Anfangsbedingung $k(0) = k_0$. Dazu stellen wir zunächst eine geeignete DGL auf.
Aus 1) und 2) ergibt sich zunächst: $\dot{k}(t) = s \cdot A \cdot [k(t)]^{1-\alpha} [\ell(t)]^{\alpha}$
Einsetzen von 3) liefert schließlich die DGL mit trennbaren Variablen

$$\dot{k}(t) = s \cdot A \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} [k(t)]^{1-\alpha}$$

Für unsere weiteren Überlegungen setzen wir $k(t) > 0$ voraus.

1. Schritt: $\dfrac{dk}{dt} = s \cdot A \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} \cdot k^{1-\alpha}$

2. Schritt: $k^{\alpha-1} dk = s \cdot A \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} dt$

3. Schritt: $\int k^{\alpha-1} dk = s \cdot A \cdot \ell_0^{\alpha} \int e^{\alpha\lambda t} dt$

4. Schritt: $\frac{1}{\alpha} k^{\alpha} = \frac{sA}{\alpha\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} + C$

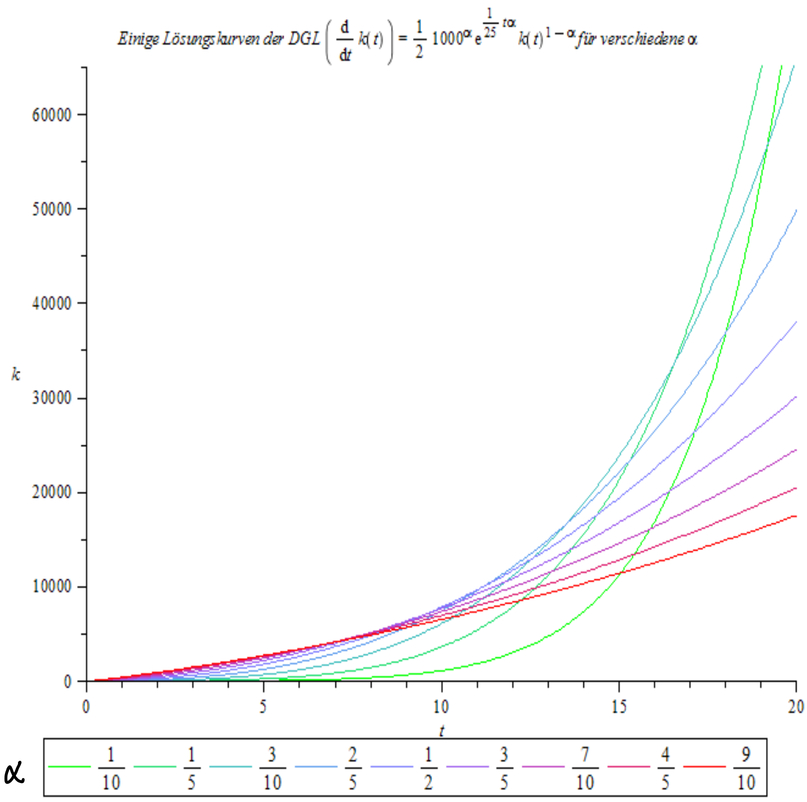
5. Schritt: $k(t) = \left\{ \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} + C \right\}^{1/\alpha}$

Dies ist die allgemeine Lösung der DGL. Aus der AB $k(0) = k_0$ erhalten wir durch Einsetzen in die allgemeine Lösung

$$\left\{ \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} + C \right\}^{1/\alpha} = k_0 \iff C = k_0^{\alpha} - \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha}$$

Die Lösung des AWP ist somit

$$k(t) = \left\{ \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} + k_0^{\alpha} - \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} \right\}^{1/\alpha} = \left\{ k_0^{\alpha} + \frac{sA}{\lambda} \ell_0^{\alpha} \left[e^{\alpha\lambda t} - 1 \right] \right\}^{1/\alpha}.$$



In der nebenstehenden Grafik sind für $k_0 = 1$, $\ell_0 = 1000$, $s = \frac{1}{2}$, $A = 1$, $\lambda = \frac{1}{25}$ die Lösungskurven des AWP gezeichnet.

Der Wert für α variiert von $\frac{1}{10}$ bis $\frac{9}{10}$.

Wir betrachten nun noch, wie sich das Verhältnis $\frac{k(t)}{\ell(t)}$ und $\frac{b(t)}{\ell(t)}$ für $t \to \infty$ verhält. Zunächst gilt:

$$\frac{k(t)}{\ell(t)} = \frac{\left\{k_0^{\alpha} + \frac{sA}{\lambda}\ell_0^{\alpha}\left[e^{\alpha\lambda t} - 1\right]\right\}^{1/\alpha}}{\left\{(\ell_0 \cdot e^{\lambda t})^{\alpha}\right\}^{1/\alpha}}$$

$$= \left\{\frac{k_0^{\alpha}}{\ell_0^{\alpha}} \cdot e^{-\alpha\lambda t} + \frac{sA}{\lambda}\left[1 - e^{-\alpha t}\right]\right\}^{1/\alpha}$$

$$\frac{b(t)}{\ell(t)} = A \cdot \frac{[k(t)]^{1-\alpha}\,[\ell(t)]^{\alpha}}{\ell(t)} = A \cdot \left\{\frac{k(t)}{\ell(t)}\right\}^{1-\alpha}$$

Da $\alpha, \lambda > 0$ gilt weiter: $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\alpha\lambda t} = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-\alpha t} = 0$

Damit folgt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{k(t)}{\ell(t)} = \left\{\frac{sA}{\lambda}\right\}^{1/\alpha}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{b(t)}{\ell(t)} = A \cdot \left\{\frac{sA}{\lambda}\right\}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Beispiel 1.2.5: CES Produktionsfunktion

Im Zusammenhang mit Untersuchungen von CES Funktionen, stießen Arrow, Chenery, Minhas und Solow auf die folgende DGL:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-\alpha y^{\varrho})}{x} \quad \text{mit } x, y > 0 \text{ und Konstanten } \alpha, \varrho, \varrho \neq 0.$$

2. Schritt: $\frac{1}{y(1-\alpha y^{\varrho})}\, dy = \frac{1}{x}\, dx$

3. Schritt: $\int \frac{1}{y(1-\alpha y^{\varrho})}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$

4. Schritt: Für die Berechnung des Integrals auf der linken Seite benötigt man die Identität $\frac{1}{y(1-\alpha y^{\varrho})} = \frac{1}{y} + \alpha \cdot \frac{y^{\varrho-1}}{1-\alpha y^{\varrho}}$

Damit gilt:

$$\int \frac{1}{y(1-\alpha y^{\varrho})}\, dy = \int \frac{1}{y}\, dy + \frac{-1}{\varrho} \int \frac{-\varrho\alpha y^{\varrho-1}}{1-\alpha y^{\varrho}}\, dy$$
$$= \ln y - \frac{1}{\varrho} \ln|1-\alpha y^{\varrho}| + C, \text{ da } y > 0.$$

Also erhalten wir

$$\ln y - \frac{1}{\varrho} \ln|1-\alpha y^{\varrho}| = \ln x + C$$

5. Schritt:

$$\ln y - \frac{1}{\varrho} \ln|1-\alpha y^{\varrho}| = \ln x + C \quad | \cdot \varrho$$
$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y^{\varrho}}{1-\alpha y^{\varrho}}\right| = \ln x^{\varrho} + \varrho \cdot C \quad \text{| Anwenden Exponentialfkt.}$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{y^{\varrho}}{1-\alpha y^{\varrho}}\right| = C_1 \cdot x^{\varrho} \quad \text{mit } C_1 = e^{\varrho C}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y^{\varrho}}{1-\alpha y^{\varrho}} = C_2 \cdot x^{\varrho} \quad \text{mit } C_2 = \pm e^{\varrho \cdot C}$$
$$\Leftrightarrow y^{\varrho} + C_2 \alpha x^{\varrho} y^{\varrho} = C_2 x^{\varrho}$$
$$\Leftrightarrow y = \left\{\frac{C_2 x^{\varrho}}{1 + C_2 \alpha x^{\varrho}}\right\}^{1/\varrho}$$
$$\Leftrightarrow y = \left\{C_3 x^{-\varrho} + \alpha\right\}^{-1/\varrho} \quad \text{mit } C_3 = \frac{1}{C_2}$$

Den Zusammenhang mit CES-Funktionen sieht man, wenn man $x = \frac{K}{L}$, $y = \frac{Y}{L}$ mit K-Kapital, Y-Output, L-Arbeit und neue

Konstanten $A = (\alpha + C_3)^{-1/\rho}$, $a = C_3(\alpha + C_3)^{-1}$,
d.h. $a = C_3(\alpha + C_3)^{-\frac{1}{\rho}\cdot\rho} = C_3 \cdot A^{\rho}$, $1 - a = 1 - C_3 A^{\rho} = A^{\rho}(A^{-\rho} - C_3) = A^{\rho}\cdot\alpha$
einsetzt:

$$
\begin{aligned}
Y &= \left\{ C_3 \cdot \frac{L^{\rho}}{K^{\rho}} \cdot L^{-\rho} + \alpha L^{-\rho} \right\}^{-1/\rho} \\
&= \left\{ C_3 \cdot K^{-\rho} + \alpha L^{-\rho} \right\}^{-1/\rho} \\
&= A \cdot \left\{ A^{\rho} \cdot C_3 K^{-\rho} + A^{\rho} \alpha L^{-\rho} \right\}^{-1/\rho} \\
&= A \left\{ a K^{-\rho} + (1-a) L^{-\rho} \right\}^{-1/\rho}
\end{aligned}
$$

Dies ist eine spezielle Form der CES-Funktion.

lineare DGL 1. Ordnung

Eine lineare DGL 1. Ordnung lässt sich allgemein in der Form

$$\dot{y} + a_0(t) y = r(t),$$

wobei $a_0(t), r(t)$ in einem Intervall I definierte stetige Funktionen der unabhängigen Variablen t sind. Die rechte Seite $r(t)$ bezeichnet man auch als Störfunktion. Die DGL heißt homogen, falls $r(t) = 0$ ist, sonst inhomogen. Solche DGLen heißen linear, weil die linke Seite eine lineare Funktion von y und $\dot{y}$ ist.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $A(t)$ eine Stammfunktion von $a_0(t)$ und multiplizieren die DGL auf beiden Seiten mit $e^{A(t)} \neq 0$.

Dies liefert zunächst:

$$e^{A(t)} \cdot \dot{y} + a_0(t) e^{A(t)} y = r(t) \cdot e^{A(t)}.$$

Nach der Kettenregel gilt: $\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)} \cdot y\right) = e^{A(t)} \cdot \dot{y} + a_0(t) e^{A(t)} y$

Also erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)} \cdot y\right) = r(t) \cdot e^{A(t)}$$

Integration auf beiden Seiten der DGL liefert dann:

$$e^{A(t)} \cdot y = \int r(t)\, e^{A(t)}\, dt + C$$

d.h. nach Division durch $e^{A(t)} \neq 0$:

$$y(t) = e^{-A(t)}\left(\int r(t)\, e^{A(t)}\, dt + C\right) \qquad (*)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der linearen DGL 1. Ordnung. Man merkt sich nun entweder die fertige Lösungformel oder das oben angegebene Vorgehen. Hier braucht man für $\int r(t) e^{A(t)} dt$ nur eine Stammfunktion von $r(t) e^{A(t)}$. Diese Schreibweise macht die Struktur der allgemeinen Lösung klarer (s. u.).

Für den Fall, dass die DGL homogen ist, d.h. $r(t) = 0$, erhält man die allgemeine Lösung: $y(t) = C \cdot e^{-A(t)}$. $\qquad (**)$

Bevor wir uns einige Beispiele anschauen, wollen wir uns mit der Struktur der allgemeinen Lösung beschäftigen. Aus $(*)$ und $(**)$ sieht man unmittelbar ein, dass $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ gilt. Dabei bezeichnet $y_p(t)$ eine beliebige spezielle, sogenannte partikuläre Lösung der inhomogenen DGL und $y_h(t) = C \cdot e^{-A(t)}$ die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL $\dot{y} + a_0(t)\, y = 0$.

Weiter gilt das Superpositionsprinzip, d.h.:

Sind y_1 bzw. y_2 Lösungen von $\dot{y}_1 + a_0(t)\, y_1 = r_1(t)$ bzw. $\dot{y}_2 + a_0(t)\, y_2 = r_2(t)$, so ist $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Lösung von $\dot{y} + a_0(t)\, y = \alpha r_1(t) + \beta r_2(t)$.

Beispiel 1.2.5: Gesucht ist die Lösung des AWP

$$\dot{y} + t y = t^3 \quad , \quad y(0) = 4. \qquad (\text{Hier ist also } a_0(t) = t,\ r(t) = t^2)$$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der DGL.

1. Schritt: Bestimmung einer Stammfunktion $A(t)$ von $a_0(t) = t$.

$$A(t) = \tfrac{1}{2} t^2$$

2. Schritt: Multiplikation der DGL mit $e^{A(t)} = e^{\frac{1}{2}t^2}$

$$e^{\frac{1}{2}t^2}(\dot{y} + t y) = e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot t^3$$

3. Schritt: Umschreiben der linken Seite mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot y\right) = e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot t^3$$

4. Schritt: Integration

Zunächst gilt mit der Substitution $\tau=\frac{1}{2}t^2$, $d\tau = t\,dt$

$$\int t^3 \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}\,dt = 2\int \tau e^{\tau}\,d\tau$$

$$= 2\left\{\tau\cdot e^{\tau} - \int e^{\tau}\,d\tau\right\}$$

$$= 2e^{\tau}(\tau-1) + C$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2}(t^2-2) + C$$

Partielle Integration

$u=\tau \qquad v'=e^{\tau}$

$u'=1 \qquad v=e^{\tau}$

Integration der DGL liefert somit:

$$e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot y = e^{\frac{1}{2}t^2}(t^2-2)+C$$

5. Schritt: Divion durch $e^{\frac{1}{2}t^2}$ liefert die allgemeine Lösung der DGL

$$y(t) = t^2-2+Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Für die Bestimmung der Lösung des AWP beachten wir die AB

$y(0)=4$, d.h. $-2+C=4 \iff C=6$

Somit ist $y(t)=t^2-2+6e^{-\frac{1}{2}t^2}$ die Lösung des AWP.

Beispiel 1.2.6: Preisangleichung

Wir bezeichnen mit $D(P)=a-bP$ und $S(P)=\alpha+\beta P$ die Nachfrage- und Angebotsfunktion für ein Gut in Abhängigkeit vom Preis P mit positiven Konstanten a, b, α, β. Der Preis $P=P(t)$ variiere mit der Zeit t und die momentane Änderungsrate $\dot{P}(t)$ sei proportional zum Nachfrageüberschuss $D(P)-S(P)$, d.h.

$$\dot{P} = \lambda\left[D(P)-S(P)\right] \quad \text{für eine positive Konstante } \lambda.$$

Mit den Gleichungen für $D(P)$ und $S(P)$ ergibt sich daraus

$$\dot{P} = \lambda(a-bP-\alpha-\beta P)$$

$$\iff \dot{P} + \lambda(b+\beta)P = \lambda(a-\alpha),$$

d.h. eine lineare DGL 1. Ordnung mit der allgemeinen Lösung

$$P(t) = e^{-\lambda(b+\beta)t} \int \lambda(a-\alpha) e^{\lambda(b+\beta)t}\, dt$$
$$= e^{-\lambda(b+\beta)t}\left(\lambda(a-\alpha)\cdot\frac{1}{\lambda(b+\beta)}\cdot e^{\lambda(b+\beta)t} + C\right)$$
$$= \frac{a-\alpha}{b+\beta} + C\cdot e^{-\lambda(b+\beta)t}$$

Da nach Voraussetzung $\lambda(b+\beta)>0$ ist, gilt
$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$$

Dies ist gerade der Gleichgewichtspreis, d.h. der Preis, bei dem Angebot und Nachfrage übereinstimmen. $D(P)=S(P) \Longleftrightarrow P=\frac{a-\alpha}{b+\beta}$

Bevor wir ein weiteres umfangreiches Beispiel anschauen, überlegen wir noch, wie man die Lösung eines AWP mit einer linearen DGL 1. Ordnung
$$\dot{y} + a_0(t)\, y = r(t) \quad , y(t_0) = y_0$$
in einer geschlossenen Formel angeben kann.

Die allgemeine Lösung der DGL hatten wir bereits bestimmt zu
$$y(t) = e^{-A(t)}\left(\int r(t) e^{A(t)}\, dt + C\right) \qquad (*)$$
mit $A(t)$ eine Stammfunktion von $a_0(t)$. Somit ist nach dem Hauptsatz der Integralrechnung $\int_s^t a_0(\tau)\, d\tau = A(t) - A(s)$.

Weiter bezeichne zur Abkürzung $F(t)$ eine Stammfunktion von $r(t)e^{A(t)}$, d.h. auch hier wieder $\int_{t_0}^t r(s) e^{A(s)}\, ds = F(t) - F(t_0)$.

Mit der Abkürzung $F(t)$ wird $(*)$ zu: $y(t) = e^{-A(t)}F(t) + Ce^{-A(t)}$ $(**)$

Einsetzen der AB liefert:
$$y_0 = e^{-A(t_0)}F(t_0) + Ce^{-A(t_0)} \Longleftrightarrow C = y_0 e^{A(t_0)} - F(t_0)$$

Einsetzen von C in die allgemeine Lösung $(**)$ ergibt
$$y(t) = e^{-A(t)}F(t) + [y_0 e^{A(t_0)} - F(t_0)]e^{-A(t)}$$
$$= e^{-A(t)}[F(t) - F(t_0)] + y_0 e^{-[A(t)-A(t_0)]}$$
$$= \int_{t_0}^t r(s) e^{-[A(t)-A(s)]}\, ds + y_0 e^{-[A(t)-A(t_0)]}$$
$$= \int_{t_0}^t r(s)\, e^{-\int_s^t a(\tau)\, d\tau}\, ds + y_0 e^{-\int_{t_0}^t a_0(\tau)\, d\tau} \qquad (***)$$

als Lösung des AWP.

Beispiel 1.2.7: Modell für volkswirtschaftliches Wachsum in einem Entwicklungsland

Wir bezeichnen mit $x(t)$ das BIP pro Jahr, mit $k(t)$ den Kapitalbestand und mit $h(t)$ den Netto-Zustrom ausländischer Investitionen pro Jahr. Die Größe der Bevölkerung sei $n(t)$.

Wir treffen folgende Modellannahmen.

1) $x(t) = \sigma k(t)$, d.h. BIP proportional zum Kapitalbestand, σ bezeichnet die durchschnittliche Produktivität des Kapitals

2) $\dot{k}(t) = \alpha x(t) + h(t)$, d.h. die momentane Änderungsrate des Kapitals ist eine gewichtete Summe des BIP und der Netto-Auslandsinvestitionen

3) $h(t) = h_0 \cdot e^{\mu t}$, d.h. die relative Änderungsrate der Netto-Auslandsinvestitionen $\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \mu$ sei konstant

4) $n(t) = n_0 \cdot e^{\varrho t}$, d.h. die relative Änderungsrate der Bevölkerungsgröße $\frac{\dot{n}(t)}{n(t)} = \varrho$ wird als konstant angenommen

Die Aufgabenstellung soll nun wie folgt sein.

a) Herleitung einer DGL aus den Annahmen 1) – 3).

b) Lösen der DGL mit der AB $k(0) = k_0$

c) Herleitung einer Formel für das BIP pro Kopf, d.h. für $z(t) = \frac{x(t)}{n(t)}$.

d) Herleitung einer Bedingung dafür, dass das BIP pro Kopf streng monoton wachsend in t ist, wenn $h_0 = 0$ gilt.
Eine übliche Annahme für die durchschnittliche Produktivität des Kapitals σ in Entwicklungsländern ist 0.3. Weiter wachse die Bevölkerung mit einer Rate von 3%, d.h. $\varrho = 0.03$. Wie groß muss dann α sein, damit $z(t) = \frac{x(t)}{n(t)}$ eine streng monoton wachsende Funktion ist?

e) Zeige, dass $z(t) > z(0) \cdot e^{(\alpha\sigma - \varrho)t}$ für alle $t > 0$.

a) Einsetzen von $x(t)$ aus 1) und $h(t)$ aus 3) in 2) liefert die lineare DGL

$$\dot{k} - \alpha\sigma k = h_0 e^{\mu t}.$$

b) Bestimmen der allgemeinen Lösung mit (*) auf S. 13 für $\mu \neq \alpha\sigma$

$$k(t) = e^{\alpha\sigma t}\left(\int h_0 e^{\mu t} \cdot e^{-\alpha\sigma t} dt + C\right)$$

$$= e^{\alpha\sigma t}\left(h_0 \int e^{(\mu-\alpha\sigma)t} dt + C\right)$$

$$= e^{\alpha\sigma t}\left(h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{(\mu-\alpha\sigma)t} + C\right)$$

$$= h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{\mu t} + C e^{\alpha\sigma t}$$

Mit der AB $k(0) = k_0$ erhalten wir

$$h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} + C = k_0 \iff C = k_0 - h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}$$

Somit löst

$$k(t) = h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{\mu t} + \left(k_0 - h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\right) e^{\alpha\sigma t} \quad \text{das AWP.}$$

Alternativ kann man das AWP auch mit der Lösungsformel (***) auf S. 15 lösen. Dazu benötigt man $\int_s^t (-\alpha\sigma) d\tau = -\alpha\sigma(t-s)$ und $\int_0^t (-\alpha\sigma) d\tau = -\alpha\sigma t$. Einsetzen in (***) S. 15 liefert:

$$k(t) = \int_0^t h_0 e^{\mu s} e^{\alpha\sigma(t-s)} ds + k_0 e^{\alpha\sigma t}$$

$$= h_0 e^{\alpha\sigma t} \int_0^t e^{(\mu-\alpha\sigma)s} ds + k_0 e^{\alpha\sigma t}$$

$$= h_0 e^{\alpha\sigma t} \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{(\mu-\alpha\sigma)s}\Big|_0^t + k_0 e^{\alpha\sigma t} \qquad \text{für } \mu \neq \alpha\sigma$$

$$= h_0 e^{\alpha\sigma t} \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\left(e^{(\mu-\alpha\sigma)t} - 1\right) + k_0 e^{\alpha\sigma t}$$

$$= h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} \cdot e^{\mu t} + \left(k_0 - h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\right) e^{\alpha\sigma t}$$

c)

$$z(t) = \frac{x(t)}{n(t)} \underset{1),3)}{=} \frac{\sigma \cdot k(t)}{n_0 \cdot e^{\varrho t}}$$

$$\underset{b)}{=} \frac{\sigma}{n_0 e^{\varrho t}} \left\{ h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} \cdot e^{\mu t} + \left(k_0 - h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\right) e^{\alpha\sigma t} \right\}$$

$$= \sigma \cdot \frac{h_0}{n_0} \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{(\mu-\varrho)t} + \underbrace{\sigma \cdot \frac{k_0}{n_0}}_{= z(0)} e^{(\alpha\sigma-\varrho)t} - \sigma \cdot \frac{h_0}{n_0} \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} \cdot e^{(\alpha\sigma-\varrho)t}$$

$$= z(0)\cdot e^{(\alpha\sigma-\varrho)t} + \sigma\cdot\frac{h_0}{n_0}\cdot\frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\cdot e^{-\varrho t}\left(e^{\mu t}-e^{\alpha\sigma t}\right)$$

$$= z(0) e^{(\alpha\sigma-\varrho)t} + \sigma\cdot\frac{h_0}{n_0}\cdot\frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\cdot e^{(\alpha\sigma-\varrho)t}\left(e^{(\mu-\alpha\sigma)t}-1\right)$$

d) Mit $h_0 = 0$ folgt aus c)

$$z(t) = z(0)\cdot e^{(\alpha\sigma-\varrho)t}$$

$z(t)$ ist genau dann streng monoton wachsend, wenn $\alpha\sigma > \varrho$

Mit den konkreten Werten $\sigma = 0.3$, $\varrho = 0.03$ also $\alpha > \frac{0.03}{0.3} = \frac{1}{10}$.

e) Wir betrachten $z(t)$ aus c). Es gilt:

$$\underbrace{\sigma\cdot\frac{h_0}{n_0}}_{>0}\cdot\underbrace{\frac{1}{\mu-\alpha\sigma}}_{\substack{>0,\ \mu>\alpha\sigma\\ <0,\ \mu<\alpha\sigma}}\cdot\underbrace{e^{(\alpha\sigma-\varrho)t}}_{>0}\underbrace{\left(\underbrace{e^{(\mu-\alpha\sigma)t}}_{\substack{>1,\ \mu>\alpha\sigma\\ <1,\ \mu<\alpha\sigma}}-1\right)}_{\substack{>0,\ \mu>\alpha\sigma\\ <0,\ \mu<\alpha\sigma}} > 0$$

Aus der Darstellung für $z(t)$ aus c) folgt damit unmittelbar die Behauptung.

Nachdem wir uns nun mit einigen grundlegenden Lösungsmethoden für konkrete Typen von DGLen 1. Ordnung beschäftigt haben, wenden wir uns allgemeineren Fragestellungen zu.

Qualitative Überlegungen und Stabilität

Kann man die Lösungen von DGLen explizit angeben, so lässt sich das Verhalten in der Regel leicht untersuchen. Leider kann man die Lösungen oft nicht explizit angeben, möchte aber trotzdem Aussagen über das Lösungsverhalten machen. Weitere Probleme können dadurch entstehen, dass die DGL weitere Parameter oder auch nicht explizit angegebene Funktionen enthält. Dies ist nicht ungewöhnlich, da jedes ökonomische Modell auf (vereinfachenden) Annahmen basiert. Um solche Annahmen so schwach wie möglich formulieren zu können, werden oft Parameter oder auch Funktionen verwendet, von denen man nur bestimmte Eigenschaften fordert (z.B. positiver Parameter, monoton wachsende Funktion).

Autonome DGL

Dies sind DGL, die sich in der Form

$$\dot{y} = F(y)$$

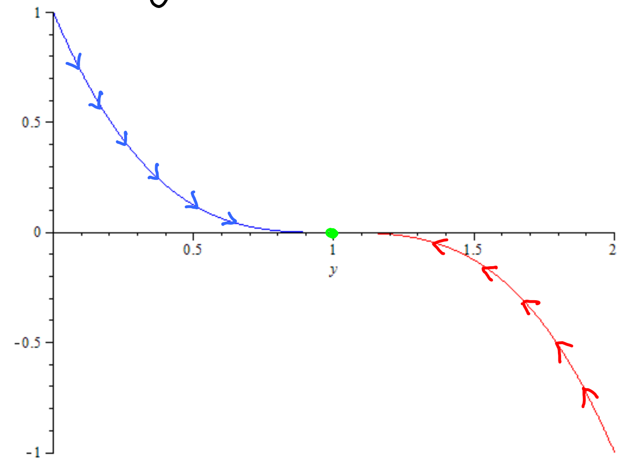
angeben lassen; die unabhängige Variable tritt in der rechten Seite nicht auf. Zur Untersuchung des Lösungsverhaltens studieren wir das sogenannte Phasendiagramm. Dazu zeichnet man die Kurve $\dot{y} = F(y)$ in der $(y, \dot{y})$-Ebene.

Zur Erläuterung, was man an einem solchen Phasendiagramm z.B. ablesen kann, betrachten wir die DGL

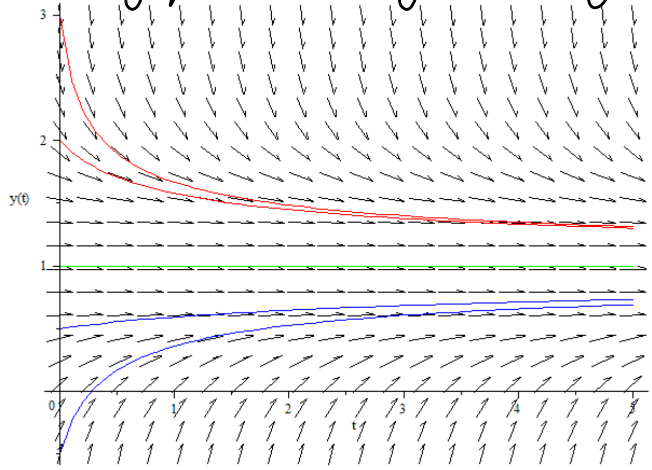
$$\dot{y}(t) = -(y(t) - 1)^3$$

mit der allgemeinen Lösung $y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2(t+C)}}$ bzw. $y(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2(t+C)}}$, $t > -C$, und der singulären Lösung $y(t) = 1$.

Phasendiagramm



Richtungsfeld mit einigen Lösungskurven



Zu jeder Lösung $y = y(t)$ gibt es ein zugehöriges $\dot{y} = \dot{y}(t)$. Für jedes t ist $(y(t), \dot{y}(t))$ ein Punkt auf der Kurve im Phasendiagramm. Wir betrachten nun einen Punkt oberhalb der horizontalen Achse. Dann ist $\dot{y}(t) = F(y(t)) > 0$, d.h. y ist wachsend in t. Wenn wir ausgehend von einem solchen Punkt im Phasendiagramm t vergrößern, gelangen wir also zu einem Punkt, der weiter rechts liegt. Dies wird durch die blauen Pfeile angedeutet. Betrachten wir dagegen einen Punkt unterhalb der horizontalen Achse, so ist $\dot{y}(t) = F(y(t)) < 0$, d.h. y ist fallend in t. Ausgehend von einem solchen Punkt gelangen wir somit bei Vergrößerung von t zu einem Punkt, der weiter links liegt. Dies wird durch die roten Pfeile angedeutet. Betrachten wir nun einen Punkt auf der horizontalen Achse, so ist $\dot{y}(t) = F(y(t)) = 0$, d.h. y konstant. Diese Aussagen lassen sich ohne Kenntnis der Lösungen der DGL allein aus dem Phasendiagramm ablesen. In der rechten Graphik sind für das betrachtete Beispiel einige Lösungskurven in den entsprechenden Farben wiedergegeben. Die "grüne" Lösung ist konstant, d.h. ohne Änderung mit der Zeit t, die "blauen" bzw. "roten" Lösungen streben für $t \to \infty$ von oben bzw. von unten gegen die "grüne" Lösung.

Im Folgenden betrachten wir die DGL

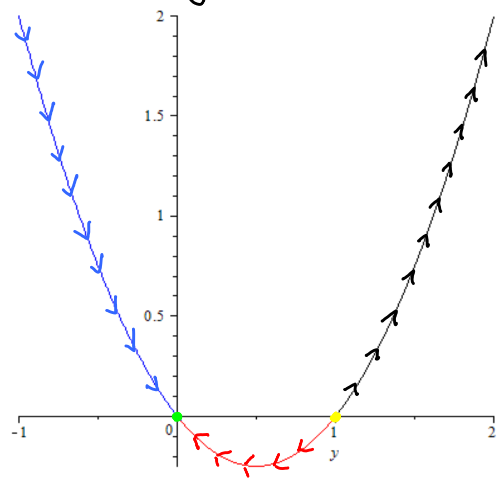
$$\dot{y}(t) = y(t)\,(y(t)-1)$$

mit der allgemeinen Lösung $y(t)=\frac{1}{1+Ce^t}$ mit $t \neq -\ln(-C)$, falls $C<0$ und einer singulären Lösung $y(t)=0$. Um die Entsprechungen in den unten stehenden Grafiken besser wiederfinden zu können, verwenden wir für die allgemeine Lösung unterschiedliche Farben in Abhängigkeit von C, d.h.

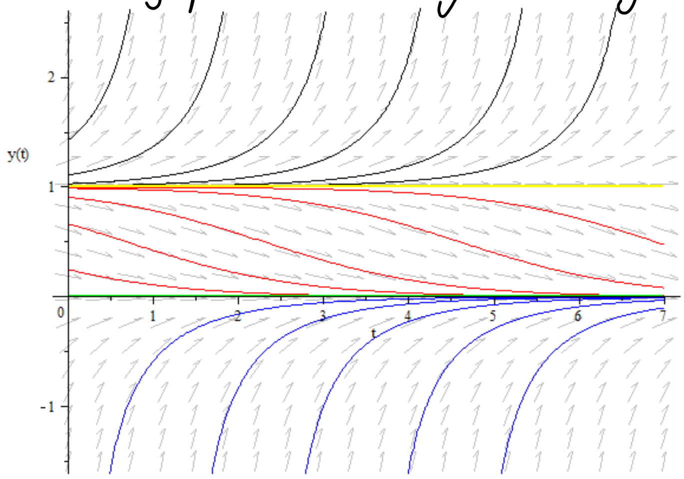
$y(t)=1$, $C=0$, $y(t)=\frac{1}{1+Ce^t}$, $C>0$,

$y(t)=\frac{1}{1+Ce^t}$, $C<0$ und $t<-\ln(-C)$, $y(t)=\frac{1}{1+Ce^t}$, $C<0$ und $t>-\ln(-C)$

Phasendiagramm



Richtungsfeld mit einigen Lösungskurven



In diesem Beispiel haben wir im Phasendiagramm zwei Punkte auf der horizontalen Achse. In diesen Punkten ist wieder $\dot{y}(t)=F(y(t))=0$, d.h. y konstant. Betrachten wir einen roten oder blauen Punkt und erhöhen t, so rücken wir wie im Beispiel vorher näher an den grünen Punkt heran. Anders ist aber nun das Verhalten, wenn wir einen schwarzen

Punkt im Phasendiagramm betrachten. Da die schwarzen Punkte oberhalb der horizontalen Achse liegen, gilt dort wieder $\dot{y}(t) = F(y(t)) > 0$, d.h. $y(t)$ ist wachsend in t. Wir bewegen uns also mit wachsendem t von dem gelben Punkt weg.

Der grüne Punkt hat sozusagen "anziehenden", der gelbe Punkt "abstoßenden" Charakter.

Wir wollen nun die Beobachtungen mathematisch formulieren.

Definition 1.2.8: Eine Lösung $y^* = a$ von $\dot{y}(t) = F(y(t))$ heißt Gleichgewichtslösung, wenn $F(y^*) = 0$ gilt. a heißt dann auch Gleichgewichtszustand der DGL.

Eine Gleichgewichtslösung $y^* = a$ heißt

- lokal asymptotisch stabil, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = a$, wenn $|y(t_0) - a| < \delta$.
- global asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und zusätzlich $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = a$ für jede Lösung $y(t)$.
- instabil sonst.

In dem oben betrachteten 1. Beispiel ist $y(t) = 1$ global asymptotisch stabil, in dem 2. Beispiel ist $y(t) = 0$ lokal asymptotisch stabil und $y(t) = 1$ instabil.

Betrachtet man noch einmal die Phasendiagramme zu den obigen Beispielen, so kann man folgendes hinreichende Resultat festhalten:

Satz 1.2.9: Sei $\dot{y}(t) = F(y(t))$ und $y^* = a$ eine Gleichgewichtslösung, d.h. es gelte $F(y^*) = 0$. Dann gilt:

(i) $\frac{dF}{dy}(a) < 0 \Rightarrow a$ ist lokal asymptotische Gleichgewichtslösung

(ii) $\frac{dF}{dy}(a) > 0 \Rightarrow a$ ist instabile Gleichgewichtslösung

Beispiel 1.2.10: Preisangleichung

In einem allgemeineren Modell als in Beispie 1.2.6 nehmen wir an, dass der Preis $P = P(t)$ die DGL

$$\dot{P} = F(P) = H(D(P) - S(P))$$

erfüllt. $\dot{P}$ ist eine Funktion des Nachfrageüberschusses $U(P) = D(P) - S(P)$. Wir nehmen an, dass für die Funktion H gilt:

$H(0) = 0$, d.h. der Preis ändert sich nicht, wenn der Nachfrageüberschuss Null ist.

$\frac{dH}{dU} > 0$, d.h. H ist streng monoton wachsend in U.

Somit: Ist $U(P) = D(P) - S(P) > 0$, d.h. übersteigt die Nachfrage das Angebot, dann folgt aus den Annahmen über H, dass $\dot{P} > 0$ ist, d.h. der Preis steigt. Entsprechend folgt aus $U(P) = D(P) - S(P) < 0$, $\dot{P} < 0$, d.h. der Preis sinkt, wenn das Angebot größer ist als die Nachfrage.

Sei nun P^* ein Preis, für den Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht sind, d.h. $D(P^*) = S(P^*)$. Nach obiger Annahme gilt dann $\dot{P} = F(P^*) = H(0) = 0$, d.h. P^* ist Gleichgewichtslösung.

Weiter gilt mit der Kettenregel: $\frac{dF}{dP} = \frac{d}{dU} H(U) \cdot \frac{d}{dP}(D(P) - S(P))$.

Da nach obiger Annahme $\frac{d}{dU} H(U) > 0$ ist, stimmt das Vorzeichen von $\frac{dF}{dP}$ mit dem Vorzeichen von $\frac{d}{dP}(D(P) - S(P))$ überein.

Nach Satz 1.2.9 ist der Gleichgewichtspreis P^* lokal asymptotisch stabil, wenn $\frac{d}{dP}(D(P)-S(P))<0$ gilt. Normalerweise ist diese Bedingung erfüllt, da man erwarten kann, dass $\frac{d}{dP}D(P)<0$ und $\frac{d}{dP}S(P)>0$ gilt.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von DGL 1. Ordnung

Im Zusammenhang mit ökonomischen Modellen sind Fragen nach der Existenz von Lösungen von wichtiger Bedeutung. Weiter möchte man wissen, ob eine Lösung eines AWP eindeutig ist. Wir werden uns daher nun mit Resultaten zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen befassen.
Als erstes formulieren wir ein lokales Resultat.

Satz 1.2.11: Gegeben sei ein AWP der Form

$$\dot{y}=f(t,y)\ ,\ y(t_0)=y_0,$$

mit f und f_y stetig in einer offenen Menge A der ty-Ebene, wobei $(t_0,y_0)\in A$ gelten soll. Dann existiert genau eine lokale Lösung des AWP, d.h. es existiert eine von t_0 und y_0 abhängige Zahl $\beta>0$, so dass das AWP auf dem Intervall $(t_0-\beta, t_0+\beta)$ genau eine Lösung besitzt.

Beispiel 1.2.12: Bestimmung des größtmöglichen Intervalls, auf dem eine Lösung des AWP $\dot{y}=y^2$, $y(0)=1$ existiert.
Jede von Null verschiedene Lösung der DGL hat die Form
$y=-\frac{1}{t+C}$. Mit der AB ermittelt man $C=-1$, d.h. $y=\frac{1}{1-t}$ ist Lösung des AWP. Offenbar ist die Lösung auf dem Intervall $(-\infty,1)$ definiert. Die Funktion $y=\frac{1}{1-t}$ erfüllt die DGL zwar auch für $t>1$, dies ist aber nicht Teil der Lösung, die die AB $y(0)=1$ erfüllt.

In dem folgenden Resultat wird ein Intervall angegeben, auf dem die Lösung definiert ist.

Satz 1.2.13: Seien f und f_y stetig auf dem Rechteck

$$R = \{(t,y) : |t - t_0| \leq a \, , \, |y - y_0| \leq b\}$$

und sei $M = \max\limits_{(t,y)\in R} |f(t,y)|$, $\tau = \min(a, \frac{b}{M})$.

Dann besitzt das AWP $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $y(t)$ im Intervall $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$.

Beispiel 1.2.14: Wir betrachten das AWP

$$\dot{y} = y^2 - t \quad , \; y(0) = 0 .$$

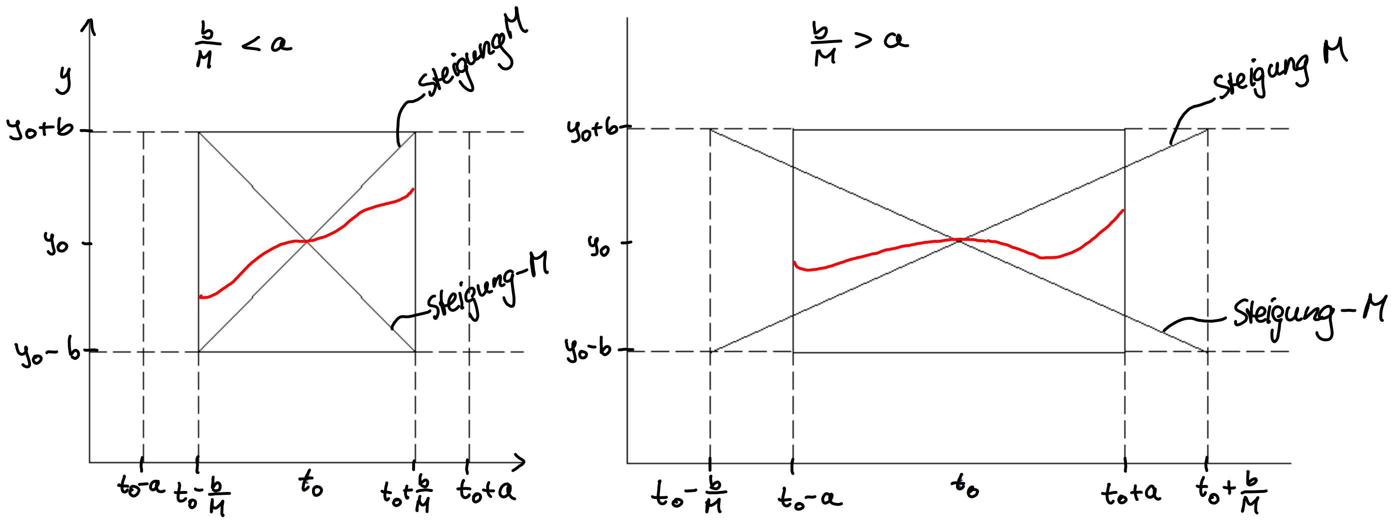
Für $|t| \leq \frac{1}{2}$, $|y| \leq \frac{1}{2}$ ist $|f(t,y)| \leq y^2 + |t| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Damit ergibt sich für $R = \{(t,y) : |t| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}\}$

$$M = \frac{3}{4} \quad , \quad \tau = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Das AWP besitzt also eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Bemerkung 1.2.15: Wir erläutern anschaulich, wie die Aussage in Satz 1.2.13 bzgl. des Intervalls, auf dem die Lösung existiert, zustande kommt. Wegen $|t - t_0| \leq a$ kann τ nicht größer als a sein. Da $-M \leq \dot{y} \leq M$ für $(t,y) \in R$ nach Definition von M, muss der Teil einer Lösungskurve durch (t_0, y_0), der in R liegt zwischen den Geraden durch (t_0, y_0) mit Steigungen $\pm M$ liegen (vgl. Skizze).



Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch ein globales Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit angeben.

Satz 1.2.16: Seien f und f_y stetig für alle (t,y). Seien $a(t), b(t)$ Funktionen, so dass (*) $|f(t,y)| \leq a(t) \cdot |y| + b(t)$ für alle (t,y).
Dann existiert zu beliebigem (t_0, y_0) eine eindeutig bestimmte Lösung des AWP $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, die für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist.
Ersetzt man (*) durch die Bedingung
(**) $y f(t,y) \leq a(t) y^2 + b(t)$ für alle y und alle $t \geq t_0$, dann hat das AWP eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf $[t_0, \infty)$ definiert ist.

Beispiel 1.2.17: Wir betrachten das AWP $\dot{y} = -y^3$, $y(1) = 1$.
Die Bedingung (*) aus Satz 1.2.16 ist offenbar nicht erfüllt.
Es gilt aber $y \cdot f(t,y) = -y^4 \leq 0$. Also ist (**) erfüllt mit $a(t) = b(t) \equiv 0$. Es existiert also eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem Intervall $[1, \infty)$.
Mit TdV und Einsetzen der AB zeigt man leicht, dass die eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-1}}$ ist. Die Lösung ist nur für $t \in (\frac{1}{2}, \infty)$ definiert und nicht für alle $t \in \mathbb{R}$.

I.3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In vielen ökonomischen Modellen treten DGL höherer als 1. Ordnung auf. Wir befassen uns daher in diesem Kapitel zunächst mit DGL 2. Ordnung, d.h. DGL der Form

$$\ddot{y} = F(t, y, \dot{y})$$

mit einer gegebenen Funktion F, der unbekannten Funktion $y = y(t)$ und $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Eine Lösung ist eine 2-mal differenzierbare Funktion, die die DGL erfüllt.

Beispiel 1.3.1: $\ddot{y} = k$ mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$.

Diese DGL lässt sich sehr einfach lösen. Durch Integration ergibt sich zunächst: $\dot{y}(t) = \int \ddot{y}(t)\,dt = \int k\,dt = kt + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$

Erneute Integration führt auf die allgemeine Lösung

$$y(t) = \int \dot{y}(t)\,dt = \int (kt + C_1)\,dt = \tfrac{1}{2}kt^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Die zugehörigen Lösungskurven sind für $k \neq 0$ quadratische Parabeln.

Wir behandeln im Folgenden zunächst zwei speziellere Fälle, die sich auf das Lösen von DGL'en 1. Ordnung zurückführen lassen.

Spezialfall 1: $\ddot{y} = F(t, \dot{y})$

y taucht in der DGL nicht auf. Mit der Substitution $u = \dot{y}$ wird daraus $\dot{u} = F(t, u)$, d.h. eine DGL 1. Ordnung. Ist $u(t)$ die allgemeine Lösung, so erhält man durch Integration

$$y(t) = \int \dot{y}(t)\,dt = \int u(t)\,dt$$

die allgemeine Lösung der DGL.

Beispiel 1.3.2: $\ddot{y} = \dot{y} + t$

Substitution $u = \dot{y}$ liefert die DGL $\dot{u} = u + t$, d.h. eine lineare DGL 1. Ordnung mit der allgemeinen Lösung $u = C_1 e^t - t - 1$

(vgl. S. 12 ff). Daraus erhält man durch Integration

$$y = \int u(t)dt = \int (C_1 e^t - t - 1)dt$$
$$= C_1 e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + C_2 \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der DGL.

Spezialfall 2: $\ddot{y} = F(y, \dot{y})$ (Autonome DGL)

Die Variable t tritt in der DGL nicht auf. Durch einen Trick kann man die DGL in den Spezialfall 1 überführen.

Da t nicht explizit auftritt, nimmt man y als unabhängige Variable und bestimmt $\dot{y}$ als Funktion $v(y)$. Mit der Kettenregel gilt: $\ddot{y} = \frac{d}{dt} v(y) = \frac{d}{dy} v(y) \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dy} v(y) \cdot v(y)$

Eingesetzt in die DGL erhält man $\{\frac{d}{dy} v(y)\} \cdot v(y) = F(y, v)$, d.h. für $v \neq 0$ die DGL $v' = \frac{1}{v} F(y, v)$ 1. Ordnung.

Lässt sich die allgemeine Lösung v bestimmen, so lässt sich daraus mit $\dot{y} = v$ die Lösung y ermitteln.

Beispiel 1.3.3: $\ddot{y} = \frac{1}{y^2} \cdot \dot{y}$

Für $\dot{y} = 0$ erhält man $y = C$ mit $C \neq 0$ als Lösung der DGL.

Sei nun $\dot{y} \neq 0$. Substituiere $\dot{y} = v(y)$, $\ddot{y} = v(y) \cdot \frac{d}{dy} v(y)$. Dies liefert

$$v \cdot v' = \frac{1}{y^2} \cdot v \quad , \text{ d.h. } \quad v' = \frac{1}{y^2}$$

Mit TdV erhalten wir

$$\int 1 \, dv = \int \frac{1}{y^2} dy$$

$-\frac{1}{2} y^2 = t + C_2$

$-2t - 2C$

d.h. $\quad v = -\frac{1}{y} + C_1$

Daraus ergibt sich dann mit $v = \dot{y}$ die DGL

$$\dot{y} = -\frac{1}{y} + C_1 = \frac{C_1 y - 1}{y}$$

TdV: $\int \underbrace{\frac{y}{C_1 y - 1}} dy = \int dt$

$= \frac{1}{C_1}\left(1 + \frac{1}{C_1 y - 1}\right)$, $C_1 \neq 0$

Für $C_1 = 0$ ergibt sich $-\int y dy = \int dt$,

d.h. $y = \pm\sqrt{-2t - 2C}$

d.h. für $C_1 \neq 0$ die implizite Lösung $\frac{1}{C_1}\left(y + \frac{1}{C_1} \ln |C_1 y - 1|\right) = t + C_2$

Lineare DGL 2. Ordnung

Bei den folgenden Überlegungen beschränken wir uns auf die Behandlung linearer DGL 2. Ordnung, d.h. auf DGL der Form

$$\ddot{y} + a_1(t)\,\dot{y} + a_0(t)\,y = r(t)$$

mit auf einem Intervall I stetigen Funktionen $a_1(t), a_0(t), r(t)$.
Ist $r(t)=0$, so heißt die DGL homogen, sonst inhomogen.
Leider gibt es im Gegensatz zur linearen DGL 1. Ordnung keine allgemeine Lösungsformel. Es lassen sich aber einige nützliche strukturelle Eigenschaften der allgemeinen Lösung angeben. Außerdem führen wir einige Begriffe ein, die in analoger Form bei der Behandlung linearer DGL n-ter Ordnung Verwendung finden.

Definition 1.3.4: Seien $y_1(t), y_2(t)$ zwei Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich $\mathbb{D}$. y_1 und y_2 heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = 0$ nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ besitzt, andernfalls linear abhängig.
Sind zwei linear unabhängige Funktionen y_1, y_2 Lösungen der linearen homogenen DGL $\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0$, so heißt y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der DGL.

Beispiel 1.3.5:

(i) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind linear unabhängig, da die Gleichung

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt ist.

(ii) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda t}$ und $y_2(t) = t \cdot e^{\lambda t}$ sind linear unabhängig, da die Gleichung

$$\alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t} = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 t = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt ist.

(iii) Die Funktionen $y_1(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ und $y_2(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $\beta\neq 0$, sind linear unabhängig, da die Gleichung
$\alpha_1 e^{\alpha t}\sin(\beta t)+\alpha_2 e^{\alpha t}\cos(\beta t)=0 \Leftrightarrow \alpha_1\sin(\beta t)+\alpha_2\cos(\beta t)=0$ für $\beta\neq 0$
nur für $\alpha_1=\alpha_2=0$ erfüllt ist.

Für lineare DGL 2. Ordnung gilt nun folgendes zentrale Resultat.

Satz 1.3.6: Es sei $\ddot{y}+a_1(t)\dot{y}+a_0(t)y=r(t)$ eine lineare DGL 2. Ordnung und $\ddot{y}+a_1(t)\dot{y}+a_0(t)y=0$ die zugeordnete homogene Gleichung.
Dann gilt:

(1) Ist $y_1(t), y_2(t)$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL, dann ist $y_h(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$, $C_1, C_2\in\mathbb{R}$, die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

(2) Ist darüberhinaus $y_p(t)$ eine partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL, so ist $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Aus diesem Satz ergibt sich nun, dass wir einerseits eine Methode benötigen, um ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung zu bestimmen und andrerseits Verfahren brauchen, um eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL zu finden.

Beispiel 1.3.7: Wir betrachten die lineare, inhomogene DGL
$$\ddot{y}+\frac{1}{t^2}y=\ln(t).$$

Behauptung 1: $y_1=\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)$, $y_2=\sqrt{t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)$ bilden ein Fundamentalsystem für $\ddot{y}+\frac{1}{t^2}y=0$.

Beweis von Behauptung 1:
Es gilt: $\dot{y}_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left[\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)\right]$
$$\ddot{y}_1=-\frac{1}{\sqrt{t^3}}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)$$

Einsetzen von y_1 und $\ddot{y}_1$ in die homogene DGL liefert
$$-t^{-3/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)+\underbrace{\tfrac{1}{t^2}\cdot\sqrt{t}}_{=t^{-3/2}}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)=0$$

y_1 löst also die homogene DGL. Analog zeigt man, dass y_2 die homogene Gleichung löst. Da y_1 und y_2 linear unabhängig sind, bilden sie somit ein Fundamentalsystem. Also lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ &= \sqrt{t} \cdot \left[C_1 \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right) \right] \end{aligned}$$

Behauptung 2: $y_p = \frac{1}{3}t^2[\ln(t)-1]$ ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Beweis von Behauptung 2:

Es gilt $\dot{y}_p = \frac{2}{3}t[\ln(t)-1] + \frac{1}{3}t$, $\ddot{y}_p = \frac{2}{3}\ln(t) + \frac{1}{3}$.

Damit ist
$$\begin{aligned} \ddot{y}_p + \frac{1}{t^2}y_p &= \frac{2}{3}\ln(t) + \frac{1}{3} + \frac{1}{\cancel{t^2}} \cdot \frac{1}{3}\cancel{t^2}[\ln(t)-1] \\ &= \ln(t), \end{aligned}$$

d.h. y_p ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Insgesamt ergibt sich damit die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL als

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= \sqrt{t}\left[C_1 \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)\right] + \tfrac{1}{3}t^2[\ln(t)-1]. \end{aligned}$$

Leider gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren für die Bestimmung des Fundamentalsystems. Wir beschränken uns daher im Folgenden auf:

Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Dies sind DGL der Form

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = r(t) \text{ mit Konstanten } a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$.

Wir benötigen ein Fundamentalsystem, d.h. 2 linear unabhängige Lösungen. Es ist naheliegend, mit geeigneten Exponentialfunktionen "zu probieren", d.h. wir machen den Ansatz: $y = e^{\lambda t}$.

Wenn dies tatsächlich eine Lösung sein soll, dann muss y zusammen mit $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$ und $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ die DGL erfüllen. Es muss also gelten:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0 \qquad | : e^{\lambda t} \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Diese Gleichung heißt charakteristische Gleichung, weil sie, wie wir gleich sehen werden, das Lösungsverhalten / die Art des Fundamentalsystems bestimmt.

Wir erinnern uns daran, dass bei einer quadratischen Gleichung drei Fälle auftreten können: zwei verschiedene reelle Nullstellen, eine doppelte reelle Nullstelle, keine reelle Nullstelle. Wir betrachten die Fälle getrennt.

1. Fall: Die charakteristiche Gleichung $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 > 0$.
   Nach unseren Überlegungen sind dann $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 t}$ Lösungen der homogenen DGL. Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind sie linear unabhängig und bilden somit ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall also:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ hat eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda = -\frac{a_1}{2}$, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 = 0$.
   Somit haben wir eine spezielle Lösung $y_1 = e^{-\frac{a_1}{2} t}$. Für das Fundamentalsystem benötigen wir eine weitere linear unabhängige Lösung. Wir zeigen, dass $y_2 = t \cdot e^{-\frac{a_1}{2} t}$ die Forderung erfüllt, indem wir y_2 zusammen mit den Ableitungen $\dot{y}_2 = \left(1 - \frac{a_1}{2} \cdot t\right) e^{-\frac{a_1}{2} t}$, $\ddot{y}_2 = \left[\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 t - a_1\right] e^{-\frac{a_1}{2} t}$ in die DGL einsetzen:

$$\underbrace{\left[\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \cdot t - a_1\right] e^{-\frac{a_1}{2} t}}_{\ddot{y}_2} + a_1 \underbrace{\left(1 - \frac{a_1}{2} \cdot t\right) e^{-\frac{a_1}{2} t}}_{\dot{y}_2} + a_0 \underbrace{e^{-\frac{a_1}{2} t}}_{y_2}$$

$$= \left\{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 t - \cancel{a_1} + \cancel{a_1} - \frac{a_1^2}{2} t + a_0\right\} e^{-\frac{a_1}{2} t} = -\underbrace{\left\{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right\}}_{= 0 \text{ in diesem Fall}} e^{-\frac{a_1}{2} t} \cdot t = 0$$

$y_2 = t\cdot e^{-\frac{a_1}{2}t}$ erfüllt also ebenfalls die homogene DGL und $y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}t}$, $y_2 = te^{-\frac{a_1}{2}t}$ sind linear unabhängig. Sie bilden also ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der DGL in diesem Fall ist

$$y = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{a_1}{2}t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{a_1}{2}t}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ hat keine reelle Nullstelle, d.h. $(\frac{a_1}{2})^2 - a_0 < 0$. Wir zeigen, dass in diesem Fall die beiden linear unabhängigen Funktionen $y_1 = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $y_2 = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ mit $\alpha = -\frac{a_1}{2}$, $\beta = \sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2}$ ein Fundamentalsystem bilden.

$y_1 = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

$\dot{y}_1 = e^{\alpha t}\{\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)\}$

$\ddot{y}_1 = e^{\alpha t}\{(\alpha^2 - \beta^2)\sin(\beta t) + 2\alpha\beta\cos(\beta t)\}$

Einsetzen in die DGL:

$$\underbrace{e^{\alpha t}\{(\alpha^2-\beta^2)\sin(\beta t) + 2\alpha\beta\cos(\beta t)\}}_{\ddot{y}_1} + a_1 \underbrace{e^{\alpha t}\{\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)\}}_{\dot{y}_1} + a_0 \underbrace{e^{\alpha t}\sin(\beta t)}_{y_1}$$

$$= e^{\alpha t}\{\underbrace{(\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_0)}_{= (\frac{a_1}{2})^2 - [a_0 - (\frac{a_1}{2})^2] - \frac{a_1^2}{2} + a_0 = 0}\sin(\beta t) + \beta\underbrace{(2\alpha + a_1)}_{= -a_1 + a_1 = 0}\cos(\beta t)\} = 0$$

Somit erfüllt y_1 die DGL. Eine analoge Rechnung zeigt, dass auch y_2 die DGL erfüllt. Da y_1, y_2 linear unabhängig sind, bilden sie ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist somit:

$$y = C_1 e^{\alpha t}\sin(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\cos(\beta t) = e^{\alpha t}\{C_1\sin(\beta t) + C_2\cos(\beta t)\},$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha = -\frac{a_1}{2}$, $\beta = \sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2}$.

Bevor wir uns damit beschäftigen, wie man an eine partikuläre Lösung einer inhomogenen DGL gelangt, betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 1.3. : $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$, $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Einsetzen in die DGL: $\lambda^2 e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} - 6e^{\lambda t} = 0 \mid : e^{\lambda t} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \text{(charakteristische Gleichung)}$$

$$\iff \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6}$$

$$\iff \lambda_1 = -2 \lor \lambda_2 = 3 \quad (1.\text{ Fall !})$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{-2t}$, $y_2 = e^{3t}$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.3.8: $\ddot{y} - 3\dot{y} + \frac{9}{4} y = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$, $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Einsetzen in die DGL: $\lambda^2 e^{\lambda t} - 3\lambda e^{\lambda t} + \frac{9}{4} e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t} \neq 0$

$$\iff \lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} = 0 \quad (\text{charakteristische Gleichung})$$

$$\iff \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4}}$$

$$\iff \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \quad (2.\text{ Fall !})$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\frac{3}{2}t}$, $y_2 = t \cdot e^{\frac{3}{2}t}$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{3}{2}t}$

Beispiel 1.3.9: $\ddot{y} - \frac{4}{3}\dot{y} + \frac{29}{9} y = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$, $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Einsetzen in die DGL: $\lambda^2 e^{\lambda t} - \frac{4}{3}\lambda e^{\lambda t} + \frac{29}{9} e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t} \neq 0$

$$\iff \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{29}{9} = 0 \quad (\text{charakteristische Gleichung})$$

$$\iff \lambda_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{29}{9}}$$

$$\iff \lambda_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{-25}{9}} \quad (3.\text{ Fall !})$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\frac{2}{3}t} \sin(\frac{5}{3}t)$, $y_2 = e^{\frac{2}{3}t} \cos(\frac{5}{3}t)$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = e^{\frac{2}{3}t}(C_1 \sin(\frac{5}{3}t) + C_2 \cos(\frac{5}{3}t))$

Nachdem wir nun gesehen haben, wie man die allgemeine Lösung einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmen kann, wenden wir uns dem Problem zu, eine partikuläre Lösung für die inhomogene Gleichung zu finden. Dazu gibt es ein allgemeines Verfahren, das mit "Variation der Konstanten" bezeichnet wird. Die Durchführung ist in der Regel ziemlich aufwendig. Wir werden hier eine andere Methode kennenlernen, die in vielen praktischen Problemstellungen funktioniert und in der Regel mit geringerem Aufwand durchgeführt werden kann. Dabei versucht man, Kenntnisse über strukturelle Eigenschaften der Störfunktion (Inhomogenität) zu nutzen, indem man dazu passend einen geeigneten Ansatz für eine Lösung y_p formuliert, in dem zunächst noch freie Parameter sind. Diese werden dann so bestimmt, dass tatsächlich eine Lösung herauskommt. Für viele in der Praxis vorkommende Störfunktionen kann man einen passenden Ansatz aus einer Tabelle wählen.

Wir werden zunächst an einigen Beispielen erläutern, wie man auf solche Ansätze kommt.

Beispiel 1.3.10: $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = t^2 - 1$

Die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 0$ haben wir bereits bestimmt: $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Für die Bestimmung einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Gleichung überlegen wir, dass, wenn $r(t) = t^2 - 1$ ein Polynom vom Grad 2 ist, y_p so angesetzt werden muss, dass die linke Seite der DGL ebenfalls ein Polynom vom Grad 2 ergibt. Da Ableitungen von Polynomen wieder Polynome mit niedrigerem Grad sind, ist es sinnvoll, y_p in der Form $y_p = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$ anzunehmen. Die Parameter A_0, A_1, A_2 sind nun so zu bestimmen, dass y_p die inhomogene DGL löst. Dazu setzen wir y_p zusammen mit den Ableitungen

$$\dot{y}_p = 2A_2 t + A_1 \ , \ \ddot{y}_p = 2A_2$$

in die DGL ein:

$$2A_2 - (2A_2 t + A_1) - 6(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -6A_2 t^2 + (-2A_2 - 6A_1)t + (2A_2 - A_1 - 6A_0) = 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t + (-1)$$

Da 2 Polynome genau dann gleich sind, wenn sie in ihren Koeffizienten übereinstimmen, muss also gelten:

$$-6A_2 = 1$$
$$-6A_1 - 2A_2 = 0$$
$$-6A_0 - A_1 + 2A_2 = -1$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit der eindeutig bestimmten Lösung: $A_0 = \frac{11}{108}$, $A_1 = \frac{1}{18}$, $A_2 = -\frac{1}{6}$

Somit ist $y_P = -\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{18}t + \frac{11}{108}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Da für die allgemeine Lösung der DGL $y = y_h + y_P$ gilt, erhalten wir nun insgesamt:

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{18}t + \frac{11}{108}$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = t^2 - 1$.

Beispiel 1.3.11: $\ddot{y} - \dot{y} = t^2 + 3t - 1$

Die zugehörige homogene DGL $\ddot{y} - \dot{y} = 0$ hat die allgemeine Lösung $y_h = C_1 + C_2 e^t$.

Um nun eine spezielle Lösung y_p der inhomogenen DGL zu bestimmen, müssen wir beachten, dass in dieser DGL y nicht vorkommt, sondern nur die Ableitungen $\dot{y}$ und $\ddot{y}$. Um nun mit $\ddot{y} - \dot{y}$ an ein Polynom 2. Grades wie in der Störfunktion zu gelangen, muss im Ansatz für $\dot{y}_p$ Polynom 2. Grades gewählt werden, d.h. y_p als <u>eine</u> Stammfunktion eines Polynoms 3. Grades:

$y_P = A_3t^3 + A_2t^2 + A_1t$, $\dot{y}_P = 3A_3t^2 + 2A_2t + A_1$; $\ddot{y}_P = 6A_3t + 2A_2$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$6A_3t + 2A_2 - 3A_3t^2 - 2A_2t - A_1 = t^2 + 3t - 1$$

$$\Longleftrightarrow -3A_3 \cdot t^2 + (6A_3 - 2A_2) \cdot t + (2A_2 - A_1) = 1 \cdot t^2 + 3 \cdot t + (-1)$$

Koeffizientenvergleich: $-3A_3 = 1$

$$-2A_2 + 6A_3 = 3$$
$$-A_1 + 2A_2 = -1$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $A_1 = -4$, $A_2 = -\frac{5}{2}$, $A_3 = -\frac{1}{3}$

Somit ist $y_p = -\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 4t$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und $y = C_1 + C_2 e^t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 4t$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Zusammengefasst machen die Beispiele folgende Ansätze plausibel.

Ist $r(t)$ ein Polynom vom Grad n, dann macht man für die partikuläre Lösung der DGL $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = r(t)$ den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} Q_n(t) & , \text{ falls } a_0 \neq 0 \\ t \cdot Q_n(t) & , \text{ falls } a_0 = 0, a_1 \neq 0 \\ (t^2 \cdot Q_n(t) & , \text{ falls } a_0 = a_1 = 0) \end{cases}$$

mit $Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^k$ Polynom vom Grad n.

Beispiel 1.3.12: $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 3e^{4t}$

Wie bereits berechnet, ist $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$ die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung.

Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$y_p = A \cdot e^{4t}$, $\dot{y}_p = 4Ae^{4t}$, $\ddot{y}_p = 16Ae^{4t}$

Einsetzen in die DGL:

$$16Ae^{4t} - 4Ae^{4t} - 6Ae^{4t} = 3e^{4t} \quad | : e^{4t} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6A = 3 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

Also ist $y_p = \frac{1}{2}e^{4t}$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{2}e^{4t}$.

Beispiel 1.3.13: $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 3e^{3t}$

Die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL ist wieder $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$. Hier ist es nicht sinnvoll, für die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL einen Ansatz der Form Ae^{3t} zu machen, da dies bereits (mit $C_1 = 0$, $C_2 = A$) Lösung der homogenen DGL ist; die linke Seite ergibt demnach für jeden Wert für die Konstante A den Wert Null.

Es funktioniert aber ein Ansatz der Form: $y_p = A \cdot t \cdot e^{3t}$.

Es gilt: $\dot{y}_p = A(1+3t)e^{3t}$, $\ddot{y}_p = 3A(2+3t)e^{3t}$

Einsetzen in die DGL:

$$3A(2+3t)e^{3t} - A(1+3t)e^{3t} - 6Ate^{3t} = 3e^{3t} \quad | : e^{3t} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A\{\underbrace{3(2+3t)-(1+3t)-6t}_{=5}\} = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{3}{5}$$

Somit ist $y_p = \frac{3}{5}te^{3t}$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist $y = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} + \frac{3}{5}te^{3t}$.

Beispiel 1.3.14: $\ddot{y} - 3\dot{y} + \frac{9}{4}y = 2e^{\frac{3}{2}t}$

Wir haben bereits berechnet, dass $y_h = (C_1 + C_2t)e^{\frac{3}{2}t}$ die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL ist. Hier sind Ansätze der Form $A \cdot e^{\frac{3}{2}t}$, $A \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}t}$ oder auch $(A_1 + A_2t)e^{\frac{3}{2}t}$ nicht sinnvoll, da diese ja sämtlich Lösungen der homogenen Gleichung sind. Es funktioniert aber ein Ansatz der Form $y_p = A \cdot t^2 \cdot e^{\frac{3}{2}t}$.

Es gilt: $\dot{y}_p = A(2t + \frac{3}{2}t^2)e^{\frac{3}{2}t}$, $\ddot{y}_p = A(2+6t+\frac{9}{4}t^2)e^{\frac{3}{2}t}$

Einsetzen in die DGL:

$$A(2+6t+\tfrac{9}{4}t^2)e^{\frac{3}{2}t} - 3A(2t+\tfrac{3}{2}t^2)e^{\frac{3}{2}t} + \tfrac{9}{4}At^2e^{\frac{3}{2}t} = 2 \cdot e^{\frac{3}{2}t} \quad | : e^{\frac{3}{2}t} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow A\{\underbrace{(2+6t+\tfrac{9}{4}t^2) - 3(2t+\tfrac{3}{2}t^2) + \tfrac{9}{4}t^2}_{=2}\} = 2$$

$$\Leftrightarrow A = 1$$

Somit ist $y_p = t^2e^{\frac{3}{2}t}$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist $y = (C_1 + C_2t)e^{\frac{3}{2}t} + t^2e^{\frac{3}{2}t}$.

Zusammengefasst machen die Beispiele folgende Ansätze plausibel.

Ist $r(t)$ von der Form $C \cdot e^{ct}$ mit Konstanten $C, c \in \mathbb{R}$, dann macht man für die partikuläre Lösung der DGL $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = r(t)$ den Ansatz

Ae^{ct}, falls c keine Lösung der charakteristischen Gleichung

$A \cdot te^{ct}$, falls c einfache Lösung der charakteristischen Gleichung

$A \cdot t^2e^{ct}$, falls c doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung

Beispiel 1.3.15: $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 2\cdot\sin(2t) - 3\cdot\cos(2t)$

Die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL hatten wir bereits zu $y_h = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}$ bestimmt. Für die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL machen wir den Ansatz $y_p = A_1\sin(2t) + A_2\cos(2t)$, $\dot{y}_p = 2A_1\cos(2t) - 2A_2\sin(2t)$, $\ddot{y}_p = -4A_1\sin(2t) - 4A_2\cos(2t)$.

Einsetzen in die DGL:

$$-4A_1\sin(2t) - 4A_2\cos(2t) - 2A_1\cos(2t) + 2A_2\sin(2t) - 6A_1\sin(2t) - 6A_2\cos(2t) = 2\sin(2t) - 3\cos(2t)$$

$$\Longleftrightarrow (-4A_1 + 2A_2 - 6A_1)\sin(2t) + (-4A_2 - 2A_1 - 6A_2)\cos(2t) = 2\sin(2t) - 3\cos(2t)$$

$$\Longleftrightarrow (-10A_1 + 2A_2)\sin(2t) + (-2A_1 - 10A_2)\cos(2t) = 2\sin(2t) + (-3)\cos(2t)$$

Da $\sin(2t)$ und $\cos(2t)$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten vor den Sinus- und Cosinustermen rechts und links jeweils gleich sein.

Koeffizientenvergleich: $-10A_1 + 2A_2 = 2$

$$-2A_1 - 10A_2 = -3$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems ist $A_1 = -\frac{7}{52}$, $A_2 = \frac{17}{52}$, d.h. $y_p = -\frac{7}{52}\sin(2t) + \frac{17}{52}\cos(2t)$ ist partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist somit $y = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} - \frac{7}{52}\sin(2t) + \frac{17}{52}\cos(2t)$.

Beispiel 1.3.16: $\ddot{y} + 4y = 2\sin(2t) - 3\cos(2t)$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung $\ddot{y} + 4y = 0$.

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm \sqrt{-4}$ (keine reelle Lösung)

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{0\cdot t}\sin(2t) = \sin(2t)$, $y_2 = e^{0\cdot t}\cos(2t) = \cos(2t)$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h = C_1\sin(2t) + C_2\cos(2t)$.

Als Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit eine Funktion der Form $A_1\sin(2t) + A_2\cos(2t)$ nicht sinnvoll.

Es funktioniert aber $y_p = t\cdot(A_1\sin(2t) + A_2\cos(2t))$,

$\dot{y}_p = (A_1 - 2A_2t)\sin(2t) + (A_2 + 2A_1t)\cos(2t)$, $\ddot{y}_p = -4(A_2 + A_1t)\sin(2t) + 4(A_1 - A_2t)\cos(2t)$

Einsetzen in die DGL:

$$-4(A_2+A_1t)\sin(2t)+4(A_1-A_2t)\cos(2t)+4t(A_1\sin(2t)+A_2\cos(2t))=2\sin(2t)-3\cos(2t)$$

$$\Leftrightarrow -4A_2\sin(2t)+4A_1\cos(2t)=2\sin(2t)+(-3)\cos(2t)$$

Koeffizientenvergleich: $-4A_2=2 \Leftrightarrow A_2=-\frac{1}{2}$

$4A_1=-3 \Leftrightarrow A_1=-\frac{3}{4}$

Somit erhält man die partikuläre Lösung $y_p=t\cdot\left(-\frac{3}{4}\sin(2t)-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich zu

$$y=C_1\sin(2t)+C_2\cos(2t)+t\left(-\frac{3}{4}\sin(2t)-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)$$

$$=\left(C_1-\frac{3}{4}t\right)\sin(2t)+\left(C_2-\frac{1}{2}t\right)\cos(2t).$$

Zusammengefasst machen die Beispiele folgende Ansätze plausibel.

Ist $r(t)$ von der Form $K_1\sin(kt)+K_2\cos(kt)$ mit Konstanten K_1, K_2 und $k>0$, dann macht man für die partikuläre Lösung der DGL $\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0y=r(t)$ den Ansatz

$$y_p=\begin{cases} A_1\sin(kt)+A_2\cos(kt), & \text{falls } a_1\neq 0 \vee k\neq\sqrt{a_0} \\ t(A_1\sin(kt)+A_2\cos(kt)), & \text{falls } a_1=0 \wedge k=\sqrt{a_0} \end{cases}$$

Bemerkung 1.3.17: Besteht die Störfunktion aus mehreren Summanden, so erhält man einen Ansatz für y_p als Summe von entsprechenden Ansätzen für die einzelnen Summanden.

Bei Produkten kann man versuchen, geeignete Ansätze zu multiplizieren. Dies führt leider nicht immer zum Ziel.

Man kann entsprechende Ansätze für Störfunktionen, die Produkte von Polynomen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen sind, formulieren, was wir hier aber nicht weiter vertiefen wollen.

Bevor wir uns noch einige Beispiele anschauen, stellen wir in einer Übersicht zusammen, welche Schritte zur Lösung eines AWP der Form

$$\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0y=r(t), \quad y(t_0)=Y_0, \quad \dot{y}(t_0)=Y_1$$

erforderlich sind.

1. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugeordneten homogenen DGL $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$

a) Ansatz: $y = e^{\lambda t}$

b) Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

c) Fundamentalsystem: y_1, y_2 (abhängig vom Lösungsverhalten der charakteristischen Gleichung)

d) Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2. Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL

a) Geeigneten Ansatz für y_p wählen

b) $\dot{y}_p, \ddot{y}_p$ bestimmen

c) $y_p, \dot{y}_p, \ddot{y}_p$ in die inhomogene DGL einsetzen

d) Parameter im Ansatz durch Koeffizientenvergleich ermitteln

e) Partikuläre Lösung y_p angeben

3. Schritt: Angabe der allgemeinen Lösung $y = y_h + y_p$ der inhomogenen DGL

4. Schritt: Bestimmung der Lösung des AWP

a) Einsetzen der AB

b) Bestimmung der Konstanten C_1, C_2

c) Angabe der Lösung des AWP

Beispiel 1.3.18: $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 2t^3 - 9t^2 + 2t + 8 - e^t + 2\sin(2t) + 6\cos(2t)$,

mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$

1. Schritt: Allgemeine Lösung homogene DGL $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$

a) Ansatz: $y_h = e^{\lambda t}$

b) Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = 2$

c) Fundamentalsystem: $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{2t}$

d) Allgemeine Lösung homogene Gleichung: $y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$

2. Schritt: Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

a) Ansatz: $y_p = A_3t^3 + A_2t^2 + A_1t + A_0 + Bte^t + D_1\sin(2t) + D_2\cos(2t)$

b) $\dot{y}_p = 3A_3t^2 + 2A_2t + A_1 + B(1+t)e^t + 2D_1\cos(2t) - 2D_2\sin(2t)$

$\ddot{y}_p = 6A_3t + 2A_2 + B(2+t)e^t - 4D_1\sin(2t) - 4D_2\cos(2t)$

c) Einsetzen in DGL:

$$6A_3t + 2A_2 + B(2+t)e^t - 4D_1\sin(2t) - 4D_2\cos(2t)$$
$$- 9A_3t^2 - 6A_2t - 3A_1 - 3B(1+t)e^t - 6D_1\cos(2t) + 6D_2\sin(2t)$$
$$+ 2A_3t^3 + 2A_2t^2 + 2A_1t + 2A_0 + 2Bte^t + 2D_1\sin(2t) + 2D_2\cos(2t)$$
$$= 2t^3 - 9t^2 + 2t + 8 - e^t + 2\sin(2t) + 6\cos(2t)$$

$$\Longleftrightarrow 2A_3t^3 + [-9A_3 + 2A_2]t^2 + [6A_3 - 6A_2 + 2A_1]t + [2A_2 - 3A_1 + 2A_0]$$
$$+ [-B]e^t + [-2D_1 + 6D_2]\sin(2t) + [-6D_1 - 2D_2]\cos(2t)$$
$$= 2t^3 + [-9]t^2 + 2t + 8 + [-1]e^t + 2\sin(2t) + 6\cos(2t)$$

d) Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} 2A_3 &= 2 \\ 2A_2 - 9A_3 &= -9 \\ 2A_1 - 6A_2 + 6A_3 &= 2 \\ 2A_0 - 3A_1 + 2A_2 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Lösung: $A_0 = 1,\ A_1 = -2,\ A_2 = 0,\ A_3 = 1$

$$-B = -1$$

Lösung: $B = 1$

$$\left.\begin{aligned} -2D_1 + 6D_2 &= 2 \\ -6D_1 - 2D_2 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Lösung: $D_1 = -1,\ D_2 = 0$

e) $y_p = t^3 - 2t + 1 + te^t - \sin(2t)$

3. Schritt: Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y = C_2e^{2t} + C_1e^t + t^3 - 2t + 1 + te^t - \sin(2t)$$

4. Schritt: $\dot{y} = 2C_2e^{2t} + C_1e^t + 3t^2 - 2 + (1+t)e^t - 2\cos(2t)$

a) AB: $y(0) = 1 \Longleftrightarrow C_2 + C_1 + 1 = 1$

$\dot{y}(0) = 2 \Longleftrightarrow 2C_2 + C_1 - 2 + 1 - 2 = 2$

b) Lösung des Gleichungssystems in a): $C_1 = -5,\ C_2 = 5$

c) Lösung des AWP: $y = 5e^{2t} - 5e^t + t^3 - 2t + 1 + te^t - \sin(2t)$

Beispiel 1.3.19: Angebot S und Nachfrage D eines Gutes seien in Abhängigkeit vom Preis $P(t)$ gegeben durch

$$S(t) = \alpha_3 + \alpha_2 \ddot{P}(t) + \alpha_1 \dot{P}(t) + \alpha_0 P(t), \quad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$$

$$D(t) = \beta_3 - \beta_2 \ddot{P}(t) - \beta_1 \dot{P}(t) - \beta_0 P(t), \quad \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0.$$

Angebot und Nachfrage hängen in diesem Modell auch von der Preisänderung $\dot{P}(t)$ und der Preisbeschleunigung $\ddot{P}(t)$ ab.

Gleichgewicht herrscht, wenn $S(t) = D(t)$ gilt, d.h.

$$\alpha_3 + \alpha_2 \ddot{P}(t) + \alpha_1 \dot{P}(t) + \alpha_0 P(t) = \beta_3 - \beta_2 \ddot{P}(t) - \beta_1 \dot{P}(t) - \beta_0 P(t)$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha_2 + \beta_2) \ddot{P}(t) + (\alpha_1 + \beta_1) \dot{P}(t) + (\alpha_0 + \beta_0) P(t) = \beta_3 - \alpha_3$$

Für $\alpha_2 + \beta_2 \neq 0$ also:

$$\ddot{P} + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2 + \beta_2} \dot{P} + \frac{\alpha_0 + \beta_0}{\alpha_2 + \beta_2} P = \frac{\beta_3 - \alpha_3}{\alpha_2 + \beta_2}$$

Hat man zusätzlich noch Angaben zum Preis und zur Preisänderung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0, so hat man insgesamt ein AWP der Form $\ddot{P} + K_1 \dot{P} + K_2 P = K_3$, $P(t_0) = P_0$, $\dot{P}(t_0) = P_1$, das sich mit den hier vorgestellten Methoden lösen lässt.

Eulersche Differentialgleichung zweiter Ordnung

Unter einer Eulerschen DGL 2. Ordnung versteht man die homogene lineare DGL $\quad t^2 \ddot{y} + a_1 t \dot{y} + a_0 y = 0$
mit speziellen nichtkonstanten Koeffizienten. Diese lässt sich für $t > 0$ bzw. $t < 0$ durch geeignete Substitutionen auf eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten zurückführen.

Wir betrachten den Fall $t > 0$.

Substitution: $s = \ln t$, d.h. $t = e^s$

Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{ds}, \quad \text{d.h. } t \cdot \dot{y} = \frac{dy}{ds}$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt} \dot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{ds}\right) \underset{\text{Produktregel}}{=} -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{1}{t} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{ds}\right)}_{\underset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) \cdot \frac{ds}{dt}}$$

$$= -\frac{1}{t^2}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{1}{t^2}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}, \text{ d.h. } t^2\cdot\ddot{y} = \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Eulersche DGL ein, so erhält man mit den Bezeichnungen $y' = \frac{dy}{ds}$, $y'' = \frac{d^2y}{ds^2}$ für die Ableitungen von y nach der neuen Variablen s die lineare homogene DGL zweiter Ordnung

$$y'' + (a_1 - 1)y' + a_0 y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten. Das Lösungsverhalten hängt somit wieder vom Lösungsverhalten der charakteristischen Gleichung ab.

Für den Fall $t<0$ verwendet man die Substitution $s = \ln(-t)$ und geht analog vor (Übung).

Beispiel 1.3.20: $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + \frac{3}{4}y = 0$, $t>0$

Die oben angegebene Substitution führt dann auf die DGL

$$y'' + 2y' + \frac{3}{4}y = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $y(s) = C_1 e^{-\frac{3}{2}s} + C_2 e^{-\frac{1}{2}s}$.

Rücksubstitution liefert $y(t) = C_1 t^{-3/2} + C_2 t^{-1/2}$

Beispiel 1.3.21: $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + y = 0$, $t>0$

Mit der angegebenen Substitution erhalten wir die DGL

$$y'' + 2y' + y = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $y(s) = C_1 e^{-s} + C_2 \cdot s \cdot e^{-s}$.

Rücksubstitution liefert $y(t) = C_1 \cdot \frac{1}{t} + C_2 \cdot \frac{\ln t}{t}$.

Beispiel 1.3.22: $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + 5y = 0$, $t>0$

Wir substituieren wieder $s = \ln t$, d.h. $t = e^s$ und erhalten die DGL

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $y(s) = e^{-s}\{C_1 \sin(2s) + C_2 \cos(2s)\}$

Rücksubstitution liefert: $y(t) = t^{-1}\{C_1 \sin(2\ln t) + C_2 \cos(2\ln t)\}$

Beispiel 1.3.23: In der Theorie der Optionspreise trifft man auf die DGL

$$x^2 g''(x) + a\,x\,g'(x) + b\,g(x) = \alpha x + \beta.$$

Dabei bezeichnet $g(x)$ den Wert einer Aktienoption, wenn der Wert der

Aktie x beträgt. In vielen Modellen ist $(a-1)^2 > 4b$, was wir im Folgenden annehmen. Außerdem setzen wir $x > 0$ voraus.
Formal setzen wir noch $a+b \neq 0$, $b \neq 0$ und (s.u.) $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$ voraus.
Wir substituieren wieder $s = \ln x$, d.h. $x = e^s$ und erhalten die inhomogene lineare DGL $\frac{d^2 g}{ds^2} + (a-1)\frac{dg}{ds} + bg = \alpha e^s + \beta$.

Lösen der homogenen DGL

DGL $$\frac{d^2 g}{ds^2} + (a-1)\frac{dg}{ds} + bg = 0$$

mit der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$.
Wegen der Voraussetzung $(a-1)^2 > 4b$ besitzt die charakteristische Gleichung die beiden verschiedenen reellen Lösungen
$$\lambda_1 = \frac{1-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - b} \text{ und } \lambda_2 = \frac{1-a}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - b}.$$
Somit ist $g_h(s) = C_1 e^{\lambda_1 s} + C_2 e^{\lambda_2 s}$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Ansatz: $g_p(s) = Ae^s + B$, d.h. $\frac{dg_p}{ds} = Ae^s$, $\frac{d^2 g_p}{ds^2} = Ae^s$

Einsetzen in die DGL:
$$A \cdot e^s + (a-1)Ae^s + b(Ae^s + B) = \alpha e^s + \beta$$
$$\Longleftrightarrow \quad (a+b)Ae^s + bB = \alpha e^s + \beta$$
Koeffizientenvergleich: $(a+b)A = \alpha$, $bB = \beta$, d.h. $A = \frac{\alpha}{a+b}$, $B = \frac{\beta}{b}$

Somit ist $g_p(s) = \frac{\alpha}{a+b} e^s + \frac{\beta}{b}$ partikuläre Lösung der inhomogenen DGL, d.h. $g(s) = C_1 e^{\lambda_1 s} + C_2 e^{\lambda_2 s} + \frac{\alpha}{a+b} e^s + \frac{\beta}{b}$ die allgemeine Lösung.
Mit Hilfe der Rücksubstitution erhalten wir daraus die allgemeine Lösung unserer Ausgangsgleichung:
$$g(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \frac{\alpha}{a+b} x + \frac{\beta}{b}$$

Stabilität linearer DGL 2ter Ordnung

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, welche Auswirkungen kleine Änderungen bei den Anfangsbedingungen auf das Lösungsverhalten bei

AWP mit linearen DGL 2ter Ordnung haben. Wir untersuchen insbesondere, welchen Effekt solche Änderungen auf das Verhalten für große Zeiten haben. Wir betrachten

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = r(t)$$

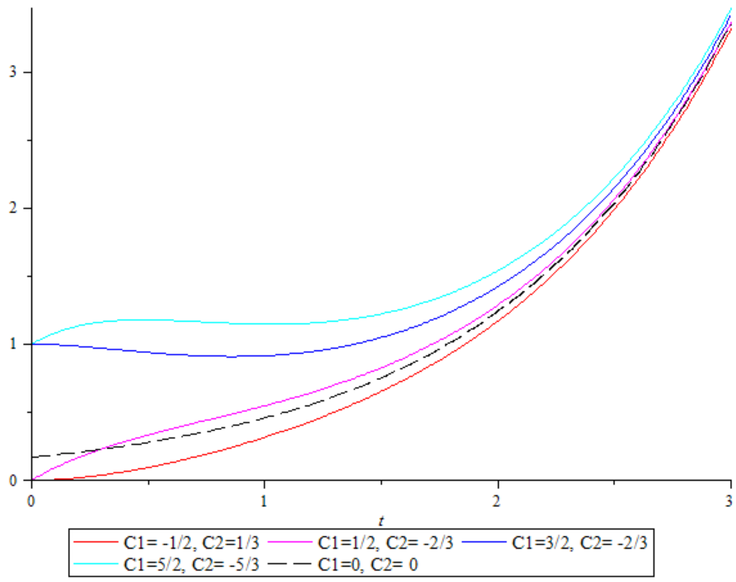
Die allgemeine Lösung ist $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$ mit den Fundamentallösungen y_1 und y_2 für die zugeordnete homogene Gleichung und einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen DGL.

Definition 1.3.24: Die DGL $\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = r(t)$ heißt asymptotisch stabil, wenn jede Lösung $C_1y_1 + C_2y_2$ der zugehörigen homogenen DGL für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Gleichbedeutend damit ist offenbar, dass $\lim\limits_{t\to\infty} y_1 = 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} y_2 = 0$ gilt.
Da sich die konkreten AB in den Werten für die Konstanten C_1, C_2 niederschlagen, bedeutet die asymptotische Stabilität also, dass der Effekt von Änderungen in den AB für $t \to \infty$ gegen Null geht.
Führen dagegen kleine Änderungen in den AB zu signifikanten Unterschieden im Verhalten der Lösung für $t \to \infty$, so nennt man die DGL instabil.
Wir diskutieren im Folgenden genauer die verschiedenen Fälle, die bei einer linearen DGL 2ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten auftreten können, d.h. $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = r(t)$.

1\. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen λ_1, λ_2. Dann ist das Fundamentalsystem gegeben durch: $y_1 = e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = e^{\lambda_2 t}$
Da $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t} = \lim\limits_{t\to\infty} e^{\lambda_2 t} = 0$ genau dann, wenn $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$, ist in diesem Fall die DGL genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$ gilt.

Beispiel 1.3.25: Die DGL $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = e^t$ hat die allgemeine Lösung $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{6} e^t$.



In der Graphik sind einige Lösungskurven zu verschiedenen AB gezeichnet.

$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=0$

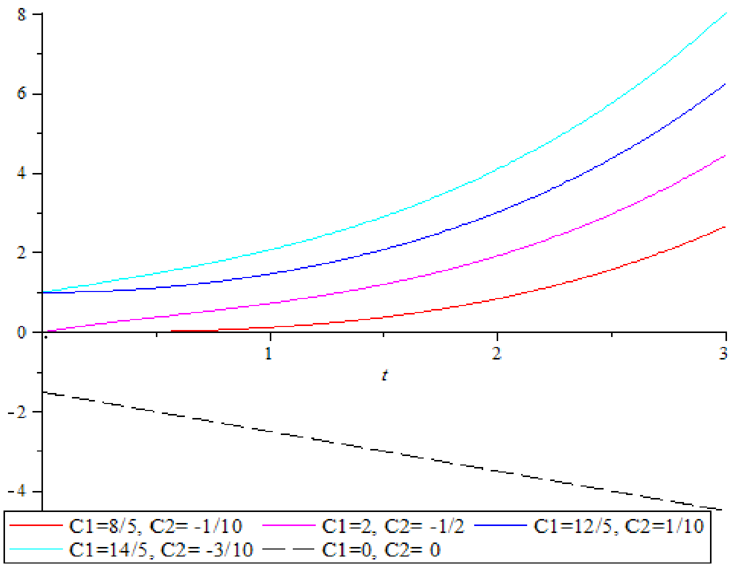
$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1$

$y(0)=1,\ \dot{y}(0)=0$

$y(0)=1,\ \dot{y}(0)=1$

Mit $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$ ist die DGL asymptotisch stabil.

Beispiel 1.3.26: Die DGL $\ddot{y}+\frac{3}{2}\dot{y}-y=t$ hat die allgemeine Lösung $y=C_1e^{\frac{1}{2}t}+C_2e^{-2t}-t-\frac{3}{2}$.



In der Graphik sind wieder einige Lösungskurven für verschiedene AB wiedergegeben.

$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=0$

$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1$

$y(0)=1,\ \dot{y}(0)=0$

$y(0)=1,\ \dot{y}(0)=1$

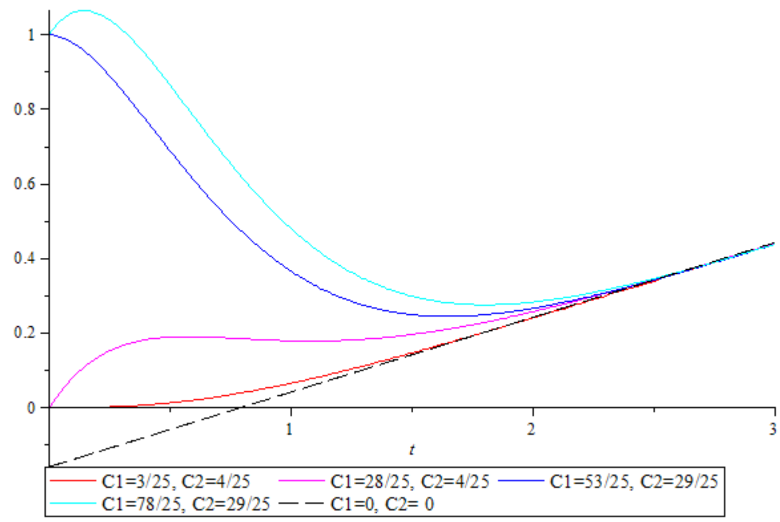
Wegen $\lambda_1=\frac{1}{2}>0$ ist die DGL instabil.

2. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ hat eine doppelte reelle Nullstelle λ. Dann ist das Fundamentalsystem gegeben durch: $y_1=e^{\lambda t}$, $y_2=te^{\lambda t}$. Da $\lim\limits_{t\to\infty}e^{\lambda t}=\lim\limits_{t\to\infty}te^{\lambda t}=0$ genau dann, wenn $\lambda<0$, ist in diesem Fall die DGL genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lambda<0$ gilt.

3. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ hat keine reellen Lösungen. Dann ist das Fundamentalsystem gegeben durch

$y_1 = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $y_2 = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ mit $\alpha = -\frac{a_1}{2}$, $\beta = \sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2}$.
Da $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\alpha t}\sin(\beta t) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{\alpha t}\cos(\beta t) = 0$ genau dann, wenn $\alpha < 0$, ist in diesem Fall die DGL genau dann asymptotisch stabil, wenn $\alpha = -\frac{a_1}{2} < 0$, d.h. $a_1 > 0$ gilt.

Beispiel 1.3.27: Die DGL $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = t$ hat die allgemeine Lösung
$y = C_1 e^{-2t}\sin t + C_2 e^{-2t}\cos t + \frac{1}{5}t - \frac{4}{25}$.



In dem Bild sind Lösungskurven für verschiedene AB gezeichnet.
$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$
$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$
$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$
$\dot{y}(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$

Wegen $a_1 = 4 > 0$ (d.h. $\alpha = -2 < 0$) ist die DGL asymptotisch stabil.
Überträgt man die für die verschiedenen Fälle gefundenen Bedingungen auf die Koeffizienten a_0, a_1 der DGL, so erhält man folgendes einfache Kriterium.

Satz 1.3.28: Die DGL $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = r(t)$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $a_0 > 0$ und $a_1 > 0$ gilt.

Bemerkung 1.3.29: Wir betrachten die DGL $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = c$ mit $a_0 \neq 0$, c konstant. Dann ist $y = \frac{c}{a_0}$ eine Gleichgewichtslösung, denn $y = \frac{c}{a_0}$ ist offenbar konstante Lösung der Gleichung. Alle Lösungen der DGL streben für $t \to \infty$ gegen diese Gleichgewichtslösung, wenn $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ gilt (d.h. die DGL asymptotisch stabil ist).
Die Gleichgewichtslösung $y = \frac{c}{a_0}$ heißt dann asymptotisch stabil.

I.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

In diesem Kapitel werden wir einige Resultate und Methoden des letzten Kapitels in allgemeinerer Form behandeln.

Wir befassen uns mit linearen DGL n-ter Ordnung, d.h. mit DGL vom Typ

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\,\dot{y} + a_0(t)\, y = r(t)$$

mit auf einem Intervall stetigen Funktionen $a_{n-1}(t), \ldots, a_1(t), a_0(t), r(t)$.

Wie auch im letzten Kapitel heißt die DGL homogen, falls die Störfunktion $r(t) = 0$ ist, sonst inhomogen.

Definition 1.4.1: Seien $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ n Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich $\mathbb{D}$. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots + \alpha_n y_n(t) = 0$ nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ besitzt, andernfalls linear abhängig.

Sind n linear unabhängige Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Lösungen der linearen homogenen DGL $y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\,\dot{y} + a_0(t)\, y = 0$, so heißt $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem der DGL.

Beispiel 1.4.2:

(i) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \ldots, y_j(t) = e^{\lambda_j t}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ sind linear unabhängig.

(ii) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda t}, y_2(t) = t\, e^{\lambda t}, \ldots, y_j(t) = t^{j-1} e^{\lambda t}$ sind linear unabhängig.

(iii) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t), y_2(t) = e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), y_3(t) = e^{\alpha_2 t}\sin(\beta_2 t), y_4(t) = e^{\alpha_2 t}\cos(\beta_2 t), \ldots, y_{2j-1}(t) = e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), y_{2j}(t) = e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$, wobei bei jeweils zwei Funktionen y_{2e}, y_{2e+2} bzw. y_{2e-1}, y_{2e+1} die zugehörigen α_e, α_{e+1} oder die β_e, β_{e+1} verschieden sind, sind linear unabhängig.

(iv) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t), y_2(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), y_3(t) = t \cdot e^{\alpha t}\sin(\beta t), y_4(t) = t \cdot e^{\alpha t}\cos(\beta t), \ldots, y_{2j-1}(t) = t^{j-1} e^{\alpha t}\sin(\beta t), y_{2j}(t) = t^{j-1} e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ sind linear unabhängig.

(v) Kombinationen von Funktionen aus (i)–(iv) sind linear unabhängig.

In Verallgemeinerung von Satz 1.3.6 gilt nur folgendes zentrale Resultat.

Satz 1.4.3: Es sei $y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\dots+a_1(t)\dot{y}+a_0(t)y=r(t)$ eine lineare DGL n-ter Ordnung und $y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\dots+a_1(t)\dot{y}+a_0(t)y=0$ die zugeordnete homogene Gleichung. Dann gilt:

(1) Ist $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL, dann ist $y_h(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\dots+C_ny_n(t)$, $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

(2) Ist darüberhinaus $y_p(t)$ eine partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL, so ist $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Wir benötigen also wieder einerseits eine Methode, um ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung zu bestimmen und andrerseits Verfahren, um eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL zu finden.

Wir betrachten num im Folgenden nur noch speziell

lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Dies sind DGL der Form

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1\dot{y}+a_0y=r(t) \text{ mit Konstanten } a_0, a_1, \dots, a_{n-1}.$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1\dot{y}+a_0y=0$.

Wir benötigen ein Fundamentalsystem, d.h. n linear unabhängige Lösungen.

Ansatz: $y=e^{\lambda t}$ mit den Ableitungen $\dot{y}=\lambda e^{\lambda t}, \dots, y^{(n-1)}=\lambda^{n-1}e^{\lambda t}, y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda t}$.

Einsetzen in die DGL liefert:

$$\lambda^n e^{\lambda t}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t}+\dots+\lambda a_1 e^{\lambda t}+a_0e^{\lambda t}=0 \quad | : e^{\lambda t}\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0 \quad \text{(Charakteristische Gleichung)}$$

Auf der linken Seite der charakteristischen Gleichung steht ein Polynom n-ten Grades, dessen Nullstellenverhalten die Fundamentallösungen bestimmt.

Um diese genauer angeben zu können, benötigen wir zunächst eine Aussage zur Faktorisierung von Polynomen:

Satz 1.4.4: Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ein Polynom vom Grad n. Dann besitzt $p(x)$ stets eine Produktdarstellung aus linearen Faktoren $(x - x_\alpha)$, quadratischen Faktoren $(x^2 + p_\beta x + q_\beta)$, die keine reellen Nullstellen besitzen, d.h.

$$p(x) = a_n (x-x_1)^{m_1} (x-x_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_l)^{m_l} (x^2+p_1 x+q_1)^{k_1} (x^2+p_2 x+q_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_i x+q_i)^{k_i}$$

mit $m_1 + m_2 + \ldots + m_l + 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_i) = n$.

Für Polynome vom Grad 2 liefert die pq-Formel die Faktorisierung. Für Polynome vom Grad 3 und 4 gibt es zwar geschlossene Formel, die aber sehr kompliziert sind. Für Polynome vom Grad 5 und höher gibt es keine allgemeinen Formeln. Häufig lassen sich jedoch Nullstellen mit Hilfe des folgenden Satzes ermitteln.

Satz 1.4.5: Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten, d.h. $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

(1) Ist $P(x^*) = 0$ mit $x^* \in \mathbb{Z}$, dann ist x^* Teiler der Konstanten a_0, d.h. wenn es ganzzahlige Nullstellen gibt, so sind sie unter den Teilern von a_0 zu finden.

(2) Allgemeiner ist sogar folgendes erfüllt: Ist $P(x^*) = 0$ mit $x^* = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (in gekürzter Form), so ist a Teiler von a_0 und b Teiler von a_n.

Bevor wir uns weiter mit dem Fundamentalsystem für homogene lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschäftigen, behandeln wir einige Beispiele zur Faktorisierung. Dabei gehen wir so vor, dass wir schrittweise Linearfaktoren abspalten, d.h. wir nutzen folgenden Sachverhalt: Ist $P(x^*) = 0$, so ist $P(x) = (x - x^*) Q(x)$, wobei $Q(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist, das mit Hilfe von Polynomdivision ermittelt werden kann.

Beispiel 1.4.6: Sei $P(x)=2x^3+4x^2-10x-12$. Als ganzzahlige Nullstellen kommen nur die Teiler von -12, d.h. $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ in Frage, die man nacheinander probieren kann. Man ermittelt: $P(-1)=0$. Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{l} (2x^3+4x^2-10x-12):(x+1)=2x^2+2x-12 \\ \underline{2x^3+2x^2} \\ \qquad 2x^2-10x \\ \qquad \underline{2x^2+2x} \\ \qquad\qquad -12x-12 \\ \qquad\qquad \underline{-12x-12} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Somit gilt $P(x)=(x+1)\cdot Q(x)$ mit $Q(x)=2x^2+2x-12$

Wegen $2x^2+2x-12=0 \iff x^2+x-6=0$

$$\iff x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}$$

$$\iff x=-3 \vee x=2$$

gilt $Q(x)=2(x+3)(x-2)$, also $P(x)=2(x+1)(x+3)(x-2)$.

Beispiel 1.4.7: Sei $P(x)=3x^3-x^2+6x-2$. Als ganzzahlige Nullstellen kommen die Teiler von -2, d.h. $\pm1, \pm2$ in Frage. Man berechnet $P(1)=6\neq0$, $P(-1)=-12\neq0$, $P(2)=30\neq0$, $P(-2)=-42\neq0$.

Mit Satz 1.4.5 (1) schließen wir, dass $P(x)$ keine ganzzahligen Nullstellen besitzt. Wir wenden Satz 1.4.5 (2) an und probieren $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$. Es gilt: $P(\frac{1}{3})=0$. Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{l} (3x^3-x^2+6x-2):(x-\frac{1}{3})=3x^2+6 \\ \underline{3x^3-x^2} \\ \qquad 6x-2 \\ \qquad \underline{6x-2} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Somit gilt: $P(x)=(x-\frac{1}{3})(3x^2+6)=3(x-\frac{1}{3})(x^2+2)$.

Da x^2+2 keine reellen Nullstellen besitzt, ist dies die vollständige Faktorisierung.

Wir wenden uns nun wieder dem linearen homogenen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu. Wie wir gesehen haben führt der Ansatz $y=e^{\lambda x}$ auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Das Fundamentalsystem hängt nun von den Lösungen der charakteristischen Gleichung bzw. anders ausgedrückt von der Faktorisierung von $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ ab.

Nach Satz 1.4.4 gilt nun:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_l)^{m_l} \underbrace{(\lambda^2+p_1\lambda+q_1)}^{k_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(\lambda^2+p_i\lambda+q_i)}^{k_i}$$

keine reellen Nullstellen!

mit $m_1+\dots+m_l+2(k_1+\dots+k_i)=n$. Zu jedem Linearfaktor $(\lambda-\lambda^*)^{m^*}$ gehören m^* Funktionen des Fundamentalsystems: $e^{\lambda^* t}, te^{\lambda^* t}, \dots, t^{m^*-1}e^{\lambda^* t}$

Zu jedem quadratischen Faktor $(\lambda^2+p\lambda+q)^{k^*}$ gehören $2k^*$ Funktionen des Fundamentalsystems: $e^{\alpha^* t}\sin(\beta^* t), te^{\alpha^* t}\sin(\beta^* t), \dots, t^{k^*-1}e^{\alpha^* t}\sin(\beta^* t)$, $e^{\alpha^* t}\cos(\beta^* t), te^{\alpha^* t}\cos(\beta^* t), \dots, t^{k^*-1}e^{\alpha^* t}\cos(\beta^* t)$ mit $\alpha^* = -\frac{p}{2}$, $\beta^* = \sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}$.

Die so gewonnenen n Fundamentallösungen sind stets linear unabhängig.

Die allgemeine Lösung ist jede Linearkombination der Fundamentallösungen.

Beispiel 1.4.8: $y^{(7)} + 3y^{(6)} - y^{(5)} - 23y^{(4)} - 56y^{(3)} - 68\ddot{y} - 44\dot{y} - 12y = 0$

Der Ansatz $y=e^{\lambda t}$ liefert die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^7 + 3\lambda^6 - \lambda^5 - 23\lambda^4 - 56\lambda^3 - 68\lambda^2 - 44\lambda - 12 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\lambda-3)(\lambda+1)^2(\underbrace{\lambda^2+2\lambda+2}_{\text{keine reellen Nullstellen}})^2 = 0$$

Aus der faktorisierten Darstellung lässt sich das Fundamentalsystem bestimmen zu:

$$y_1 = e^{3t}, y_2 = e^{-t}, y_3 = te^{-t}, y_4 = e^{-t}\sin(t), y_5 = te^{-t}\sin(t), y_6 = e^{-t}\cos(t), y_7 = te^{-t}\cos(t).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist somit:

$$y_h = C_1 e^{3t} + (C_2 + C_3 t)e^{-t} + (C_4 + tC_5)e^{-t}\sin(t) + (C_6 + tC_7)e^{-t}\cos(t).$$

Ähnlich wie im Fall $n=2$ kann man für das Auffinden einer partikulären Lösung im inhomogenen Fall z.B. bei Störfunktionen vom Typ Polynom, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktion passende Ansätze wählen, die wir im Folgenden zusammenstellen.

Ist $r(t)$ ein Polynom vom Grad m, so macht man den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} Q_m(t) & , \text{ falls } a_0 \neq 0 \\ t^k Q_m(t) & , \text{ falls } a_0 = \dots = a_{k-1} = 0 \end{cases}$$

Zu bestimmende Parameter sind die $m+1$ Koeffizienten von $Q_m(t)$.

Ist $r(t)$ eine Exponentialfunktion $r(t) = a \cdot e^{ct}$, so macht man den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} A \cdot e^{ct}, & \text{falls } c \text{ nicht Nullstelle der charakteristischen Gleichung} \\ A t^k e^{ct}, & \text{falls } c \text{ k-fache Nullstelle der charakteristischen Gleichung} \end{cases}$$

Zu bestimmen ist der Parameter A.

Ist $r(t)$ eine trigonometrische Funktion $r(t) = a \sin(ct) + b\cos(ct)$, $c>0$, so macht man den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} A\sin(ct) + B\cos(ct), & \text{falls das charakt. Polynom keinen Faktor } (\lambda^2+c) \text{ besitzt} \\ t^k[A\sin(ct) + B\cos(ct)], & \text{falls das charakteristische Polynom den Faktor } (\lambda^2+c)^k \text{ der Vielfachheit k besitzt} \end{cases}$$

Zu bestimmen sind die Parameter A und B.

Beispiel 1.4.9: AWP $y^{(3)} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 4y = 12e^{2t}$, $y(0) = \frac{1}{4}$, $\dot{y}(0) = \frac{3}{2}$, $\ddot{y}(0) = -5$

1. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen DGL

$$y^{(3)} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 4y = 0$$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

$$\iff (\lambda+2)^2(\lambda+1) = 0$$

$$\iff \lambda_{1,2} = -2, \ \lambda_3 = -1$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{-2t}$, $y_2 = t \cdot e^{-2t}$, $y_3 = e^{-t}$

Allgemeine Lösung: $y_h = (C_1 + C_2 t)e^{-2t} + C_3 e^{-t}$

2. Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL.

Ansatz: $y_p = A \cdot e^{2t}$, $\dot{y}_p = 2Ae^{2t}$, $\ddot{y}_p = 4Ae^{2t}$, $y_p^{(3)} = 8Ae^{2t}$

Einsetzen in die DGL: $8Ae^{2t}+20Ae^{2t}+16Ae^{2t}+4Ae^{2t}=12e^{2t} \quad |:e^{2t}$

$$\Longleftrightarrow \quad 48A=12 \Longleftrightarrow A=\frac{1}{4}$$

Somit $y_p=\frac{1}{4}e^{2t}$

3. Schritt: Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y=(C_1+C_2t)e^{-2t}+C_3e^{-t}+\frac{1}{4}e^{2t}$$

4. Schritt: Lösen des AWP

$$\dot{y}=(C_2-2C_1-2C_2t)e^{-2t}-C_3e^{-t}+\frac{1}{2}e^{2t}$$

$$\ddot{y}=(4C_1-4C_2+4C_2t)e^{-2t}+C_3e^{-t}+e^{2t}$$

AB: $y(0)=\frac{1}{4} \Longleftrightarrow C_1+C_3+\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \Longleftrightarrow C_1+C_3=0$

$\dot{y}(0)=\frac{3}{2} \Longleftrightarrow -2C_1+C_2-C_3+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Longleftrightarrow -2C_1+C_2-C_3=1$

$\ddot{y}(0)=-5 \Longleftrightarrow 4C_1-4C_2+C_3+1=-5 \Longleftrightarrow 4C_1-4C_2+C_3=-6$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $C_1=2, C_2=3, C_3=-2$

Somit löst $y=(2+3t)e^{-2t}-2e^{-t}+\frac{1}{4}e^{2t}$ das AWP.

Beispiel 1.4.10: $\quad y^{(4)}+2\ddot{y}+y=18\sin(2t)-27\cos(2t)$

1. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen DGL

$$y^{(4)}+2\ddot{y}+y=0$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

$$\Longleftrightarrow (\underbrace{\lambda^2+1}_{})^2=0$$

keine reellen Nullstellen; Vielfachheit 2

Fundamentalsystem: $y_1=C_1\sin(t), y_2=C_2t\sin(t), y_3=C_3\cos(t), y_4=C_4t\cos(t)$.

Allgemeine homogene Lösung:

$$y_h=(C_1+C_2t)\sin(t)+(C_3+C_4t)\cos(t)$$

2. Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL

Ansatz: $y_p=A\sin(2t)+B\cos(2t)$, $\dot{y}_p=2A\cos(2t)-2B\sin(2t)$

$\ddot{y}_p=-4A\sin(2t)-4B\cos(2t)$, $y_p^{(3)}=-8A\cos(2t)+8B\sin(2t)$,

$y_p^{(4)}=16A\sin(2t)+16B\cos(2t)$

Einsetzen in die DGL:

$$16A\sin(2t)+16B\cos(2t)-8A\sin(2t)-8B\cos(2t)+A\sin(2t)+B\cos(2t)$$
$$= 18\sin(2t)-27\cos(2t)$$

$\Longleftrightarrow$ $9A\sin(2t)+9B\cos(2t)=18\sin(2t)-27\cos(2t)$

Koeffizientenvergleich: $9A=18 \Longleftrightarrow A=2$

$9B=-27 \Longleftrightarrow B=-3$

Somit ist $y_p = 2\sin(2t)-3\cos(2t)$ partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

3. Schritt: Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y=(C_1+C_2t)\sin(t)+(C_3+C_4t)\cos(t)+2\sin(2t)-3\cos(2t)$$

Stabilität linearer DGL n-ter Ordnung

Analog zum Fall 2ter Ordnung nennen wir eine lineare DGL n-ter Ordnung global asymptotisch stabil, wenn die allgemeine Lösung $y_h = C_1y_1+\ldots+C_ny_n$ der zugeordneten homogenen DGL gegen 0 konvergiert für t gegen unendlich für beliebige $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Gleichbedeutend damit ist, dass für jede Fundamentallösung y_i gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} y_i = 0$.

Wir betrachten speziell wieder den Fall der linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie wir gesehen haben, ist jede Fundamentallösung eine Funktion des folgenden Typs:

$$e^{\lambda t},\ t^k e^{\lambda t},\ e^{\alpha t}\sin(\beta t), e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t), t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

Es gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\lambda t}=0 \Longleftrightarrow \lambda<0$, $\lim\limits_{t\to\infty} t^k e^{\lambda t}=0 \Longleftrightarrow \lambda<0$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\sin(\beta t)=0,\ \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\cos(\beta t)=0 \Longleftrightarrow \alpha<0$$

$$\lim_{t\to\infty} t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)=0,\ \lim_{t\to\infty} t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)=0 \Longleftrightarrow \alpha<0$$

Die asymptotische Stabilität lässt sich also an der faktorisierten Form der charakteristischen Gleichung ablesen. Die DGL in Beispiel 1.4.9 ist global asymptotisch stabil, die in Beispiel 1.4.10 instabil.

Es gibt noch ein weiteres nützliches Kriterium, das eine notwendige und hinreichende Bedingung für die global asymptotische Stabilität einer linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten liefert. Dazu betrachtet man die aus den Koeffizienten der DGL bzw. der charakteristischen Gleichung gebildete Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

Zum besseren Verständnis schreiben wir die Matrizen für spezielle n auf.

$$n=2: A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad n=3: A = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}, \quad n=4: A = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

Das Kriterium für globale asymptotische Stabilität beruht nun auf gewissen Vorzeichenbedingungen für aus der Matrix A gebildeten Determinanten. Wir benötigen:

Definition 1.4.11: Ein Hauptminor der Ordnung r einer $n \times n$-Matrix A ist die Determinante einer Matrix, die aus der Matrix A durch Streichung von $(n-r)$ Zeilen und $(n-r)$ Spalten entsteht. Dabei wird eine bestimmte Zeile i genau dann gestrichen, wenn auch die i-te Spalte gestrichen wird und umgekehrt.
Ein Hauptminor heißt führender Hauptminor der Ordnung r einer $n \times n$-Matrix A, wenn er aus den ersten r Zeilen und Spalten von A besteht.

Beispiel 1.4.12: Die führenden Hauptminoren von $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sind 3, $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 11$, $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 50$

Nun können wir das gewünschte Kriterium formulieren.

Satz 1.4.13: Die lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = r(t)$ ist genau dann global asymptotisch stabil, wenn alle führenden Hauptminoren der aus den Koeffizienten der DGL gebildeten Matrix A (s.o.) positiv sind.

Beispiel 1.4.14: $y^{(3)} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + y = 5e^{2t}$

Wir untersuchen die Vorzeichen der führenden Hauptminoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die führenden Hauptminoren gilt:

$$5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 39 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39 > 0,$$

d.h. die DGL ist global asymptotisch stabil.

Beispiel 1.4.15: $y^{(4)} + 2\ddot{y} + y = 18\sin(2t) - 27\cos(2t)$

Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Da bereits der erste führende Hauptminor 0 und damit nicht größer als 0 ist, wissen wir nach Satz 1.4.13, dass die DGL nicht global asymptotisch stabil ist.

II Differenzengleichungen

II.1 Einführende Bemerkungen

Viele Größen, die in der Wirtschaftswissenschaft beobachtet und analysiert werden, werden in festen Zeitintervallen oder zu festen Zeitpunkten aufgezeichnet. Einkommen, Konsum, Sparquoten, Zinsen etc. werden z.B. täglich, wöchentlich, monatlich, jährlich etc. betrachtet.

Gleichungen, die Zusammenhänge für solche Größen zu verschiedenen diskreten Zeitpunkten bzw. für verschiedene Zeitintervalle herstellen, sind sogenannte Differenzengleichungen. Mit $t = 0, 1, 2, \ldots$ bezeichnen wir im Folgenden diskrete Zeitperioden oder diskrete Zeitpunkte.

Definition 2.1.1: Sei $f: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Eine Gleichung der Form

$$y_{t+n} = f(t, y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+n-1}), \; n \in \mathbb{N},$$

heißt Differenzengleichung n-ter Ordnung. Eine Folge $(y_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, d.h. eine Abbildung $y: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \; t \longmapsto y(t) = y_t$, die die Gleichung erfüllt, heißt Lösung der Differenzengleichung.

Bei einer Differenzengleichung n-ter Ordnung wird also ein Zusammenhang einer Größe zum Zeitpunkt $t+n$ zu den Werten dieser Größe an vorhergehenden Zeitpunkten $t+n-1, \ldots, t+1, t$ hergestellt.

Wie auch bei Differentialgleichungen gilt auch hier, dass es kein Lösungsverfahren gibt, das auf jede beliebige Differenzengleichung anwendbar ist. Außer einigen allgemeinen Betrachtungen beschränken wir uns im Rahmen dieser Vorlesung auf lineare Differenzengleichungen und diskutieren Lösungsmethoden für verschiedene Ordnungen.

Definition 2.1.2: Seien $(a_{i,t})_{t \in \mathbb{N}_0}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ und $(r_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ reelle Folgen. Dann heißt eine Gleichung der Form

$$y_{t+n} + a_{n-1,t}\, y_{t+n-1} + \ldots + a_{1,t}\, y_{t+1} + a_{0,t}\, y_t = r_t$$

lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung.

Ist $r_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$, so heißt sie homogen, sonst inhomogen.
Hat man Anfangswerte $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ gegeben, so lassen sich die weiteren y_t, $t = n, n+1, \ldots$ prinzipiell immer rekursiv mit Hilfe der Differenzengleichung ermitteln. Wir erläutern dies zunächst am Beispiel der jährlichen Kapitalverzinsung.

Beispiel 2.1.3: Die Entwicklung eines Kapitals genügt bei jährlicher Verzinsung mit 5% der Differenzengleichung erster Ordnung

$$K_{t+1} = K_t(1 + 0.05) = 1.05\, K_t.$$

Ist das Anfangskapital K_0 vorgegeben, so berechnet man leicht nacheinander

$$K_1 = 1.05 \cdot K_0$$
$$K_2 = 1.05 \cdot K_1 = 1.05^2 \cdot K_0$$
$$K_3 = 1.05 \cdot K_2 = 1.05^3 \cdot K_0$$

u.s.w.

In diesem Beispiel ist es sehr einfach, eine geschlossene Formel für K_t anzugeben. Es gilt: $K_t = 1.05^t \cdot K_0$.

Nun könnte man sich damit zufrieden geben, dass man bei gegebenen Anfangswerten $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ jedes gewünschte y_t rekursiv mit Hilfe der Differenzengleichung bestimmen kann. Dies ist aber in mehrerer Hinsicht unbefriedigend.

Häufig ist man interessiert

- an einer geschlossenen Formel, um y_t auch für große t schnell berechnen zu können,
- am Verhalten der Lösung für $t \to \infty$,
- Abhängigkeiten von Lösungen von weiteren Parametern untersuchen zu können,
- das Aufschaukeln von Rundungsfehlern, wie es bei der rekursiven Berechnung passieren kann, zu vermeiden.

Ideal wäre es, Lösungen von Differenzengleichungen mit Hilfe elementarer Funktionen angeben zu können, was leider nur für einige Typen geht.

II.2 Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung

Eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung hat die spezielle Form $y_{t+1} + a_{0,t}\, y_t = r_t$.

Wir gehen nun so vor, dass wir ausgehend von spezielleren Betrachtungen schließlich eine allgemeine Lösungsformel herleiten.

Konstanter Koeffizient und konstante Inhomogenität

Wir betrachten den Fall $(a_{0,t})_{t\in\mathbb{N}_0} = (a_0)_{t\in\mathbb{N}_0}$, $(r_t)_{t\in\mathbb{N}_0} = (r)_{t\in\mathbb{N}_0}$, d.h. $a_{0,t} = a_0$ und $r_t = r$ sind konstant für alle $t\in\mathbb{N}_0$:

$$y_{t+1} + a_0 y_t = r \iff y_{t+1} = -a_0 y_t + r$$

Ist y_0 gegeben, so berechnet man rekursiv

$$y_1 = -a_0 y_0 + r$$
$$y_2 = -a_0 y_1 + r = -a_0(-a_0 y_0 + r) + r = a_0^2 y_0 + (1-a_0) r$$
$$y_3 = -a_0 y_2 + r = -a_0(a_0^2 y_0 + (1-a_0) r) + r = -a_0^3 y_0 + (1-a_0+a_0^2) r$$
$$y_4 = -a_0 y_3 + r = -a_0(-a_0^3 y_0 + (1-a_0+a_0^2) r) + r = a_0^4 y_0 + (1-a_0+a_0^2-a_0^3) r$$

u.s.w.

Man erkennt, dass man allgemein berechnen kann:

$$y_t = (-a_0)^t y_0 + r \sum_{i=0}^{t-1} (-a_0)^i$$

Für $a_0 = -1$ erhält man daraus unmittelbar: $y_t = y_0 + t\cdot r$.

Für $a_0 \neq -1$ benutzen wir die Formel für die geometrische Summe und erhalten

$$y_t = (-a_0)^t y_0 + \frac{1-(-a_0)^t}{1-(-a_0)} \cdot r$$
$$= (-a_0)^t y_0 + \frac{1-(-a_0)^t}{1+a_0} \cdot r$$

Beispiel 2.2.1: $y_{t+1} - y_t = 3$, $y_0 = 2$

Hier ist $a_0 = -1$ und $r = 3$. Somit lautet die Lösung

$$y_t = 2 + 3t$$

Beispiel 2.2.2: $y_{t+1} - 2y_t = 4$, $y_0 = 2$.

Hier ist $a_0 = -2$ und $r = 4$. Somit lautet die Lösung

$$y_t = 2^t \cdot 2 + \frac{1-2^t}{1-2} \cdot 4 = 2^{t+1} + (2^t - 1)\cdot 4 = 2^{t+1} + 2^{t+2} - 4$$

Bemerkungen zu Gleichgewichtslösungen und Stabilität

Eine konstante Lösung, d.h. eine Gleichgewichtslösung der Differenzengleichung $y_{t+1} + a_0 y_t = r$, ist eine Lösung, für die $y_{t+1} = y_t = y^*$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt, d.h. es muss gelten $y^* + a_0 y^* = r$.

Für $a_0 \neq -1$ erhalten wir also die Gleichgewichtslösung $y^* = \frac{r}{1+a_0}$.

Nun gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} (-a_0)^t = 0 \iff |a_0| < 1$.

Somit folgt: Ist $|a_0| < 1$, dann gilt

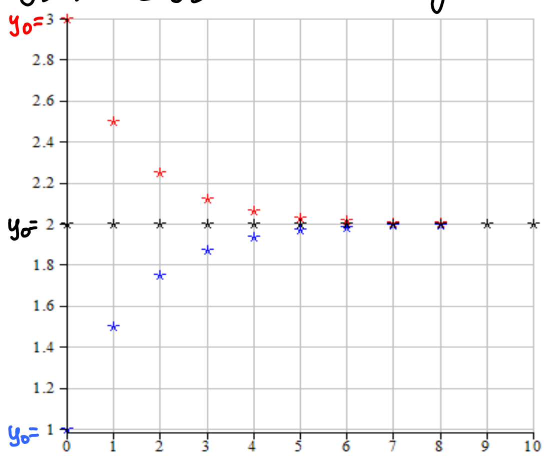
$$\lim_{t\to\infty} y_t = \lim_{t\to\infty}\left[(-a_0)^t y_0 + \frac{1-(-a_0)^t}{1+a_0} r\right] = \frac{1}{1+a_0}\cdot r,$$

d.h. y_t konvergiert gegen die Gleichgewichtslösung, falls $|a_0| < 1$.

Die Gleichung heißt dann global asymptotisch stabil.

Beispiel 2.2.3: Wir untersuchen das Stabilitätsverhalten in unterschiedlichen Situationen.

1) $y_{t+1} - \frac{1}{2} y_t = 1$. Gleichgewichtslösung: $y^* = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$



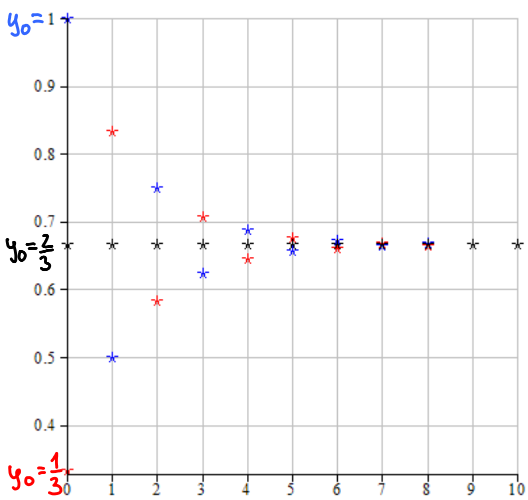
Für $y_0 = 1$ erhalten wir die Lösung

$$y_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{1-\frac{1}{2}} = 2 - 2^{-t}$$

Für $y_0 = 3$ erhalten wir die Lösung

$$y_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t \cdot 3 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 2^{-t}$$

2) $y_{t+1} + \frac{1}{2} y_t = 1$. Gleichgewichtslösung: $y^* = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$



Für $y_0 = 1$ erhalten wir die Lösung

$$y_t = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^t + \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^t}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{-t}$$

Für $y_0 = \frac{1}{3}$ erhalten wir die Lösung

$$y_t = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^t \cdot \frac{1}{3} + \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^t}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{-t}$$

Konstanter Koeffizient und beliebige Inhomogenität

Wir setzen nun nur $(a_{0,t})_{t\in\mathbb{N}_0} = (a_0)_{t\in\mathbb{N}_0}$ als konstant voraus. Ist wieder y_0 gegeben, so berechnen wir nun rekursiv

$$y_1 = -a_0\, y_0 + r_0$$

$$y_2 = -a_0\, y_1 + r_1 = -a_0(-a_0 y_0 + r_0) + r_1 = a_0^2 y_0 - a_0 r_0 + r_1$$

$$y_3 = -a_0\, y_2 + r_2 = -a_0(a_0^2 y_0 - a_0 r_0 + r_1) + r_2 = -a_0^3 y_0 + a_0^2 r_0 - a_0 r_1 + r_2$$

$$y_4 = -a_0\, y_3 + r_3 = -a_0(-a_0^3 y_0 + a_0^2 r_0 - a_0 r_1 + r_2) + r_3$$
$$= a_0^4 y_0 - a_0^3 r_0 + a_0^2 r_1 - a_0 r_2 + r_3$$

u.s.w.

Allgemein erhält man aus diesen Überlegungen die Formel

$$y_t = (-a_0)^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} (-a_0)^{t-1-i} r_i = (-a_0)^t y_0 + \sum_{k=1}^{t} (-a_0)^{t-k} r_{k-1} = (-a_0)^t y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} (-a_0)^j r_{t-1-j}$$

Beispiel 2.2.3: $\quad y_{t+1} - y_t = t+1$

Hier ist $a_0 = -1$ und $r_t = t+1$.

$$y_t = y_0 + \sum_{k=1}^{t} k = y_0 + (1+2+\ldots+t)$$
$$= y_0 + \frac{t(t+1)}{2}.$$

Beispiel 2.2.4: $\quad y_{t+1} - \frac{1}{2} y_t = 3^t$

Hier ist $a_0 = -\frac{1}{2}$ und $r_t = 3^t$.

$$y_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t \cdot y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1-i} \cdot 3^i = 2^{-t} \cdot y_0 + 2^{-t+1} \sum_{i=0}^{t-1} 6^i$$

geometrische Summe

$$= 2^{-t} y_0 + 2^{-t+1} \cdot \frac{1-6^t}{1-6}$$
$$= 2^{-t}\left(y_0 - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5} \cdot 6^t\right)$$

Der allgemeine lineare Fall

Der allgemeine Fall $\quad y_{t+1} + a_{0,t}\, y_t = r_t \quad$ ist nun etwas komplizierter aufzuschreiben. Analoges Vorgehen wie oben führt bei bekanntem y_0 zu

$$y_1 = -a_{0,0}\, y_0 + r_0$$

$$y_2 = -a_{0,1}\, y_1 + r_1 = -a_{0,1}(-a_{0,0}\, y_0 + r_0) + r_1 = a_{0,1}\, a_{0,0}\, y_0 - a_{0,1} r_0 + r_1$$

$$y_3 = -a_{0,2}\, y_2 + r_2 = -a_{0,2}(a_{0,1} a_{0,0} y_0 - a_{0,1} r_0 + r_1) + r_2$$
$$= -a_{0,2}\, a_{0,1}\, a_{0,0}\, y_0 + a_{0,2} a_{0,1} r_0 - a_{0,2} r_1 + r_2$$
$$y_4 = -a_{0,3}\, y_3 + r_3 = -a_{0,3}(-a_{0,2} a_{0,1} a_{0,0}\, y_0 + a_{0,2} a_{0,1} r_0 - a_{0,2} r_1 + r_2) + r_3$$
$$= a_{0,3} a_{0,2}\, a_{0,1} a_{0,0}\, y_0 - a_{0,3} a_{0,2} a_{0,1} r_0 + a_{0,3} a_{0,2} r_1 - a_{0,3} r_2 + r_3$$

u.s.w.

Auch hier lässt sich bei genauerem Hinsehen ein Bildungsgesetz erkennen, das aber schwieriger zu formulieren ist.

Wir verwenden (analog zur Schreibweise für Summen) für Produkte folgende Abkürzung: $b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k = \prod_{j=0}^{k} b_k$

Damit lässt sich y_t angeben durch

$$y_t = \left(\prod_{j=0}^{t-1}(-a_{0,j})\right) y_0 + \left(\prod_{j=1}^{t-1}(-a_{0,j})\right) r_0 + \left(\prod_{j=2}^{t-1}(-a_{0,j})\right) r_1$$
$$+ \ldots + \left(\prod_{j=t-1}^{t-1}(-a_{0,j})\right) r_{t-2} + r_{t-1}$$
$$= \left(\prod_{j=0}^{t-1}(-a_{0,j})\right) y_0 + \sum_{i=0}^{t-2}\left(\prod_{j=i+1}^{t-1}(-a_{0,j})\right) r_i + r_{t-1}$$

Beispiel 2.2.5: $y_{t+1} - (t+1)\, y_t = t$

Mit $-a_{0,j} = j+1$ ergibt sich zunächst

$$\prod_{j=0}^{t-1}(-a_{0,j}) = \prod_{j=0}^{t-1}(j+1) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot t = t!$$
$$\prod_{j=i+1}^{t-1}(-a_{0,j}) = \prod_{j=i+1}^{t-1}(j+1) = (i+2)\cdot(i+3)\cdot \ldots \cdot t = \frac{t!}{(i+1)!}$$

Setzt man dies in die obige allgemeine Formel ein, so erhält man mit $r_i = i$

$$y_t = t! \cdot y_0 + \sum_{i=0}^{t-2} \frac{t!}{(i+1)!}\cdot i + \underbrace{(t-1)}_{= \frac{t!}{t!}\cdot(t-1)}$$
$$= t!\left\{ y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \frac{i}{(i+1)!} \right\}$$

Im folgenden Abschnitt werden wir nun exemplarisch Anwendungsmöglichkeiten für lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung behandeln.

Beispiele für ökonomische Anwendungen

Beispiel 2.2.5: Der Schweinezyklus - ein Spinnennetzmodell

Die Kosten für die Aufzucht von q Schweinen sei gegeben durch

$$K(q) = \alpha q + \beta q^2, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Wir nehmen an, dass es N gleiche Schweinezuchtbetriebe gibt.

Die Nachfrage nach Schweinen sei in Abhängigkeit vom Preis p pro Schwein durch

$$D(p) = \gamma - \delta p, \quad \gamma, \delta > 0$$

gegeben. Wir nehmen an, dass jeder Züchter seinen Gewinn

$$G(q) = p \cdot q - K(q) = pq - \alpha q - \beta q^2$$

bei gegebenem Preis p maximieren möchte.

Es gilt: $G'(q) = p - \alpha - 2\beta q$, $G''(q) = -2\beta$

$$G'(q) = 0 \iff q = \frac{p-\alpha}{2\beta}$$

$G''\left(\frac{p-\alpha}{2\beta}\right) = -2\beta < 0$, da β nach Voraussetzung positiv ist.

Unter der Voraussetzung $p > \alpha$ wird also der Gewinn maximal für

$$q = \frac{p-\alpha}{2\beta}.$$

Die Gesamtmenge der von den N Züchtern angebotenen Schweine zum Preis p pro Schwein ist durch die Angebotsfunktion

$$S(p) = N \cdot \frac{p-\alpha}{2\beta}, \quad p > \alpha,$$

gegeben.

Das Modell geht nun von folgenden weiteren Annahmen aus:

Jeder Schweinezüchter orientiert sich am Preis p_t, der in der t-ten Zeitperiode pro Schwein bezahlt wird, um die Zahl der Schweine für die Aufzucht in der folgenden Zeitperiode festzulegen, d.h.

$$S(p_t) = N \cdot \frac{p_t - \alpha}{2\beta}.$$

Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage in allen Zeitperioden bedeutet

$$S(p_t) = D(p_{t+1}), \text{ d.h. } N \cdot \frac{p_t - \alpha}{2\beta} = \gamma - \delta p_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

bzw. äquivalent dazu

$$p_{t+1} + \frac{N}{2\beta\delta} p_t = \frac{N\alpha + 2\beta\gamma}{2\beta\delta}.$$

Mit der allgemeinen Lösungsformel auf S. 3 erhalten wir mit

$a_0 = \frac{N}{2\beta\delta}$, $r = \frac{N\alpha + 2\beta\gamma}{2\beta\delta}$:

$$p_t = \left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t p_0 + \frac{1-\left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t}{1+\frac{N}{2\beta\delta}} \cdot \frac{N\alpha+2\beta\gamma}{2\beta\delta}$$

$$= \left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t p_0 + \left(1-\left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t\right) \cdot \frac{N\alpha+2\beta\gamma}{N+2\beta\delta}$$

Der Gleichgewichtspreis ist $p^* = \frac{N\alpha+2\beta\gamma}{2\beta\delta} \cdot \frac{1}{1+\frac{N}{2\beta\delta}} = \frac{N\alpha+2\beta\gamma}{N+2\beta\delta}$.

Damit lässt sich p_t ausdrücken durch

$$p_t = p^* + \left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t (p_0 - p^*)$$

Die Differenzengleichung ist global asymptotisch stabil, wenn

$$\left|-\frac{N}{2\beta\delta}\right| = \frac{N}{2\beta\delta} < 1 \text{ , d.h. } N < 2\beta\delta$$

gilt. In diesem Fall gilt $\lim_{t\to\infty} p_t = p^*$.

Eine Grafik, die die Gesamtsituation noch einmal verdeutlicht und eine Erklärung für den Begriff "Spinnennetzmodell" liefert findet man z.B. in K. Sydsaeter, P. Hammond, A. Seierstad, A. Strøm: Further Mathematics for Economic Analysis, S. 397.

Beispiel 2.2.6: Das Anlagevermögen auf einem Konto am Ende der Periode t betrage w_t. Mit c_t bezeichnen wir die Abhebungen vom und mit y_t die Einzahlungen auf das Konto während der Periode t. Das Vermögen wird jeweils am Ende einer Zeitperiode konstant mit $i = p\%$ verzinst. Damit ergibt sich die Differenzengleichung

$$w_{t+1} = \underbrace{(1+i)}_{=-a_0} w_t + \underbrace{y_{t+1} - c_{t+1}}_{=r_t} \quad , t = 0, 1, 2, \dots$$

mit der Lösung

$$w_t = (1+i)^t w_0 + \sum_{k=1}^{t} (1+i)^{t-k} (y_k - c_k)$$

Bezeichnen wir mit $D_t = (1+i)^{-t}$ den Diskontierungsfaktor, so erhalten wir daraus den Barwert (PDV - present discounted value) $D_t w_t = w_0 + \sum_{k=1}^{t} D_k (y_k - c_k)$.

Beispiel 2.2.7: Mit den Bezeichnungen wie in Beispiel 2.2.6 betrachten wir nun den Fall, dass der Zins, der auf w_t gezahlt wird, variabel ist, d.h. $i_t = p_t\,\%$.

Die zugehörige Differenzengleichung lautet dann

$$w_{t+1} = \underbrace{(1+i_t)}_{=-a_{0,t}} w_t + \underbrace{y_{t+1} - c_{t+1}}_{=r_t} \quad , t = 0, 1, \ldots$$

mit der Lösung

$$w_t = \left(\prod_{j=0}^{t-1} (1+i_j)\right) w_0 + \sum_{k=0}^{t-2} \left(\prod_{j=k+1}^{t-1} (1+i_j)\right) (y_{k+1} - c_{k+1}) + (y_t - c_t)$$

Mit dem Diskontierungsfaktor $D_t = \prod_{j=0}^{t-1} (1+i_j)^{-1}$ erhält man daraus wieder den Barwert

$$D_t w_t = w_0 + \sum_{k=0}^{t-1} D_{k+1} (y_{k+1} - c_{k+1}) = w_0 + \sum_{\ell=1}^{t} D_\ell (y_\ell - c_\ell),$$

$$\text{da} \quad D_t \cdot \prod_{j=k+1}^{t-1} (1+i_j) = \frac{\cancel{(1+i_{k+1})}\cancel{(1+i_{k+2})}\cdot\ldots\cdot\cancel{(1+i_{t-1})}}{(1+i_0)\cdot\ldots\cdot(1+i_k)\cancel{(1+i_{k+1})}\cdot\ldots\cdot\cancel{(1+i_{t-1})}} = D_{k+1}.$$

II.3 lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung

Wir betrachten

$$y_{t+2} + a_{1,t}\, y_{t+1} + a_{0,t}\, y_t = r_t \quad \text{mit} \quad (a_{0,t})_{t\in\mathbb{N}_0} \neq (0)_{t\in\mathbb{N}_0}.$$

Ist $r_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$, so heißt die Gleichung homogen, sonst inhomogen. Ähnlich wie bei den Differentialgleichungen lassen sich allgemeine Aussagen zur Lösungsstruktur angeben. Dazu müssen wir zunächst den Begriff der linearen Unabhängigkeit für die hier passende Situation angeben.

Definition 2.3.1: n Folgen $(u_{1,t})_{t\in\mathbb{N}_0}, \ldots, (u_{n,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha_1 u_{1,t} + \alpha_2 u_{2,t} + \ldots + \alpha_n u_{n,t} = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{N}_0$$

nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ besitzt.

Handelt es sich bei den Folgen um Lösungen einer linearen Differenzengleichung, so lässt sich ein handliches Kriterium für die lineare Unabhängigkeit angeben. Wir formulieren das Kriterium zunächst nur für den Fall $n=2$ und geben den allgemeinen Satz für beliebiges n im nächsten Abschnitt an.

Satz 2.3.2: Zwei Folgen $(u_{1,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$, $(u_{2,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$, die Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichung $y_{t+2}+a_{1,t}y_{t+1}+a_{0,t}y_t=0$ sind, sind genau dann linear unabhängig, wenn $\begin{vmatrix} u_{1,0} & u_{2,0} \\ u_{1,1} & u_{2,1} \end{vmatrix} \neq 0$ ist.

Über die Lösungsstruktur kann man folgende Aussagen festhalten.

Satz 2.3.3: Sind $(u_{1,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$, $(u_{2,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$ zwei linear unabhängige Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichung

$$y_{t+2}+a_{1,t}y_{t+1}+a_{0,t}y_t=0,$$

dann ist $y_{h,t}=C_1u_{1,t}+C_2u_{2,t}$ die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung.

Ist darüber hinaus $(y_{p,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $y_{t+2}+a_{1,t}y_{t+1}+a_{0,t}y_t=r_t$, so ist

$$y_t=y_{h,t}+y_{p,t}=C_1u_{1,t}+C_2u_{2,t}+y_{p,t}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Hat man y_0, y_1 vorgegeben, so lassen sich die Konstanten C_1, C_2 eindeutig bestimmen.

Wie auch bei den Differentialgleichungen gibt es keine allgemein anwendbare Methode zur Bestimmung der beiden linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung. Hat man diese bestimmt, so kann man allerdings immer die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung angeben als:

$$y_t=C_1u_{1,t}+C_2u_{2,t}-u_{1,t}\sum_{k=1}^{t}\frac{r_{k-1}u_{2,k}}{U_k}+u_{2,t}\sum_{k=1}^{t}\frac{r_{k-1}u_{1,k}}{U_k}$$

mit $U_t=u_{1,t}u_{2,t+1}-u_{1,t+1}u_{2,t}$. Im Folgenden wenden wir uns dem Spezialfall konstanter Koeffizienten zu.

Lineare Differenzengleichungen 2ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir behandeln $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = r_t$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ konstant, $a_0 \neq 0$.

Wir benötigen zunächst zwei linear unabhängigen Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0$.

Ansatz: $u_t = \lambda^t$ mit $\lambda \neq 0$, d.h. $u_{t+1} = \lambda^{t+1}$, $u_{t+2} = \lambda^{t+2}$

Einsetzen in die homogene Differenzengleichung liefert:

$$\lambda^{t+2} + a_1 \lambda^{t+1} + a_0 \lambda^t = 0$$

$$\iff \lambda^t (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

Für $\lambda \neq 0$ erhalten wir somit die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$.

1. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 > a_0$.

   Dann sind $u_{1,t} = \lambda_1^t$, $u_{2,t} = \lambda_2^t$ linear unabhängige Lösungen und

   $$y_{h,t} = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t$$

   ist die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung.

2. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ hat eine (doppelte) reelle Lösung $\lambda = -\frac{a_1}{2}$, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 = 0$.

   Dann ist $u_{1,t} = \lambda^t = \left(-\frac{a_1}{2}\right)^t$ Lösung der homogenen Differenzengleichung.

   Wir zeigen, dass $u_{2,t} = t \cdot \lambda^t$ in diesem Fall ebenfalls (linear unabhängige) Lösung ist.

   Einsetzen von $u_{2,t} = t \cdot \lambda^t$, $u_{2,t+1} = (t+1)\lambda^{t+1}$, $u_{2,t+2} = (t+2)\lambda^{t+2}$ in die homogene Differenzengleichung liefert:

   $$(t+2)\lambda^{t+2} + a_1 (t+1)\lambda^{t+1} + a_0 t \lambda^t$$

   $$= t\lambda^t \underbrace{(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0)}_{\substack{=0 \\ \text{(charakt. Gleichg.)}}} + \lambda^{t+1} \underbrace{(2\lambda + a_1)}_{=2\cdot\left(-\frac{a_1}{2}\right) + a_1 = 0} = 0$$

   Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

   $$y_{h,t} = C_1 \lambda^t + C_2 t \lambda^t = (C_1 + C_2 t) \cdot \left(-\frac{a_1}{2}\right)^t$$

3. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ hat keine reelle Lösung, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-a_0<0 \iff \left(\frac{a_1}{2}\right)^2<a_0$.

Man kann zeigen, dass die linear unabhängigen Lösungen in diesem Fall durch $u_{1,t}=(\sqrt{a_0})^t\cos(\theta t)$, $u_{2,t}=(\sqrt{a_0})^t\sin(\theta t)$ mit $\cos\theta=-\frac{a_1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_0}}$. Wegen $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2<a_0$ gilt $\left|\frac{a_1}{2}\right|<\sqrt{a_0}$, d.h. $-1<-\frac{a_1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_0}}<1$. Somit ist $\theta=\arccos\left(-\frac{a_1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_0}}\right)\in(0,\pi)$, wobei arccos die Umkehrfunktion von cos bezeichnet. Die Lösungen lassen sich durch Einsetzen in die Differenzengleichung bestätigen. Wir verzichten hier darauf, man benötigt dafür Additionstheoreme für sin und cos.

Beispiel 2.3.4: $y_{t+2}-5y_{t+1}+6y_t=0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2-5\lambda+6=0$

$$\iff \lambda_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-6}$$

$$\iff \lambda_1=2,\ \lambda_2=3$$

Linear unabhängige Lösungen: $u_{1,t}=2^t$, $u_{2,t}=3^t$.

Allgemeine Lösung: $y_{h,t}=C_1\cdot 2^t+C_2\cdot 3^t$

Beispiel 2.3.5: $y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2-6\lambda+9=0$

$$\iff (\lambda-3)^2=0$$

$$\iff \lambda=3$$

Linear unabhängige Lösungen: $u_{1,t}=3^t$, $u_{2,t}=t\cdot 3^t$

Allgemeine Lösung: $y_{h,t}=(C_1+C_2t)\cdot 3^t$

Beispiel 2.3.6: $y_{t+2}-y_{t+1}+y_t=0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2-\lambda+1=0 \iff \lambda=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}$

keine reelle Lösung

linear unabhängige Lösungen: $\sqrt{a_0}=1$, d.h. $(\sqrt{a_0})^t=1$

$\theta=-\frac{a_1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_0}}=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}\iff\theta=\frac{1}{3}\pi$

Also: $u_{1,t} = \cos(\frac{1}{3}\pi t)$, $u_{2,t} = \sin(\frac{1}{3}\pi t)$

Allgemeine Lösung: $y_{h,t} = C_1 \cos(\frac{1}{3}\pi t) + C_2 \sin(\frac{1}{3}\pi t)$

Für die Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differenzengleichung $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = r_t$ kann man prinzipiell die Formel auf S. 10 unten verwenden. Dies ist aber häufig mit sehr hohem Aufwand verbunden. Man kann hier ähnlich wie bei den Differentialgleichungen je nach Struktur von r_t spezielle Ansätze machen. Dabei ist wieder darauf zu achten, ob r_t bereits Lösung der homogenen Gleichung ist. Wir behandeln die Fragestellung an einigen Beispielen.

Beispiel 2.3.7: $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 4$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y_{h,t} = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot 3^t$

Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$u_{p,t} = A$

Einsetzen in die Differenzengleichung:

$$A - 5A + 6A = 4 \Longleftrightarrow A = 2$$

Also: $u_{p,t} = 2$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_t = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot 3^t + 2$$

Beispiel 2.3.7: $y_{t+2} + 2y_{t+1} - 3y_t = 8$

Lösen der homogenen Gleichung: $y_{t+2} + 2y_{t+1} - 3y_t = 0$

Charakterische Gleichung: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y_{h,t} = C_1(-3)^t + C_2$

Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

Da jede konstante Folge bereits Lösung der homogenen Gleichung ist, muss der Ansatz modifiziert werden.

Wir probieren den Ansatz: $u_{p,t} = A \cdot t$, d.h. $u_{p,t+2} = A \cdot (t+2)$, $u_{p,t+1} = A(t+1)$.

Einsetzen in die Differenzengleichung liefert:

$$A \cdot (t+2) + 2A(t+1) - 3At = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 4A = 8 \Leftrightarrow A = 2$$

Somit ist $u_{p,t} = 2 \cdot t$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ist $y_t = C_1(-3)^t + C_2 + 2t$.

Beispiel 2.3.8: $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 10$

Lösen der homogenen Gleichung: $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$

Charakterische Gleichung: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$

doppelte Nullstelle $\lambda = 1$.

Allgemeine lösung der homogenen Gleichung: $y_{h,t} = C_1 \cdot 1^t + C_2 \cdot t \cdot 1^t = C_1 + C_2 t$.

Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

Da jede konstante Folge und jede Folge der Form $A \cdot t$ bereits Lösung der homogenen Gleichung ist, muss der Ansatz weiter modifiziert werden.

Wir probieren den Ansatz: $u_{p,t} = A \cdot t^2$, d.h. $u_{p,t+2} = A \cdot (t+2)^2$, $u_{p,t+1} = A(t+1)^2$.

Einsetzen in die Differenzengleichung liefert:

$$A \cdot (t+2)^2 - 2A(t+1)^2 + At^2 = 10 \Leftrightarrow A(t^2+4t+4) - 2A(t^2+2t+1) + At^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow t^2(A - 2A + A) + t(4A - 4A) + 4A - 2A = 10 \Leftrightarrow 2A = 10 \Leftrightarrow A = 5$$

Somit ist $u_{p,t} = 5t^2$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ist $y_t = C_1 + C_2 t + 5t^2$.

Die obigen Beispiele zeigen ganz gut, wie der "eigentliche" Ansatz zu modifizieren ist, wenn r_t bereits Lösung der homogenen Gleichung ist. Wir betrachten nun noch ein Beispiel, in dem sich r_t aus verschiedenen Termen zusammensetzt und zusätzlich Anfangswerte für y_0, y_1 vorgegeben sind.

Beispiel 2.3.9: $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 4^t + t^2 + 3$, $y_0 = \frac{5}{2}$, $y_1 = -5$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung hatten wir bereits bestimmt zu: $y_{h,t} = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot 3^t$.

Für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz: $u_{p,t} = A\cdot 4^t + B_2 t^2 + B_1 t + B_0$, d.h.

$u_{p,t+2} = A\cdot 4^{t+2} + B_2(t+2)^2 + B_1(t+2) + B_0$, $u_{p,t+1} = A\cdot 4^{t+1} + B_2(t+1)^2 + B_1(t+1) + B_0$

Einsetzen in die Differenzengleichung liefert:

$$A\cdot 4^{t+2} + B_2(t+2)^2 + B_1(t+2) + B_0 - 5\cdot A\cdot 4^{t+1} - 5B_2(t+1)^2 - 5B_1(t+1) - 5B_0$$
$$+ 6A\cdot 4^t + 6B_2 t^2 + 6B_1 t + 6B_0 = 4^t + t^2 + 3$$
$$\Longleftrightarrow 2A\cdot 4^t + 2B_2 t^2 + 2(B_1 - 3B_2)t + 2B_0 - 3B_1 - B_2 = 4^t + t^2 + 3$$

Koeffizientenvergleich: $2A = 1$, $2B_2 = 1$, $2(B_1 - 3B_2) = 0$, $2B_0 - 3B_1 - B_2 = 3$

Lösung: $A = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{2}$, $B_1 = \frac{3}{2}$, $B_0 = 4$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_t = C_1\cdot 2^t + C_2\cdot 3^t + \frac{1}{2}\cdot 4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4$$

Startbedingungen:

$$y_0 = \frac{5}{2} \Longleftrightarrow C_1 + C_2 + \frac{9}{2} = \frac{5}{2} \Longleftrightarrow C_1 + C_2 = -2$$
$$y_1 = -5 \Longleftrightarrow 2C_1 + 3C_2 + 8 = -5 \Longleftrightarrow 2C_1 + 3C_2 = -13$$

Lösung: $C_1 = 7$, $C_2 = -9$

Somit erfüllt $y_t = 7\cdot 2^t - 9\cdot 3^t + \frac{1}{2}\cdot 4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4$ die Differenzengleichung mit den vorgegebenen Startbedingungen.

Bemerkungen zur Stabilität linearer Differenzengleichungen

Ähnlich wie bei linearen DGL nennen wir eine lineare Differenzengleichung global asymptotisch stabil, wenn die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung gegen Null strebt für $t \to \infty$.

Ist $y_{h,t} = C_1 u_{1,t} + C_2 u_{2,t}$ die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung $y_{t+2} + a_{1,t}y_{t+1} + a_{0,t}y_t = 0$, so ist die Gleichung

$y_{t+2} + a_{1,t}y_{t+1} + a_{0,t}y_t = r_t$ global asymptotisch stabil

$$\Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} u_{1,t} = 0 \text{ und } \lim_{t\to\infty} u_{2,t} = 0.$$

Wir diskutieren wieder allgemein die drei verschiedenen Fälle, die bei linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten auftreten. Im Folgenden betrachten wir also

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = r_t .$$

Die zugeordnete homogene Gleichung ist $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0$ mit der charakteristischen Gleichung: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

1. Fall: Die charakteristische Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$, $\lambda_2 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$.
Dann ist $u_{1,t} = \lambda_1^t$, $u_{2,t} = \lambda_2^t$ und somit:
$\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_1^t = 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_2^t = 0 \iff |\lambda_1| < 1$ und $|\lambda_2| < 1$

2. Fall: Die charakterische Gleichung hat eine (doppelte) reelle Lösung $\lambda = -\frac{a_1}{2}$. Dann ist $u_{1,t} = \lambda^t$ und $u_{2,t} = t \cdot \lambda^t$ und somit:
$\lim\limits_{t\to\infty} \lambda^t = 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} t \cdot \lambda^t = 0 \iff |\lambda| < 1$

3. Fall: Die charakteristische Gleichung hat keine reelle Nullstelle.
Dann ist $u_{1,t} = (\sqrt{a_0})^t \cos(\theta t)$, $u_{2,t} = (\sqrt{a_0})^t \sin(\theta t)$ und somit
$\lim\limits_{t\to\infty} (\sqrt{a_0})^t \cos(\theta t) = 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} (\sqrt{a_0})^t \sin(\theta t) = 0 \iff \sqrt{a_0} < 1 \iff a_0 < 1$.

Auch hier gibt es ein handliches Kriterium, das allein auf Eigenschaften der Koeffizienten a_1, a_0 beruht. Solche Kriterien sind insbesondere für Differenzengleichungen höherer Ordnung wichtig, wenn das Stabilitätsverhalten untersucht werden soll, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

Satz 2.3.10: Die Differenzengleichung $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = r_t$ ist genau dann global asymptotisch stabil, wenn $|a_1| < 1 + a_0$ und $a_0 < 1$.

Beispiel 2.3.11: $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + 0.9\, y_t = r_t$ global asymptotisch stabil

$$\iff |a_1| < 1.9 \iff a_1 \in (-1.9, 1.9)$$

Beispiel 2.3.12: $y_{t+2} + 2 y_{t+1} + a_0 y_t = r_t$ ist für keinen Wert von a_0 asymptotisch stabil, da $|2| < 1 + a_0$ und $a_0 < 1$ für kein a_0 erfüllbar ist.

II.4 Bemerkungen zu linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung

Ähnlich wie bei linearen DGl lassen sich die Betrachtungen, die wir für lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung angestellt haben, auf lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung übertragen.
Dies betrifft insbesondere die Struktur der Lösungen, die Vorgehensweise zur Ermittlung von Lösungen im Fall konstanter Koeffizienten und die Überlegungen zur Stabilität.
Im Rahmen dieser Veranstaltung gehen wir darauf nicht näher ein und verweisen auf:
Knut Sydsaeter, Peter Hammond, Atle Seierstad, Arne Strøm:
Further Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, 2008, S. 410 ff.

III Optimierung

Viele der interessanteren ökonomischen Optimierungsprobleme hängen von einer Vielzahl von Variablen ab. Ein Verbraucher wählt Mengen von verschiedenen Gütern, um einen möglichst großen Nutzen zu erreichen. Ein Unternehmen versucht die Kosten für Lohn, Lagerhaltung, Maschineneinsatz, Transport etc. für ein vorgegebenes Produktionsziel möglichst gering zu halten. Die mathematische Behandlung solcher Aufgaben erfordert die Bestimmung globaler bzw. lokaler Extrema von Funktionen mehrerer Variablen. Dabei können zusätzlich Nebenbedingungen/Restriktionen in Form von Gleichungen und Ungleichungen auftreten (begrenzte Ressourcen, Mindestproduktionsmenge, Budgetbeschränkung etc.). Allgemein stellt sich somit die Aufgabe:

Bestimme Minimum bzw. Maximum von $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

so dass
$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1,x_2,\dots,x_n) &= b_1 \\ &\vdots \\ g_r(x_1,x_2,\dots,x_n) &= b_r \end{aligned}\right\} \text{Gleichungsrestriktionen}$$
$$\left.\begin{aligned} h_1(x_1,x_2,\dots,x_n) &\le c_1 \\ &\vdots \\ h_s(x_1,x_2,\dots,x_n) &\le c_s \end{aligned}\right\} \text{Ungleichungsrestriktionen}$$

Bevor wir in diese Thematik einsteigen, stellen wir einige Grundlagen aus der Analysis mehrerer Variablen zusammen.

III.1 Grundlagen der Analysis mehrerer Variablen

Definition 3.1.1: Eine reelle Funktion f von n Variablen ist eine Zuordnung, die jedem geordneten n-Tupel $\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ aus einer Menge $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert zuordnet. $\mathbb{D}_f$ heißt Definitionsbereich von f, die Menge aller Funktionswerte $\mathbb{W}_f$ heißt Wertebereich von f. ($f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oder auch kurz $\vec{x} \longmapsto f(\vec{x})$.)

Bezeichnung 3.1.2: Ist f eine Funktion von n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle $\vec{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $z = f(\vec{x})$. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißen dann unabhängige Variable oder Argumente und z abhängige Variable von f. In den Wirtschaftswissenschaften verwendet man häufig auch die Bezeichnungen exogene Variablen für die unabhängigen Variablen und endogene Variable für die abhängige Variable.

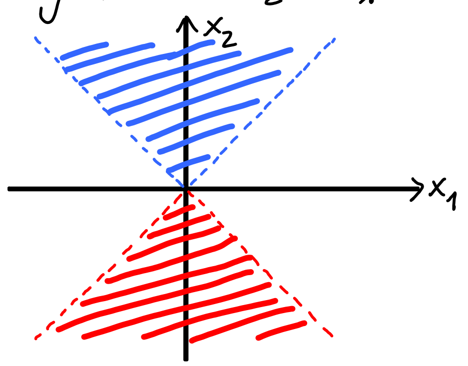
Bemerkung 3.1.3: Wichtig bei der Definition des Funktionsbegriffs ist die Forderung nach der Eindeutigkeit der Zuordnung.
Wir vereinbaren, dass der Definitionsbereich aus allen $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ bestehen soll, für die die Funktion berechnet werden kann, es sei denn, dass ein anderer Definitionsbereich durch die Aufgabenstellung vorgegeben ist.

Beispiel 3.1.3: In einem landwirtschaftlichen Betrieb hängt die Produktion, d.h. die Anzahl produzierter Einheiten vom investierten Kapital K, dem Arbeitseinsatz L und der verwendeten Anbaufläche T ab. Häufig wird ein solcher Zusammenhang durch eine Cobb-Douglas-Funktion, d.h. eine Funktion des Typs $Y = A \cdot K^a \cdot L^b \cdot T^c$ mit positiven Konstanten A, a, b, c beschrieben. Hier sind K, L, T die unabhängigen Variablen, Y ist die abhängige Variable. Der Definitionsbereich ist $\mathbb{D}_Y = \{(K, L, T) \in \mathbb{R}^3 : K \geq 0, L \geq 0, T \geq 0\}$.

Beispiel 3.1.4: Bestimmung des Definitionsbereiches von $f(x_1, x_2) = \ln(x_2^2 - x_1^2)$.
Da der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist, muss gelten: $x_2^2 - x_1^2 > 0 \iff x_2^2 > x_1^2$

$$\iff |x_2| > |x_1|$$

$$\iff x_2 > |x_1| \vee x_2 < -|x_1|$$



Affin-lineare Funktionen und Polynome

Definition 3.1.5: Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0$ mit beliebigen reellen Konstanten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ heißt affin-linear. Falls $a_0 = 0$ ist, heißt sie lineare Funktion.

Beispiel 3.1.6:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{\pi}\, x_1 - 2x_2 + \sqrt{3}\, x_3 - 7x_4 + 1$ ist affin-linear.

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - \sqrt{2}\, x_2 + 4 \cdot \sqrt{7}\, x_3 - \pi x_4$ ist linear.

Definition 3.1.7: Eine Summe von Ausdrücken der Form

$c \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ mit nichtnegativen, ganzzahligen Potenzen $k_1, k_2, \dots, k_n$ heißt Polynom. Der Grad des Polynoms ist die maximal vorkommende Summe der auftretenden Potenzen.

Beispiel 3.1.8: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^7 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_2 x_3$ ist Polynom vom Grad 10.

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\sqrt{2}\, x_1 + \sqrt{3}\, x_2 - \pi x_3 + x_4 - \pi$ ist Polynom vom Grad 1.

Niveaumengen

In den Grundvorlesungen zur Analysis von Funktionen mehrerer Variablen werden üblicherweise im Zusammenhang mit Visualisierungsmöglichkeiten von Funktionen mit zwei Variablen sogenannte Niveaulinien / Höhenlinien behandelt. Dies sind Linien, auf denen die Funktion einen konstanten Wert annimmt. In den Anwendungen haben diese häufig spezielle Namen wie Isokostenlinien, die die möglichen Kombinationen von Einsatzmengen zweier Produktionsfaktoren wie z. B. Kapital und Arbeitskraft darstellen, die die gleichen Kosten verursachen oder Isoquanten, die die möglichen Kombinationen zweier Produktionsfaktoren darstellen, die den gleichen Output erzeugen. Im Folgenden wollen wir die Begriffe allgemeiner fassen.

Definition 3.1.9: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $N(f,c) = \{\vec{x} \in D_f : f(\vec{x}) = c\}$ Niveaumenge,

$L(f,c) = \{\vec{x} \in D_f : f(\vec{x}) \leq c\}$ untere Niveaumenge und

$$U(f,c)=\{\vec{x}\in D_f : f(\vec{x})\geq c\} \text{ obere Niveaumenge}$$

der Funktion f zum Niveau c.

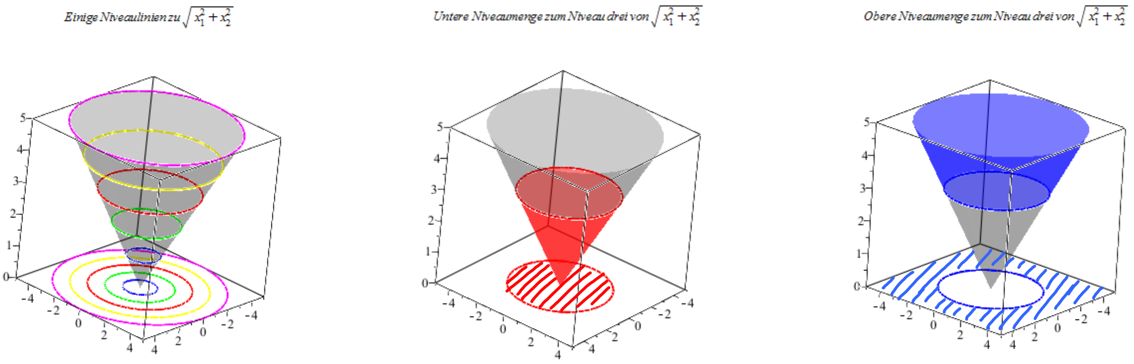
Beispiel 3.1.10: Sei $f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Da $x_1^2+x_2^2\geq 0$ für alle $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ und $\sqrt{x_1^2+x_2^2}\geq 0$, ist $D_f=\mathbb{R}^2$, $W_f=[0,\infty)$.

Zur Bestimmung der Niveaumengen zu einem Niveau c mit $c\geq 0$ sind diejenigen Wertepaare (x_1,x_2) zu bestimmen, für die

$$f(x_1,x_2)=c \iff \sqrt{x_1^2+x_2^2}=c \underset{\text{da } c\geq 0}{\iff} x_1^2+x_2^2=c^2$$

gilt. Die Niveaumengen beschreiben also Kreise um den Ursprung mit Radius c. Für $c\geq 0$ gilt also:

$$N(f,c)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2=c^2\}$$
$$L(f,c)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x_1^2+x_2^2\leq c^2\}$$
$$U(f,c)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : c^2\leq x_1^2+x_2^2\}$$

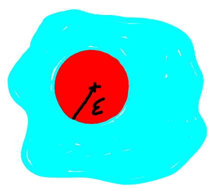


Abgeschlossene, offene, konvexe Mengen

Während bei Funktionen von einer Variablen häufig Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen betrachtet werden, die entweder abgeschlossen, offen oder halb-offen sind, ist die Situation bei mehreren Variablen häufig komplizierter. Wir stellen daher einige grundlegende Begriffe zur Verfügung.

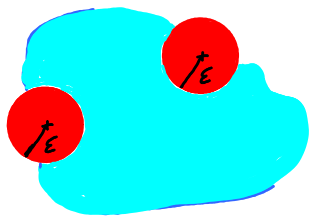
Definition 3.1.11: Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

1) Ein Punkt $(x_1^*,\dots,x_n^*)\in\mathbb{R}^n$ heißt innerer Punkt von S, wenn es ein $\varepsilon>0$ gibt, so dass alle Punkte von $U_\varepsilon(\vec{x}^*)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : |\vec{x}-\vec{x}^*|<\varepsilon\}$ in S liegen.

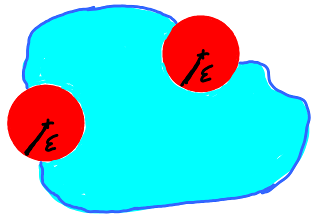


2) S heißt offen, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

3) Ein Punkt $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von S, wenn $U_\varepsilon(\vec{x}^*)$ für jedes $\varepsilon > 0$ sowohl Punkte von S als auch Punkte, die nicht zu S gehören, enthält.



4) S heißt abgeschlossen, wenn das Komplement von S in $\mathbb{R}^n$, d.h. $\mathbb{R}^n \setminus S$ offen ist. Das bedeutet, dass jeder Randpunkt von S zu S gehört.



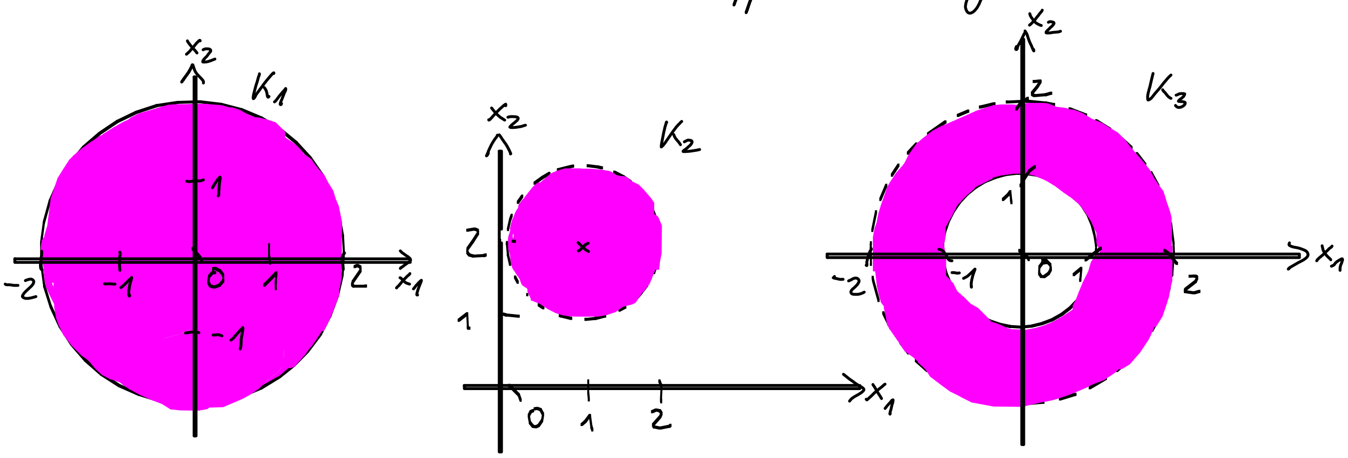
5) S heißt beschränkt, wenn es eine Kugel (hinreichend groß) gibt, die S enthält.

Beispiel 3.1.12:

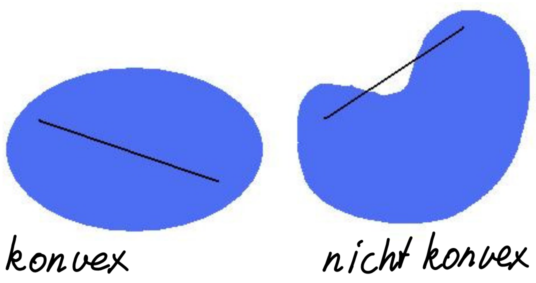
1) $K_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$ ist abgeschlossen.

2) $K_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 < 1\}$ ist offen.

3) $K_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.



Definition 3.1.13: Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in S$ und jedes $\lambda \in [0,1]$ gilt: $\lambda \vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in S$.

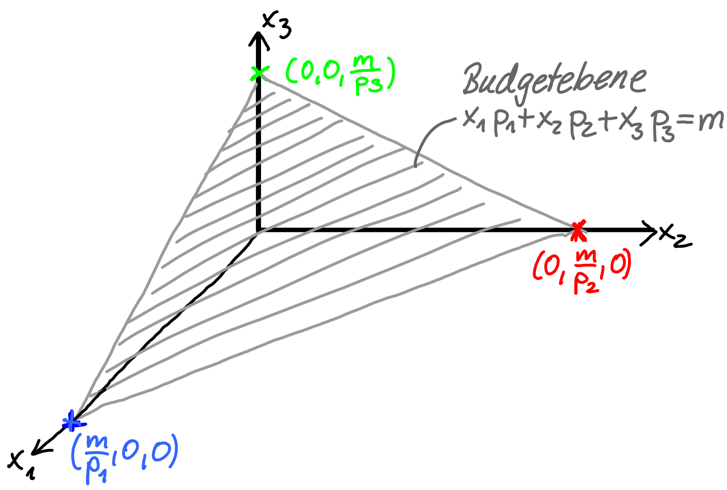


Anschaulich (im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) bedeutet Konvexität, dass mit je zwei Punkten der Menge S auch die komplette Verbindungsstrecke der beiden Punkte in S liegt.

In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall, egal ob abgeschlossen, offen oder halboffen, konvex.

Beispiel 3.1.14: Ein Verbraucher kauft Mengen x_1, x_2, x_3 von drei verschiedenen Gütern zu Preisen p_1, p_2, p_3 je Mengeneinheit. Dafür hat er ein Budget m zur Verfügung. Die Budgetmenge ist

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \leq m\}$$



Die Budgetmenge bildet anschaulich einen dreiminensionalen konvexen Körper, der durch die Koordinatenebenen und die Budgetebene begrenzt ist.

Grundlegende Begriffe der Differentialrechnung

In diesem Abschnitt werden grundlegende Begriffe wie Stetigkeit, partielle Ableitungen, Richtungsableitungen etc. für Funktionen mehrerer Variablen zusammengestellt.

Definition 3.1.15: $z^* \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $f(\vec{x})$ für $\vec{x}$ gegen $\vec{x}^*$, wenn für alle Folgen $\{x_{i,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ mit $(x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m}) \in \mathbb{D}_f$ und $\lim\limits_{m \to \infty} x_{i,m} = x_i^*$ gilt, dass $\lim\limits_{m \to \infty} f(x_{1,m}, \dots, x_{n,m}) = z^*$ ist.

Man schreibt dann $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^*} f(\vec{x}) = z^*$.

$f(\vec{x})$ heißt stetig im Punkt $\vec{x}^*$, wenn $\vec{x}^* \in \mathbb{D}_f$ und $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^*} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^*)$ gilt.

Beispiel 3.1.16: Wir betrachten die sogenannte Parabelfalte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} &, \ x_1 \neq 0 \lor x_2 \neq 0 \\[2ex] 0 &, \ x_1 = 0 \land x_2 = 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist hier die Stelle $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$ problematisch.

Wir untersuchen die Funktionswerte zu speziellen Linien im Definitionsbereich, die durch $(0,0)$ verlaufen. Speziell gilt:

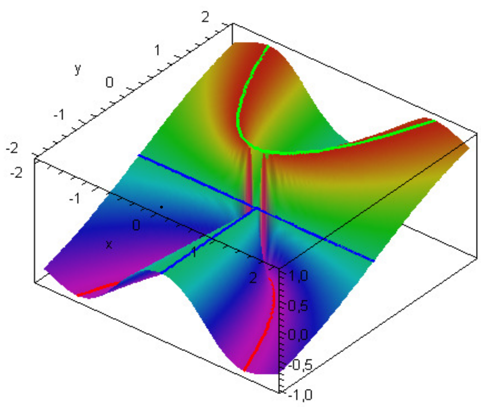
- für $x_1=0$: $f(0,x_2)=0$
- für $x_2=0$: $f(x_1,0)=0$
- für $x_2=x_1^2$ mit $x_1\neq 0$: $f(x_1,x_1^2)=\dfrac{2x_1^2\cdot x_1^2}{x_1^4+(x_1^2)^2}=1$
- für $x_2=-x_1^2$ mit $x_1\neq 0$: $f(x_1,-x_1^2)=\dfrac{2\cdot x_1^2\cdot(-x_1^2)}{x_1^4+(-x_1^2)^2}=-1$

Somit gilt z.B. $f(x_1,x_1^2)\longrightarrow 1$ für $x_1\rightarrow 0$

oder auch $f(x_1,-x_1^2)\longrightarrow -1$ für $x_1\rightarrow 0$

aber nach Definition der Funktion $f(0,0)=0$, d.h. die Funktion ist unstetig an der Stelle $(x_1^*,x_2^*)=(0,0)$.

Parabelfalte



Die Überlegungen zeigen auch, dass es im Allgemeinen nicht reicht, das Verhalten in Richtung der Koordinatenachsen zu überprüfen.

Die Bestimmung momentaner Änderungsraten bzgl. einer Variablen x_i bedeutet die Berechnung der partiellen Ableitung nach dieser Variablen. Dabei werden alle anderen Variablen als konstant betrachtet und nach x_i differenziert.

Definition 3.1.17: Sei $f: D_f\subseteq\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ und $\vec{x}^*\in D_f$.

1) f heißt an der Stelle $\vec{x}^*$ partiell nach x_i differenzierbar, wenn der Grenzwert
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}^*+h\cdot\vec{e}_i)-f(\vec{x}^*)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)}{h}$$
existiert. Der Grenzwert wird dann mit $f_{x_i}(\vec{x}^*)$ oder mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*)$ bezeichnet und heißt 1. partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle $\vec{x}^*$.
Ist f an jeder Stelle $\vec{x}\in D_f$ partiell nach x_i differenzierbar, so heißt f_{x_i} bzw. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ erste partielle Ableitung von f nach x_i.

2) Ist f an allen Stellen $\vec{x}\in D_f$ nach jeder Variablen x_i, $i=1,2,\dots,n$, partiell differenzierbar, so heißt die Funktion partiell differenzierbar. Sind zusätzlich die partiellen Ableitungen f_{x_i}, $i=1,2,\dots,n$, stetig, so heißt f stetig

partiell differenzierbar.

3) Partielle Ableitungen höherer Ordnung ergeben sich iterativ als partielle Ableitungen niedrigerer Ordung.

4) Mit $C^k(U)$, $k \geq 1$, bezeichnet man die Menge aller f, für die alle partiellen Ableitungen bis k-ter Ordnung existieren und stetig sind.

Regeln 3.1.18: Zusammenstellung der wichtigsten Ableitungsregeln.

1) Faktoren, die unabhängig von x_i sind, bleiben beim Differenzieren nach x_i erhalten.

2) Die partielle Ableitung einer Summe (Differenz) ist die Summe (Differenz) der partiellen Ableitungen

3) Produktregel: $\frac{\partial}{\partial x_i}\{u(\vec{x}) \cdot v(\vec{x})\} = u_{x_i}(\vec{x})\, v(\vec{x}) + u(\vec{x}) \cdot v_{x_i}(\vec{x})$

4) Quotientenregel: $\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{u(\vec{x})}{v(\vec{x})}\right\} = \frac{u_{x_i}(\vec{x})\, v(\vec{x}) - u(\vec{x})\, v_{x_i}(\vec{x})}{[v(\vec{x})]^2}$

5) Einfache Kettenregel: $f(\vec{x}) = u(v(\vec{x}))$, $v: \mathbb{D}_v \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u: \mathbb{D}_u \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_{x_i}(\vec{x}) = \underbrace{\frac{du}{dv}(v(\vec{x}))}_{\text{"Äußere Ableitung"}} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x_i}(\vec{x})}_{\text{"Innere Ableitung"}}$$

Beispiel 3.1.19: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot \ln(x_1 + x_2 x_3)$

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = x_2^3 \left\{2x_1 \cdot \ln(x_1 + x_2 x_3) + x_1^2 \cdot \frac{1}{x_1 + x_2 x_3}\right\}$$
$$= x_1 x_2^3 \left\{2 \ln(x_1 + x_2 x_3) + \frac{x_1}{x_1 + x_2 x_3}\right\}$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \left\{3x_2^2 \ln(x_1 + x_2 x_3) + x_2^3 \cdot \frac{1}{x_1 + x_2 x_3} \cdot x_3\right\}$$
$$= x_1^2 x_2^2 \left\{3 \ln(x_1 + x_2 x_3) + \frac{x_2 x_3}{x_1 + x_2 x_3}\right\}$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot \frac{1}{x_1 + x_2 x_3} \cdot x_2 = \frac{x_1^2 x_2^4}{x_1 + x_2 x_3}$$

In vielen Fällen kann bei partiellen Ableitungen höherer Ordnung die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen berechnet werden, vertauscht werden. Der folgende Satz gibt eine hinreichende Bedingung an, die für unsere Zwecke in der Regel erfüllt ist.

Satz von Schwarz 3.1.20: Bei einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetig sind.

Beispiel 3.1.21: $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x+y^2}$

$$f_x = \frac{x^2y+2xy^3}{(x+y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x^3-x^2y^2}{(x+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2y^5}{(x+y^2)^3}, \quad f_{xy} = \frac{x^3+3x^2y^2-2xy^4}{(x+y^2)^3} = f_{yx}, \quad f_{yy} = \frac{2x^2y^3-6x^3y}{(x+y^2)^3}$$

Partielle Ableitungen erster bzw. zweiter Ordnung werden häufig in einem Vektor bzw. in einer Matrix zusammengefasst.

Definition 3.1.22: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Dann ist der Gradient von f definiert durch

$$\nabla f(\vec{x}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{x}) \\ f_{x_2}(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

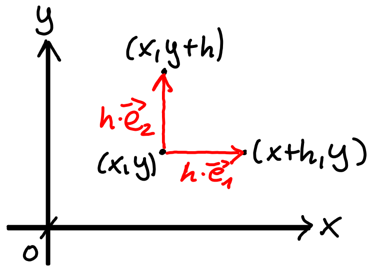
und die Hesse-Matrix von f durch

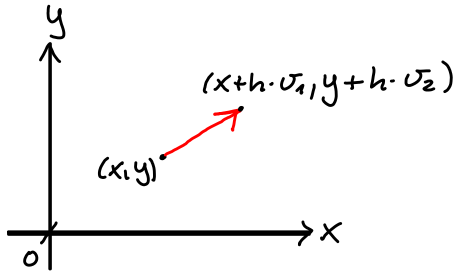
$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{x}) & f_{x_1x_2}(\vec{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\vec{x}) \\ f_{x_2x_1}(\vec{x}) & f_{x_2x_2}(\vec{x}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\vec{x}) & f_{x_nx_2}(\vec{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.1.23: $f(x,y) = \sin(xy)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ x\cos(xy) \end{pmatrix}, \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2\sin(xy) & -xy\sin(xy)+\cos(xy) \\ -xy\sin(xy)+\cos(xy) & -x^2\sin(xy) \end{pmatrix}$$

Während man bei partiellen Ableitungen momentane Änderungsraten in Richtung der Koordinatenachsen, d.h. in Richtung der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i = (0,\dots,0,\overset{i\text{-te Stelle}}{1},0,\dots,0)^T$ berechnet, werden im allgemeinen Fall der Richtungsableitung beliebige Richtungen betrachtet.





Definition 3.1.24: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{v}| = 1$. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v}$ definiert durch

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{v})-f(\vec{x})}{h} = \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}),$$ falls der Grenzwert existiert.

Wählt man speziell für $\vec{v}$ einen der kartesichen Einheitsvektoren $\vec{e}_i$, so erhält man die partiellen Ableitungen als spezielle Richtungsableitungen, d.h. $\partial_{\vec{e}_i} f(\vec{x}) = f_{x_i}(\vec{x})$.

Der folgende Satz ist für praktische Rechnungen von großer Bedeutung.

Satz 3.1.25: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{v}| = 1$. Dann gilt

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \langle \vec{v}, \nabla f(\vec{x}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \, f_{x_i}(\vec{x})$$

Beispiel 3.1.26: $f(x,y) = \ln(y^2 - x)$, $\vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Es gilt $|\vec{v}| = \frac{1}{5}\sqrt{16+9} = 1$.

Mit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y^2-x} \\ \frac{2y}{y^2-x} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2-x} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2y\end{pmatrix}$

ist
$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \left\langle \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{y^2-x}\begin{pmatrix}-1\\2y\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{6y-4}{5(y^2-x)}$$

An der Stelle $(x^*, y^*) = (-1,2)$ gilt z.B. $f_x(-1,2) = -\frac{1}{5}$, $f_y(-1,2) = \frac{4}{5}$, $\partial_{\vec{v}}(-1,2) = \frac{8}{25}$.

Der folgende Satz beinhaltet zwei wichtige Eigenschaften des Gradienten.

Satz 3.1.27: Sei $f \in C^1(A)$, A offene Menge, $\vec{x}^* \in A$ mit $\nabla f(\vec{x}^*) \neq \vec{0}$. Dann gilt:

1) $\nabla f(\vec{x}^*)$ bzw. $-\nabla f(\vec{x}^*)$ zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs bzw. Abstiegs von f.
2) $\nabla f(\vec{x}^*)$ ist orthogonal zu der Niveaumenge $N(f, f(\vec{x}^*)) = \{x \in D_f : f(\vec{x}) = f(\vec{x}^*)\}$.

III.2 Einführung zur Optimierung

Eine Optimierungsaufgabe besteht in der Minimierung bzw. Maximierung einer reellen Funktion, der Zielfunktion auf einer gegebenen Menge, der Menge zulässiger Punkte. Beispiele für solche Aufgabenstellungen sind:

- Produktionsplanung unter Beachtung von Maschinenkapazitäten, verfügbaren Arbeitskräften, etc., so dass der Gewinn maximal wird,
- Transport bestimmter Mengen eines Produktes von verschiedenen Produktions- und Lagerstätten zu verschiedenen Verbrauchern, so dass die Transportkosten minimal werden.

Zum Einstieg behandeln wir zunächst ein Beispiel, das sich geometrisch lösen lässt.

Beispiel 3.2.1: In einem landwirtschaftlichen Betrieb sollen Weizen und Kartoffeln produziert werden. Für 1 Morgen Anbaufläche benötigt man zur Erzeugung von

- Kartoffeln: 5 € Anbaukosten, 2h Arbeitszeit
- Weizen : 10 € Anbaukosten, 10h Arbeitszeit

Der Reingewinn für Kartoffeln beträgt 20€ pro Morgen, für Weizen 60 € pro Morgen. Für die Gesamtproduktion stehen 1200 Morgen, 7000 € und 5200 h Arbeitszeit zur Verfügung.

Die Produktion soll nun so gestaltet werden, dass der Reingewinn maximal wird.

Wir beschreiben die Aufgabenstellung zunächst durch ein mathematisches Modell. Dazu bezeichnen wir mit x_1 die Anbaufläche für Kartoffeln und mit x_2 die für Weizen.

Ziel ist es nun, die Zielfunktion (Gewinnfunktion)

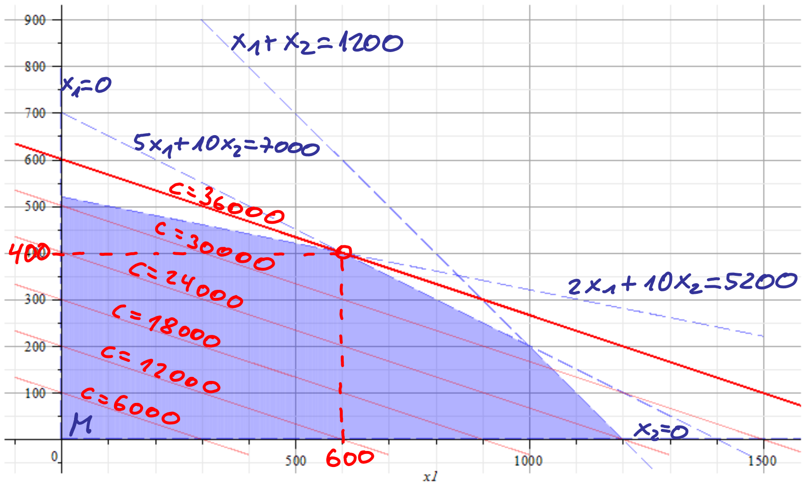
$$f(x_1, x_2) = 20x_1 + 60x_2$$

zu maximieren, so dass die Restriktionen (Nebenbedingungen)

$$x_1 + x_2 \leq 1200 \quad \text{(maximale Anbaufläche)}$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 7000 \quad \text{(maximale Anbaukosten)}$$
$$2x_1 + 10x_2 \leq 5200 \quad \text{(maximale Arbeitsstunden)}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

erfüllt sind. Die Restriktionen beschreiben die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ der zulässigen Punkte. M kann hier in der x_1x_2-Ebene dargestellt werden. Die Zielfunktion beschreibt hier eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Gesucht ist das Maximum über dem zulässigen Bereich M. Um dies geometrisch zu bestimmen, zeichnet man Niveaulinien $20x_1 + 60x_2 = c$ der Zielfunktion für verschiedene c. In diesem Beispiel sind dies parallele Geraden. Das Maximum der Zielfunktion wird da

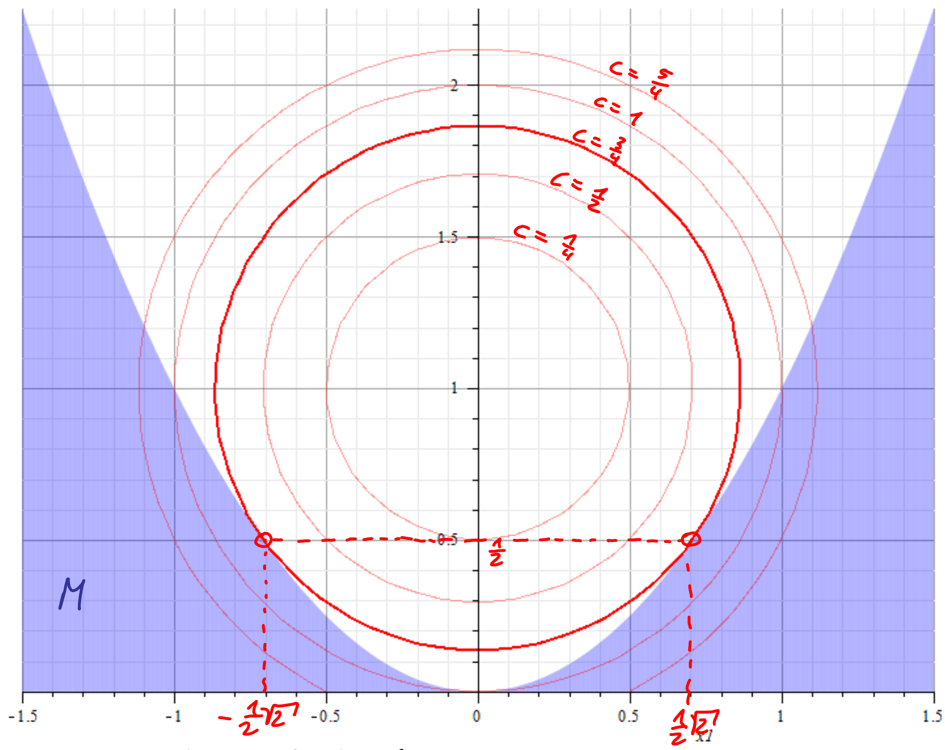
angenommen, wo die Niveaulinie mit maximal möglichem c, den zulässigen Bereich gerade noch berührt.
600 Morgen Kartoffeln und 400 Morgen Weizen ergeben also unter Einhaltung der Restriktionen einen maximalen Reingewinn von 36000 €.



Das folgende Beispiel lässt sich zwar noch anschaulich erklären, zeigt aber auch bereits, dass man allein mit graphischen Methoden nicht auskommt.

Beispiel 3.2.2: Wir suchen das Minimum von $f(x_1,x_2)=x_1^2+(x_2-1)^2$ unter den Restriktionen $x_2 \leq x_1^2$ und $x_2 \geq 0$.

Die Niveaulinien von f sind gegeben durch $x_1^2+(x_2-1)^2=c$, d.h. für $c>0$ Kreise um $(0,1)$ mit Radius $\sqrt{c}$! Mit wachsendem c wird f größer. Zu bestimmen ist also derjenige Kreis, der den zulässigen Bereich berührt. Das Minimum von f unter Einhaltung der Restriktionen wird also für



$x_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$ angenommen und beträgt $f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$.

Praktische Problemstellungen beinhalten oft eine Vielzahl von Variablen und Restriktionen, so dass man für die Lösungen entsprechende mathematische Methoden benötigt. Wir geben zunächst eine allgemeine mathematische Formulierung der Aufgabenstellung an.

Optimierungsaufgabe 3.2.3: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D_f offene Menge und $M \subseteq D_f$. Dann ist die Aufgabe:

$$(P)\begin{cases} \min f(\vec{x}), \\ \text{so dass } \vec{x} \in M. \end{cases}$$

Die Funktion f heißt Zielfunktion oder Kostenfunktion, M heißt zulässige Menge und die Elemente von M zulässige Punkte.

Ist $M = D_f$, so spricht man von einem unrestringierten Optimierungsproblem. Wird M durch Nebenbedingungen (in Form von Gleichungen oder Ungleichungen) definiert, so spricht man von einem restringierten Optimierungsproblem oder Optimierungsproblem mit Restriktionen (Nebenbedingungen).

Bemerkung 3.2.4: Es gibt natürlich auch Problemstellungen, in denen nicht Minima, sondern Maxima gesucht werden. Da dies aber äquivalent dazu ist, Minima von $g = -f$ zu bestimmen, werden häufig nur Minimierungsaufgaben betrachtet.

Wir legen nun fest, was unter lokalen bzw. globalen Minima zu verstehen ist.

Definition 3.2.5: $\vec{x}^* \in M$ heißt lokales Minimum von f auf M oder lokale Lösung von (P), falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^*) \quad \text{für alle } \vec{x} \in M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^*).$$

$\vec{x}^* \in M$ heißt striktes lokales Minimum von f auf M oder strikte lokale Lösung von (P), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(\vec{x}) > f(\vec{x}^*) \quad \text{für alle } \vec{x} \in M \cap U_\varepsilon(\vec{x}^*), \vec{x} \neq \vec{x}^*.$$

$\vec{x}^* \in M$ heißt globales Minimum von f auf M oder globale Lösung von (P), wenn

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^*) \quad \text{für alle } \vec{x} \in M.$$

$\vec{x}^* \in M$ heißt striktes globales Minimum von f auf M oder strikte globale Lösung von (P), wenn

$$f(\vec{x}) > f(\vec{x}^*) \quad \text{für alle } \vec{x} \in M, \vec{x} \neq \vec{x}^*.$$

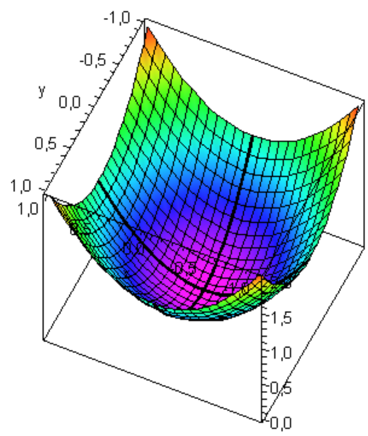
$f(\vec{x}^*)$ heißt Optimalwert, wenn $\vec{x}^*$ lokale oder globale Lösung von (P) ist.

III.3 Unrestringierte Optimierung

In diesem Kapitel betrachten wir Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen und beschäftigen uns mit Fragen der Existenz von Minima, sowie mit notwendigen und hinreichenden Kriterien unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Zielfunktion f. Zum Teil handelt es sich dabei um Verallgemeinerungen von Funktionen mit 2 Variablen auf Funktionen mehrerer Variablen.

Anschaulich ist zunächst klar, dass bei einer differenzierbaren Funktion einer Variablen die Tangente an die Kurve an einem Minimum im Inneren des Definitionsbereichs parallel zur x_1-Achse verläuft.

Ebenso ist die Tangentialebene an einem Minimum im Inneren des Definitionsbereichs einer Funktion von zwei Variablen parallel zur x_1x_2-Ebene. Das bedeutet, dass dort insbesondere die partiellen Ableitungen (Steigungen in Richtung der Koordinatenachsen) Null sein müssen.



Dieser Sachverhalt gilt analog auch für Funktionen von n Variablen, die momentanen Änderungsraten müssen notwendigerweise für jede Variable Null sein, wenn ein Minimum vorliegen soll.

Satz 3.3.1 : Notwendige Bedingung 1. Ordnung

Sei $f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}^* \in D$, $D \subseteq \mathbb{D}_f$ offen und f in $\vec{x}^*$ differenzierbar. Besitzt f an der Stelle $\vec{x}^*$ ein lokales Minimum, dann gilt

$$\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}.$$

Durch Bestimmung aller $\vec{x}^*$, für die $\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$ gilt, erhält man also alle möglichen Kandidaten im Inneren von $\mathbb{D}_f$ für Minimal-, bzw. allgemeiner Extremalstellen. Punkte $\vec{x}^*$ mit $\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$ heißen auch stationäre Punkte. Man spricht von notwendiger Bedingung 1. Ordnung, weil partielle Ableitungen erster Ordnung betrachtet werden.

Beispiel 3.3.2 : Wir bestimmen die stationären Punkte von

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5$$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 2 \\ 4x_2 + 2x_1 - 2x_3 + 2 \\ 4x_3 - 2x_2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & -1 \\ -x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{array} \right\}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem. Die eindeutig bestimmte Lösung ist $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$. Die Funktion besitzt also nur einen stationären Punkt, nämlich $P(3,-2,0)$. Ob f dort ein Minimum besitzt, ist ohne weitere Untersuchungen nicht zu entscheiden.

Besitzt eine Funktion einer Variablen an einer Stelle eine waagerechte Tangente und ist die Funktion in einem Bereich um diese Stelle strikt konvex, so liegt ein Minimum vor. Auch die dick eingezeichneten Kurven im Bild auf S. 14, die durch das Minimum verlaufen sind strikt konvex. Offenbar spielt die Konvexität im Zusammenhang mit der Untersuchung von Minimalstellen eine wichtige Rolle. Wir werden daher zunächst die Definition auf Funktionen von n Variablen verallgemeinern und Kriterien angeben, falls die Funktion geeignete Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt.

Definition 3.3.3: Sei f definiert auf einer konvexen Menge S. Dann heißt f

1) $\left\{\begin{matrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{matrix}\right\}$ auf S, wenn $f(\lambda\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y}) \left\{\begin{matrix}\leq\\ \geq\end{matrix}\right\} \lambda f(\vec{x})+(1-\lambda)f(\vec{y})$

für alle $\vec{x},\vec{y}\in S$ und $\lambda\in[0,1]$,

2) $\left\{\begin{matrix}\text{strikt konvex}\\ \text{strikt konkav}\end{matrix}\right\}$ auf S, wenn $f(\lambda\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y}) \left\{\begin{matrix}<\\ >\end{matrix}\right\} \lambda f(\vec{x})+(1-\lambda)f(\vec{y})$

für alle $\vec{x},\vec{y}\in S$ mit $\vec{x}\neq\vec{y}$ und $\lambda\in(0,1)$,

Für Funktionen von einer bzw. zwei Variablen bedeutet strikte Konvexität anschaulich, dass die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen verschiedenen Punkten stets oberhalb des Funktionsgraphen verläuft.

Beispiel 3.3.4: Wir zeigen, dass die Funktion $f(x)=x^2-1$ auf der konvexen Menge $S=D_f=\mathbb{R}$ strikt konvex ist.

$$
\begin{aligned}
(*)\quad & f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\\
\Leftrightarrow\quad & [\lambda x+(1-\lambda)y]^2-1 < \lambda[x^2-1]+(1-\lambda)[y^2-1]\\
\Leftrightarrow\quad & \lambda^2x^2+2\lambda(1-\lambda)xy+(1-\lambda)^2y^2-1 < \lambda x^2-\lambda+(1-\lambda)y^2-(1-\lambda)\\
\Leftrightarrow\quad & 0 < \underbrace{[\lambda-\lambda^2]}_{=\lambda(1-\lambda)}x^2-2\lambda(1-\lambda)xy+\underbrace{[(1-\lambda)-(1-\lambda)^2]}_{=(1-\lambda)[1-(1-\lambda)]=\lambda(1-\lambda)}y^2\\
\Leftrightarrow\quad & 0 < \lambda(1-\lambda)(x-y)^2
\end{aligned}
$$

Da $\lambda(1-\lambda)>0$ für jedes $\lambda\in(0,1)$ und $(x-y)^2>0$ für $x\neq y$, ist die Ungleichung $(*)$ für alle $\lambda\in(0,1)$, $x,y\in\mathbb{R}$ mit $x\neq y$ erfüllt. Also ist f strikt konvex auf $\mathbb{R}$.

Das Beispiel zeigt, dass das Nachprüfen der Konvexität an Hand der Definition schon bei einfachen Funktionen aufwändig ist. Im Falle geeigneter Differenzierbarkeitseigenschaften gibt es einfachere Kriterien. Bei einer Funktion einer Variablen wissen wir, dass sie strikt konvex ist, wenn ihre zweite Ableitung positiv ist. Bei Funktionen mehrerer Variablen wird die Rolle der zweiten Ableitung von der Hesse-Matrix übernommen.

Aus der positiven (negativen) Definitheit der Hesse-Matrix folgt, dass die Funktion strikt konvex (konkav) ist.

Satz 3.3.5: Sei f eine C^2-Funktion auf einer offenen, konvexen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\vec{x}^* \in S$ ein stationärer Punkt von f. Dann gilt:

Ist die Hessematrix von f an der Stelle $\vec{x}^*$ ($H_f(\vec{x}^*)$) positiv definit, dann besitzt f an der Stelle $\vec{x}^*$ ein striktes lokales Minimum.

Ist die Hessematrix von f an der Stelle $\vec{x}^*$ negativ definit, dann besitzt f an der Stelle $\vec{x}^*$ ein striktes lokales Maximum.

Zur Überprüfung der positiven Definitheit dient das Hurwitz-Kriterium (vgl. auch Definition 1.4.11)

Satz 3.3.6: Seien D_r, $r = 1, 2, \dots, n$, die führenden Hauptminoren einer symmetrischen $n \times n$-Matrix A. Dann gilt:

A positiv definit $\iff D_r > 0$ für alle $r = 1, 2, \dots, n$

A negativ definit $\iff (-1)^r D_r > 0$ für alle $r = 1, 2, \dots, n$

Beispiel 3.3.7: $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^3 + x_1^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - x_2$

Wir bestimmen zunächst die stationären Punkte.

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 3x_2^2 - 2x_1 - 1 \\ 6x_3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} 1)\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2)\ 3x_2^2 - 2x_1 - 1 = 0 \\ 3)\ 6x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

3) liefert: $x_3 = 0$ 1) liefert: $x_1 = x_2$

$x_1 = x_2$ in 2) liefert: $3x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0 \iff x_1^2 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3} = 0$

$$\iff x_1 = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}}$$

$$\iff x_1 = -\frac{1}{3} \vee x_1 = 1$$

Die stationären Punkte sind also: $P(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$, $Q(1, 1, 0)$.

Die Hesse-Matrix ist gegeben durch $-\cancel{6}^{2}\frac{1}{3}$

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad H_f(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad H_f(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Da $2>0$, $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$ ist $H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ weder positiv noch negativ definit. Satz 3.3.5 liefert also keine Aussage.

Da $2>0$, $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 > 0$, ist $H_f(1,1,0)$ nach Satz 3.3.6 positiv definit. Nach Satz 3.3.5 besitzt f an der Stelle $(1,1,0)$ ein lokales Minimum $f(1,1,0) = -1$.

Bei den hinreichenden Bedingungen haben wir gesehen, dass das Konvexitätsverhalten eine wichtige Rolle spielt. Wir untersuchen daher im Folgenden das Verhalten konvexer (konkaver) Funktionen.

Satz 3.3.8: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D_f konvex, eine C^2-Funktion. Dann gilt:

1) $H_f(\vec{x})$ positiv semidefinit für alle $\vec{x} \in D_f \iff f$ konvex
2) $H_f(\vec{x})$ positiv definit für alle $\vec{x} \in D_f \implies f$ strikt konvex
3) $H_f(\vec{x})$ negativ semidefinit für alle $\vec{x} \in D_f \iff f$ konkav
4) $H_f(\vec{x})$ negativ definit für alle $\vec{x} \in D_f \implies f$ strikt konkav

Wir ergänzen Satz 3.3.6 noch um Kriterien für Semidefinitheit.

Satz 3.3.9: Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann gilt:

A positiv semidefinit $\iff \tilde{D}_r \geq 0$ für alle Hauptminoren $\tilde{D}_r$ von A und alle $r = 1, 2, \dots, n$

A negativ semidefinit $\iff (-1)^r \tilde{D}_r \geq 0$ für alle Hauptminoren $\tilde{D}_r$ von A und alle $r = 1, 2, \dots, n$

Der Vorteil konvexer (konkaver) Funktionen zeigt sich in dem folgenden Satz.

Satz 3.3.10: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D_f konvex. Dann gilt:

1) Ist f konvex, dann ist jedes lokale Minimum von f globales Minimum.
2) Ist f konkav, dann ist jedes lokale Maximum von f globales Maximum.
3) Ist f strikt konvex und besitzt f ein Minimum, dann ist dies ein striktes globales Minimum und eindeutig bestimmt.
4) Ist f strikt konkav und besitzt f ein Maximum, dann ist dies ein striktes globales Maximum und eindeutig bestimmt.

Im Folgenden betrachten wir nun einige Beispiele mit anwendungsorientiertem Hintergrund.

Beispiel 3.3.11: Ein Unternehmen verkauft ein Produkt auf zwei verschiedenen Märkten 1 und 2 zu Preisen P_1 und P_2, wobei $P_1 = a_1 - b_1 Q_1$, $P_2 = a_2 - b_2 Q_2$ mit Konstanten $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ sein soll und Q_1, Q_2 die nachgefragten Mengen bezeichnen. Als einfaches Modell für die Kosten betrachten wir die Funktion $K(Q_1, Q_2) = \alpha(Q_1 + Q_2)$, $\alpha > 0$.

Der Gesamtgewinn beträgt dann:

$$\begin{aligned} G(Q_1, Q_2) &= P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - \alpha(Q_1 + Q_2) \\ &= (a_1 - b_1 Q_1) Q_1 + (a_2 - b_2 Q_2) Q_2 - \alpha(Q_1 + Q_2) \end{aligned}$$

Ziel ist es, diejenigen Werte für $Q_1, Q_2 > 0$ zu bestimmen, für die die Gewinnfunktion maximal wird. Dies ist äquivalent dazu, $Q_1, Q_2 > 0$ zu bestimmen, für die $f(Q_1, Q_2) = -G(Q_1, Q_2)$ minimal wird.

Dabei ist $\mathbb{D}_f = \{(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2 : Q_1 > 0 \wedge Q_2 > 0\}$ eine konvexe Menge.

Als notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ermitteln wir:

$$\operatorname{grad} f(Q_1, Q_2) = \begin{pmatrix} 2b_1 Q_1 - a_1 + \alpha \\ 2b_2 Q_2 - a_2 + \alpha \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 2b_1 & 0 \\ 0 & 2b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \alpha \\ a_2 - \alpha \end{pmatrix}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung dieses linearen Gleichungssystems und somit einziger Kandidat für eine lokale Extremalstelle ist:

$$(Q_1^*, Q_2^*) = \left(\frac{a_1 - \alpha}{2b_1}, \frac{a_2 - \alpha}{2b_2} \right), \text{ falls } a_1 > \alpha \text{ und } a_2 > \alpha.$$

Weiter ist $H_f(Q_1, Q_2) = \begin{pmatrix} 2b_1 & 0 \\ 0 & 2b_2 \end{pmatrix}$, d.h. $f_{Q_1 Q_1}(Q_1, Q_2) = 2b_1 > 0$ und

$\Delta_f(Q_1, Q_2) = 4b_1^2 > 0$. Nach dem Hurwitz-Kriterium ist die Hesse-Matrix positiv definit, d.h. f strikt konvex auf $\mathbb{D}_f$.

Insgesamt besitzt somit f an der Stelle (Q_1^*, Q_2^*) ein eindeutig bestimmtes globales Minimum.

$$f(Q_1^*, Q_2^*) = (b_1 Q_1^* - a_1 + \alpha) Q_1^* + (b_2 Q_2^* - a_2 + \alpha) Q_2^*$$
$$= \left(\frac{a_1-\alpha}{2} - a_1 + \alpha\right) \cdot \frac{a_1-\alpha}{2b_1} + \left(\frac{a_2-\alpha}{2} - a_2 + \alpha\right) \cdot \frac{a_2-\alpha}{2b_2}$$
$$= -\frac{(a_1-\alpha)^2}{4b_1} - \frac{(a_2-\alpha)^2}{4b_2}$$

Der maximal mögliche Gewinn beträgt somit

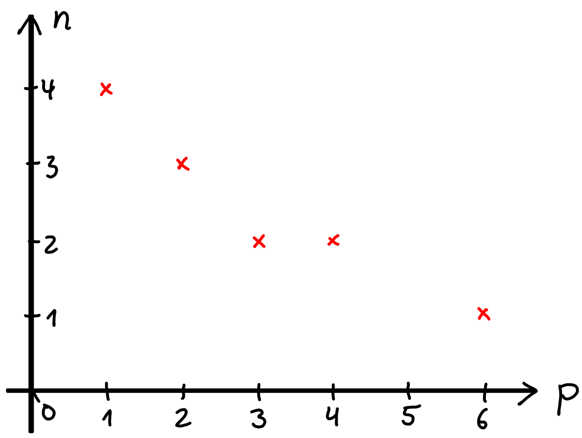
$$G(Q_1^*, Q_2^*) = -f(Q_1^*, Q_2^*) = \frac{(a_1-\alpha)^2}{4b_1} + \frac{(a_2-\alpha)^2}{4b_2}$$

für die Mengen $Q_1^* = \frac{a_1-\alpha}{2b_1}$, $Q_2^* = \frac{a_2-\alpha}{2b_2}$ zu den Preisen $P_1^* = \frac{a_1+\alpha}{2}$, $P_2^* = \frac{a_2+\alpha}{2}$.

Eine wichtige Anwendung im Zusammenhang mit diesem Abschnitt ist die lineare Regression, von der Sie vielleicht im Bereich Statistik schon einmal gehört haben. Bevor wir uns einer allgemeinen Lösung der Problemstellung zuwenden, betrachten wir die Aufgabenstellung und mögliche Lösungsansätze an einem Beispiel.

Beispiel 3.3.12: Eine Marktanalyse hat folgende Daten $(p_i; d_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, für die Nachfrage nach einem Produkt in Abhängigkeit vom Preis ergeben.

i	1	2	3	4	5
p_i	1	2	3	4	6
d_i	4	3	2	2	1



Die Skizze legt die Vermutung nahe, dass sich die Nachfrage in Abhängigkeit vom Preis durch eine affin-lineare Funktion der Form $D(p) = \alpha + \beta \cdot p$ beschreiben lässt. Nun liegen aber offensichtlich nicht alle Punkte auf ein und derselben Geraden. Da es sich um Messdaten handelt, die in der Regel nicht exakt sondern fehlerbehaftet sind, kann man dies auch nicht erwarten. Man versucht daher, eine Gerade so zu bestimmen, dass die Abweichungen zu den Messdaten "möglichst gering" ausfallen. Ein gängiges Kriterium für Optimalität (eine möglichst gute Gerade) ist die Minimierung der Summe der Fehlerquadrate. Man sucht also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $f(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{5} (D(p_i) - d_i)^2 = \sum_{i=1}^{5} (\alpha + \beta p_i - d_i)^2$ minimal wird.

Zunächst gilt: $f_\alpha(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{5} 2(\alpha + \beta p_i - d_i)$, $f_\beta(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{5} 2p_i(\alpha+\beta p_i - d_i)$,
d.h. nach Einsetzen der Daten aus der Tabelle

$$f_\alpha(\alpha,\beta) = 2(\alpha+\beta-4) + 2(\alpha+2\beta-3) + 2(\alpha+3\beta-2) + 2(\alpha+4\beta-2) + 2(\alpha+6\beta-1)$$
$$= 2(5\alpha + 16\beta - 12)$$

$$f_\beta(\alpha,\beta) = 2(\alpha+\beta-4) + 4(\alpha+2\beta-3) + 6(\alpha+3\beta-2) + 8(\alpha+4\beta-2) + 12(\alpha+6\beta-1)$$
$$= 2(16\alpha + 66\beta - 30)$$

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ist somit:

$$\operatorname{grad} f(\alpha,\beta) = \vec{0} \iff \left\{\begin{matrix} 5\alpha + 16\beta - 12 = 0 \\ 16\alpha + 66\beta - 30 = 0 \end{matrix}\right\} \iff \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 16 & 66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \end{pmatrix}$$

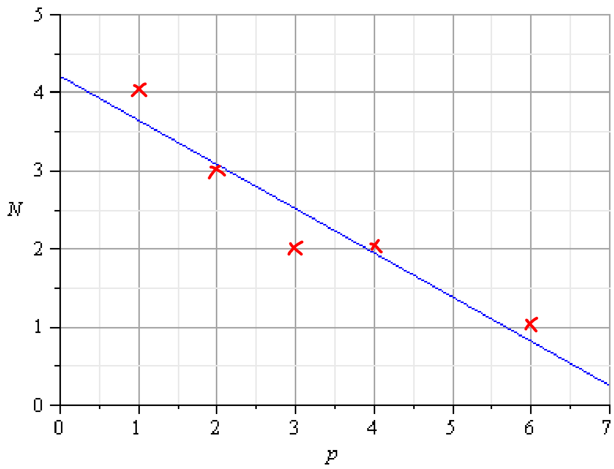
Die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems ist $\alpha^* = \frac{156}{37}$, $\beta^* = -\frac{21}{37}$

Weiter gilt:
$$H_f(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 10 & 32 \\ 32 & 132 \end{pmatrix}, \quad \Delta_f(\alpha,\beta) = 296 > 0.$$

Da außerdem $f_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) = 10 > 0$, folgt, dass f strikt konvex ist auf der konvexen Menge $D_f = \mathbb{R}^2$. f nimmt also an der eindeutig bestimmten Stelle (α^*, β^*) sein globales Minimum an.

Die affin-lineare Funktion, die die Summe der Fehlerquadrate minimiert, ist also eindeutig bestimmt durch

$$D(p) = \frac{156}{37} - \frac{21}{37}p.$$



Lineare Regression 3.3.13: Den Vorgang der Minimierung der Summe der Fehlerquadrate bei der Approximation von Messdaten durch eine affin-lineare Funktion bezeichnet man mit linearer Regression oder auch allgemeiner mit Approximation im quadratischen Mittel.

Um nun ein allgemeines Konzept entwickeln zu können, benötigen wir einige Notationen.

Gegeben seien m Messdaten (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, m$. Der funktionale Zusammenhang zwischen den x- und y-Werten soll durch eine affin-lineare Funktion $Y(x) = \alpha + \beta x$ so beschrieben werden, dass die Summe der Fehlerquadrate $f(\alpha, \beta)$ minimal wird. Es ist

$$f(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{m} (Y(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (\alpha + \beta x_i - y_i)^2$$

Die ersten partiellen Ableitungen sind:

$$f_\alpha(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{m} 2(\alpha + \beta x_i - y_i) = 2\left(m\alpha + \beta \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} y_i\right)$$

$$f_\beta(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{m} 2(\alpha + \beta x_i - y_i)\cdot x_i = 2\left(\alpha \sum_{i=1}^{m} x_i + \beta \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right)$$

Unter Verwendung der in der Statistik üblichen Abkürzungen $\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$ für die Mittelwerte ergibt sich daraus:

$$f_\alpha(\alpha,\beta) = 2(m\alpha + m\beta\bar{x} - m\bar{y}), \quad f_\beta(\alpha,\beta) = 2\left(m\alpha\bar{x} + \beta\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right)$$

Die notwendige Bedingung $\operatorname{grad} f(\alpha,\beta) = \vec{0}$ führt also auf das lineare Gleichungssystem:

1) $\alpha + \beta\bar{x} = \bar{y}$

2) $\alpha m\bar{x} + \beta\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$

mit der eindeutig bestimmten Lösung

$$\alpha^* = \frac{\bar{y}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{m} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2}, \quad \beta^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - m\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2}$$

Für die Hesse-Matrix von f gilt:

$$H_f(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}2m & 2m\bar{x}\\ 2m\bar{x} & 2\sum_{i=1}^m x_i^2\end{pmatrix},\quad \Delta_f(\alpha,\beta)=4m\left\{\sum_{i=1}^m x_i^2-m\bar{x}^2\right\}$$

Um eine Aussage über das Vorzeichen von $\Delta_f(\alpha,\beta)$ machen zu können, zeigen wir, dass der Ausdruck in der geschweiften Klammer mit $\sum_{i=1}^m (x_i-\bar{x})^2$ übereinstimmt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m (x_i-\bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^m\left(x_i^2-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^m x_i^2-2\bar{x}\underbrace{\sum_{i=1}^m x_i}_{=m\cdot\bar{x}}+\bar{x}^2\underbrace{\sum_{i=1}^m 1}_{=m}\\ &= \sum_{i=1}^m x_i^2-2m\bar{x}^2+m\bar{x}^2=\sum_{i=1}^m x_i^2-m\bar{x}^2.\end{aligned}$$

Also gilt $\Delta_f(\alpha,\beta)=4m\sum_{i=1}^m (x_i-\bar{x})^2$. Die Determinante der Hesse-Matrix ist somit genau dann größer als Null, wenn mindestens zwei der x_i verschieden sind. Für den praktischen Gebrauch kann man dies aber ohne Einschränkung voraussetzen. (Überlegen Sie einmal selbst, wie Messdaten (x_i,y_i) im $\mathbb{R}^2$ verteilt wären, bei denen alle x_i gleich sind!).
Da außerdem $f_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)=2m>0$ ist, ist insgesamt die Hesse-Matrix für alle $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ positiv definit. Also ist f strikt konvex auf ihrem konvexen Definitionsbereich $D_f=\mathbb{R}^2$. f nimmt somit für die oben angegebenen α^*,β^* ihr globales Minimum an.

Bemerkung 3.3.14: Durch Einführung weiterer Größen aus der Statistik lassen sich α^*,β^* in kürzerer Form angeben.
Wir bezeichnen mit

$$s_x^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (x_i-\bar{x})^2,\; s_y^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (y_i-\bar{y})^2,\; s_{xy}=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}),\; r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

die Schätzwerte für die Varianzen, die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten. Dann gilt: $\alpha^*=\bar{y}-r\cdot\frac{s_y}{s_x}\cdot\bar{x}$, $\beta^*=r\cdot\frac{s_y}{s_x}$

Zusammengefasst haben wir also folgende Ergebnisse:

Sind (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, m$ Messdaten, wobei mindestens zwei der x_i verschieden sein sollen. Dann ist die lineare Regressionsgerade eindeutig bestimmt und gegeben durch die Gleichung

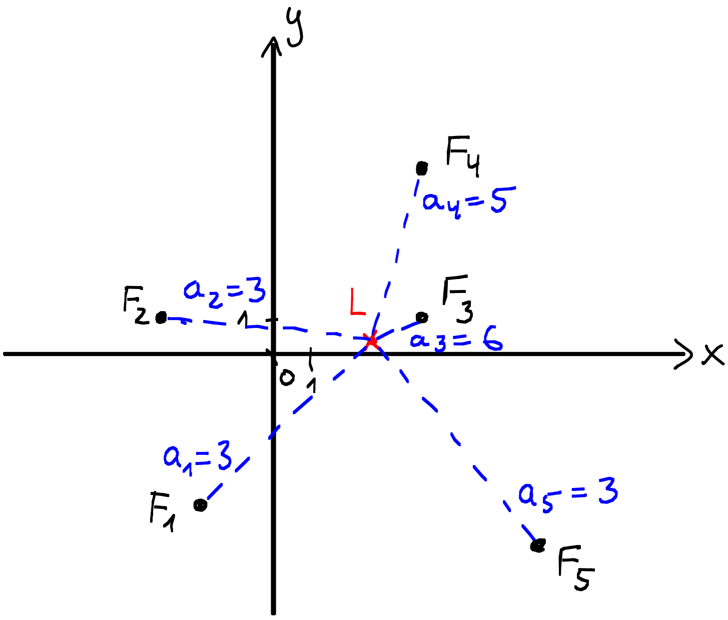
$$y(x) = \left(\bar{y} - r \cdot \frac{s_y}{s_x} \cdot \bar{x}\right) + r \cdot \frac{s_y}{s_x} \cdot x$$

Nach den obigen Erläuterungen braucht man zur Bestimmung der Koeffizienten der Regressionsgeraden nur das lineare Gleichungssystem zu lösen, das sich aus den notwendigen Bedingungen ergibt.

Beispiel 3.3.15: Standortoptimierung

Ein Unternehmen hat 5 Produktionsstätten F_i an verschiedenen Orten, deren Lage durch die Koordinaten x_i und y_i gegeben sind als:

i	1	2	3	4	5
(x_i, y_i)	$(-2, -4)$	$(-3, 1)$	$(4, 1)$	$(4, 5)$	$(7, -5)$



Es wird nun nach einem optimalen Standort (x, y) für ein Ersatzteillager L gesucht. Die zu erwartenden Mengen, die pro Planungsperiode an die Produktionsstätten F_i auszuliefern sind, sind gegeben durch:

$a_1 = a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 5$, $a_5 = 3$

Wir gehen davon aus, dass die Transportkosten von L zu F_i linear mit der Transportmenge a_i und quadratisch mit der Entfernung

$d_i = \left\| \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ zwischen L und F_i zunehmen, d.h.

wir nehmen an, dass die Transportkosten durch

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{5} a_i d_i^2 = \sum_{i=1}^{5} a_i \{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\}$$

gegeben sind. Der optimale Standort (x,y) ist nun so zu bestimmen, dass die Fahrtkosten minimal werden.

Als notwendige Bedingungen erhalten wir:

$$f_x(x,y) = \sum_{i=1}^{5} 2a_i(x-x_i) = 0 \iff x = \frac{\sum_{i=1}^{5} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} a_i} = 2.5$$

$$f_y(x,y) = \sum_{i=1}^{5} 2a_i(y-y_i) = 0 \iff y = \frac{\sum_{i=1}^{5} a_i y_i}{\sum_{i=1}^{5} a_i} = 0.35$$

Für die Hesse-Matrix erhalten wir

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sum_{i=1}^{5} a_i & 0 \\ 0 & 2\sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}.$$

Mit $f_{xx}(x,y) = 20 > 0$ und $\Delta_f(x,y) = 1600 > 0$ schließen wir, dass f strikt konvex ist auf der konvexen Menge $\mathbb{R}^2$.

Die Koordinaten für den optimalen Lagerstandort sind somit $(x^*, y^*) = (2.5, 0.35)$.

Hängen die Transportkosten nicht quadratisch, sondern linear von der Entfernung ab, lässt sich leider aus den notwendigen Bedingungen keine explizite Darstellung für x^* und y^* ablesen. Für solche Probleme werden dann iterative Verfahren verwendet, die z.B. die Lösung des oben betrachteten quadratischen Problems als Startnäherung verwenden.

III.4 Optimierung mit Gleichungsrestriktionen

Das in 3.2.3 allgemein gestellte Optimierungsproblem behandeln wir in diesem Abschnitt in der speziellen Form, dass die Nebenbedingungen (Beschreibung der Menge M der zulässigen Punkte) in Form von Gleichungen für die Variablen gegeben sind, d.h. wir behandeln die Aufgabe

$$\min f(\vec{x}),$$

so dass $g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0 \quad (m < n)$

Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Bevor wir dieses Verfahren allgemein angeben, wollen wir an einem Beispiel anschaulich erläutern, worauf dieses Verfahren beruht.

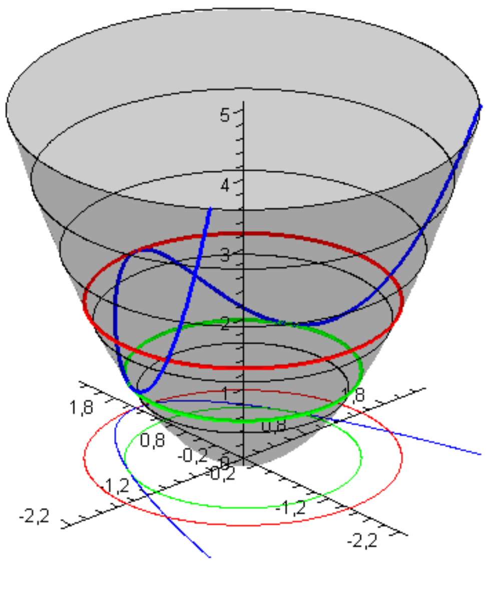
Beispiel 3.4.1: Wir betrachten das Problem

$$\min f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

so dass $g(x_1,x_2) = x_2 + x_1^2 - \frac{3}{2} = 0$

zunächst an Hand einer Graphik.

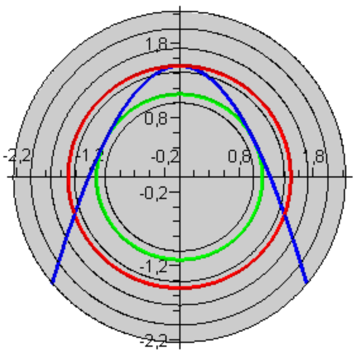
Die Funktion f beschreibt die grau schattierte Fläche im $\mathbb{R}^3$.



Extrema mit Restriktionenen

Zur Verdeutlichung sind einige Niveaulinien von f schwarz eingezeichnet. Durch $g(x_1,x_2)=0$ wird die in der x_1x_2-Ebene eingezeichnete blaue Parabel (die Menge der zulässigen Punkte) beschrieben. Schränkt man f auf diejenigen (x_1,x_2) ein, die die Restriktion erfüllen, so erhält man die auf der Fläche in blau hervorgehobene Kurve. Längs dieser Kurve sollen nun lokale Extrema bestimmt werden. Die lokalen Minima und das lokale Maximum sind in der Graphik deutlich zu erkennen. Die zugehörigen Niveaulinien sind auf der Fläche und in der x_1x_2-Ebene in grün bzw. in rot dargestellt. Man sieht, dass die blaue Kurve auf der Fläche die rote bzw. die grüne Niveaulinie berührt.

Wir betrachten die Situation in der x_1x_2-Ebene noch einmal genauer.



Extrema mit Restriktionenen

Die Restriktionskurve und die zu den lokalen Extremalstellen gehörenden Niveaulinien berühren sich an den lokalen Extremalstellen. Anders ausgedrückt, haben diese Niveaulinien und die Restriktionskurve an den Extremalstellen jeweils dieselbe Steigung.

Setzt man die Steigungen der implizit gegebenen Kuren $f(x_1,x_2)=c$ und $g(x_1,x_2)=0$ gleich so erhält man:

(Steigung Niveaulinie) $-\dfrac{f_{x_1}(x_1,x_2)}{f_{x_2}(x_1,x_2)} = -\dfrac{g_{x_1}(x_1,x_2)}{g_{x_2}(x_1,x_2)}$ (Steigung Restriktion),

bzw. anders aufgeschrieben

$$-\frac{f_{x_1}(x_1,x_2)}{g_{x_1}(x_1,x_2)} = -\frac{f_{x_2}(x_1,x_2)}{g_{x_2}(x_1,x_2)}.$$

Diese Gleichheit kann man nun auch so beschreiben, dass für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ die beiden Gleichungen

$$-\frac{f_{x_1}(x_1,x_2)}{g_{x_1}(x_1,x_2)} = \lambda \quad \text{und} \quad -\frac{f_{x_2}(x_1,x_2)}{g_{x_2}(x_1,x_2)} = \lambda$$

bzw. anders ausgedrückt

$$f_{x_1}(x_1,x_2)+\lambda g_{x_1}(x_1,x_2)=0 \quad \text{und} \quad f_{x_2}(x_1,x_2)+\lambda g_{x_2}(x_1,x_2)=0$$

erfüllt sein müssen.

Zusammen mit der Restriktion ergeben sich für unser Beispiel die drei Gleichungen:

1) $f_{x_1}(x_1,x_2)+\lambda g_{x_1}(x_1,x_2)=2x_1+2\lambda x_1=0 \iff x_1(1+\lambda)=0$

2) $f_{x_2}(x_1,x_2)+\lambda g_{x_2}(x_1,x_2)=2x_2+\lambda \quad =0 \iff \lambda=-2x_2$

3) $\quad g(x_1,x_2)=x_2+x_1^2-\frac{3}{2}=0$

Wegen 1) $x_1(1+\lambda)=0 \iff x_1=0 \vee \lambda=-1$, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: $\underline{x_1=0}$

Einsetzen in 3) liefert $\underline{x_2=\frac{3}{2}}$

Einsetzen in 2) liefert $\underline{\lambda=-3}$

2. Fall: $\underline{\lambda=-1}$

Einsetzen in 2) liefert $\underline{x_2=\frac{1}{2}}$

Einsetzen in 3) liefert $\underline{x_1=1 \vee x_1=-1}$

Die Punkte $P_1(0,\frac{3}{2})$, $P_2(1,\frac{1}{2})$, $P_3(-1,\frac{1}{2})$ kommen also als Kandidaten für Extremalstellen in Frage.

Es gilt: $f(0,\frac{3}{2})=\frac{9}{4}$ ist lokales Maximum, $f(1,\frac{1}{2})=f(-1,\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$ sind lokale Minima von f unter der gegebenen Restriktion.

Bevor wir die Methode, die uns notwendige Bedingungen für lokale Extrema bei Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen liefert, in allgemeiner Form angeben, schauen wir die obigen Bedingungen noch einmal formal aus einem anderen Blickwinkel an.

Zu dem Problem aus unserem Beispiel definieren wir eine Hilfsfunktion (Lagrangefunktion) durch

$$L(x_1,x_2;\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2).$$

Die Forderung $\operatorname{grad} L(x_1,x_2;\lambda)=\vec{0}$ führt auf

$$L_{x_1}(x_1,x_2;\lambda)=f_{x_1}(x_1,x_2)+\lambda g_{x_1}(x_1,x_2)=0$$

$$L_{x_2}(x_1,x_2;\lambda)=f_{x_2}(x_1,x_2)+\lambda g_{x_2}(x_1,x_2)=0$$

$$L_{\lambda}(x_1,x_2;\lambda)=g(x_1,x_2)=0$$

Dies sind genau dieselben Gleichungen, die wir aus der zunächst anschaulichen Argumentation hergeleitet haben.
Mit Hilfe der Lagrangefunktion lässt sich nun die Lagrangesche Multiplikatormethode sehr allgemein formulieren.

Notwendige Bedingung 3.4.2: Es seien $f, g_1, g_2, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $m < n$, C^1-Funktionen und f besitze an einem inneren Punkt $\vec{x}^*$ von $D_f \cap D_{g_1} \cap \ldots \cap D_{g_m}$ ein lokales Extremum unter den Restriktionen $g_i(\vec{x}^*) = 0$, $i = 1, \ldots, m$.
Der Rang (Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spalten) der sogenannten Jacobi-Matrix zu den Funktionen $g_1, \ldots, g_m$ an der Stelle $\vec{x}^*$ (Matrix der ersten partiellen Ableitungen von $g_1, \ldots, g_m$ an der Stelle $\vec{x}^*$)

$$J(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{x}^*) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{x}^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\nabla g_1(\vec{x}^*)]^T \\ \vdots \\ [\nabla g_m(\vec{x}^*)]^T \end{pmatrix}$$

sei m. Dann existieren m Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (die sogenannten Lagrange-Multiplikatoren), so dass für $L(\vec{x}; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\vec{x})$ gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = 0 \quad , i = 1, \ldots, n.$$

Bemerkung 3.4.3: 1) Die Nebenbedingungen lassen sich auch in der Form $L_{\lambda_j}(\vec{x}; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, angeben.

2) Praktisch bedeutet Satz 3.4.2, dass man als Kandidaten für die Lösung des Optimierungsproblems diejenigen $(\vec{x}; \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ bestimmt, für die gilt:

I) $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \quad , i = 1, \ldots, n$

II) $g_j(\vec{x}) = 0 \quad , j = 1, \ldots, m$

III) $Rg(J(\vec{x})) = m$

3) Die Bedingung, dass die Jacobi-Matrix maximalen Rang besitzt, garantiert, dass die Restriktionen $g_i(\vec{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, lokal nach m

der n Variablen auflösbar sind. Dabei bedeutet lokal, dass die Auflösbarkeit gewährleistet ist, wenn $\vec{x}$ in einer Umgebung von $\vec{x}^*$ liegt.

Beispiel 3.4.4: Wir betrachten das Problem

$$\min f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 + 2x_3^2 + x_2 x_3 - x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 5$$

$$\text{so dass } g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 4 = 0$$

Die zugehörige Lagrangefunktion lautet:

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_1, \lambda_2) = x_2^2 + 2x_3^2 + x_2 x_3 - x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 5$$
$$+ \lambda_1(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1) + \lambda_2(2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 4)$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$L_{x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_1, \lambda_2) = -1 + \lambda_1 + 2\lambda_2$$
$$L_{x_2}(x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_2 + x_3 + 4 - \lambda_1 - 4\lambda_2$$
$$L_{x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_1, \lambda_2) = 4x_3 + x_2 - 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2$$
$$L_{x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_1, \lambda_2) = -2 - \lambda_1 + \lambda_2$$
$$L_{\lambda_1}(x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_1, \lambda_2) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1$$
$$L_{\lambda_2}(x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 4$$

In diesem Beispiel ergibt das Nullsetzen der partiellen Ableitungen ein lineares Gleichungssystem (in Matrix-Vektor-Form)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

das sich z.B. mit dem Gauß-Algorithmus lösen lässt. Die eindeutige Lösung ist $(\vec{x}^*; \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (-\frac{2}{21}, -\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{34}{21}; -1, 1)$. Wir haben somit einen möglichen Kandidaten für ein lokales Minimum bestimmt.

Für die Jacobi-Matrix von g_1, g_2 gilt:

$$J(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = J(\vec{x}^*).$$

Offensichtlich ist $Rg(J(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)) = 2$, da z.B. der 1. und 4. Spaltenvektor linear unabhängig sind. Die Rangbedingung ist also erfüllt.

Ergänzung 3.4.5: Gauß-Algorithmus (schematisch)

1	-1	1	-1	0	0	-1	① (-2)
2	-4	2	1	0	0	4	
0	2	1	0	-1	-4	-4	
0	1	4	0	1	2	1	
0	0	0	0	1	2	1	(1)
0	0	0	0	-1	1	2	
	-2	0	3	0	0	6	②
	2	1	0	-1	-4	-4	(1) $(\frac{1}{2})$
	1	4	0	1	2	1	
				1	2	1	⑤
					3	3	⑥
		1	3	-1	-4	2	③ (-4)
		4	$\frac{3}{2}$	1	2	4	
			$-\frac{21}{2}$	5	18	-4	④

Rückwärtsauflösen

aus ⑥: $3\lambda_2 = 3 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1$

aus ⑤: $\lambda_1 = 1 - 2\lambda_2$

mit $\lambda_2 = 1$: $\lambda_1 = -1$

aus ④: $-\frac{21}{2} x_4 = -4 - 5\lambda_1 - 18\lambda_2$

mit $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = -1$: $x_4 = \frac{34}{21}$

aus ③: $x_3 = 2 - 3x_4 + \lambda_1 + 4\lambda_2$

mit $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = -1, x_4 = \frac{34}{21}$:

$x_3 = \frac{1}{7}$

aus ②: $2x_2 = -6 + 3x_4$

mit $x_4 = \frac{34}{21}$: $x_2 = -\frac{4}{7}$

aus ①: $x_1 = -1 + x_2 - x_3 + 4$

mit $x_2 = -\frac{4}{7}, x_3 = \frac{1}{7}, x_4 = \frac{34}{21}$:

$x_1 = -\frac{2}{21}$

Um nun entscheiden zu können, ob stationäre Punkte der Lagrangefunktion tatsächlich Minimierer bzw. Maximierer des Optimierungsproblems sind, benötigen wir hinreichende Bedingungen. Dabei spielt die Konvexität der Lagrangefunktion eine Rolle. Dies drücken wir mit Hilfe von Definitheitseigenschaften der Hesse-Matrix von L aus.

Zunächst stellen wir einen Zusammenhang zwischen den Minima der Lagrangefunktion und der Zielfunktion auf dem zulässigen Bereich her. Sei nun $\vec{x}^*$ ein stationärer Punkt der Lagrangefunktion mit mit zugehörigen $\lambda_i^*, i=1,\dots,m$. Dann bezeichnen wir mit $L^*(\vec{x})$ die reduzierte Lagrangefunktion, die sich durch Einsetzen der festen Werte λ_i^* für $\lambda_i, i=1,\dots,m$, in die Lagrangefunktion ergibt.
Dann gilt:

$\vec{x}^*$ (lokales) Minimum von $L^* \Longleftrightarrow \vec{x}^*$ (lokales) Minimum von f auf der Menge der zulässigen Punkte

denn:

$$L^*(\vec{x}^*) \le L^*(\vec{x}) \Longleftrightarrow f(\vec{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \underbrace{g_i(\vec{x}^*)}_{=0} \le f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \underbrace{g_i(\vec{x})}_{=0}$$

da $\vec{x}^*$ stationärer Punkt von L

$$\Longleftrightarrow f(\vec{x}^*) \le f(\vec{x})$$

Damit lässt sich nun folgendes hinreichende Kriterium formulieren:

Satz 3.4.6: Seien $f, g_i, i=1,\dots,m$, C^2-Funktionen und $(\vec{x}^*, \lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)$ ein stationärer Punkt von $L(\vec{x}; \lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\vec{x})$. Dann gilt: Ist die Hesse-Matrix von L^* an der Stelle $\vec{x}^*$ positiv definit, dann besitzt f an der Stelle $\vec{x}^*$ auf der Menge der zulässigen Punkte ein striktes lokales Minimum (bei negativer Definitheit striktes lokales Maximum.
Ist L^* für alle $\vec{x}$ konvex (konkav), so handelt es sich um ein globales Minimum (Maximum).

Beispiel 3.4.7: $\min f(x_1, x_2, x_3) = x^2 + y^2 + z^2$

so dass $x + 2y + z - 30 = 0$

$2x - y - 3z - 10 = 0$

Die zugehörige Lagrangefunktion ist

$$L(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + 2y + z - 30) + \lambda_2(2x - y - 3z - 10)$$

und es gilt:

$$\operatorname{grad} L(\vec{x};\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix} 2x+\lambda_1+2\lambda_2 \\ 2y+2\lambda_1-\lambda_2 \\ 2z+\lambda_1-3\lambda_2 \\ x+2y+z-30 \\ 2x-y-3z-10 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die stationären Punkte der Lagrangefunktion.

$$\operatorname{grad} L(\vec{x};\lambda_1,\lambda_2)=\vec{0} \iff \left\{\begin{array}{l} 2x+\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ 2y+2\lambda_1-\lambda_2=0 \\ 2z+\lambda_1-3\lambda_2=0 \\ x+2y+z=30 \\ 2x-y-3z=10 \end{array}\right\}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist eindeutig bestimmt. Sie lautet: $x^*=10,\ y^*=10,\ z^*=0;\ \lambda_1^*=-12,\ \lambda_2^*=-4$.

Wir untersuchen nun die Definitheitseigenschaften der Hesse-Matrix von

$$L^*(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+12(x+2y+z-30)+4(2x-y-3z-10)$$
$$=x^2+y^2+z^2+20x+20y-400.$$

Für x,y,z beliebig ist $H_{L^*}(x,y,z)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ positiv definit.

Damit ist $(x^*,y^*,z^*)=(10,10,0)$ globales Minimum von f unter den angegebenen Restriktionen mit $f(10,10,0)=200$.

Man beachte, dass es sich in Satz 3.4.6 um hinreichende Bedingungen handelt. Wenn diese nicht erfüllt sind, lassen sich mit diesem Satz keine Aussagen machen. Es gibt hinreichende Kriterien, die schwächer sind, die wir im Rahmen dieser Vorlesung aber nicht weiter behandeln. In praktischen Anwendungen kann man häufig durch genauere Überlegungen weitere Aussagen machen.

Beispiel 3.4.8: Ein Verbraucher bestimmt seinen Nutzen mit einer Cobb-Douglas Nutzenfunktion $U(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2^3x_3$ mit $x_1,x_2,x_3\geq 0$. Er unterliegt der Budgetbeschränkung $x_1+x_2+x_3=12$. Wie soll er x_1,x_2,x_3 wählen?

Das zugehörige Optimierungsproblem lautet:

$$\max U(x_1,x_2,x_3)=x_1^2\,x_2^3\,x_3$$

so dass $g(x_1,x_2,x_3)=12-x_1-x_2-x_3=0$

Lagrangefunktion:

$$L(x_1,x_2,x_3;\lambda)=x_1^2x_2^3\,x_3+\lambda(12-x_1-x_2-x_3)$$

Die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion lauten:

$$L_{x_1}(x_1,x_2,x_3;\lambda)=2x_1\,x_2^3\,x_3-\lambda$$

$$L_{x_2}(x_1,x_2,x_3;\lambda)=3x_1^2x_2^2x_3-\lambda$$

$$L_{x_3}(x_1,x_2,x_3;\lambda)=x_1^2x_2^3-\lambda$$

$$L_{\lambda}(x_1,x_2,x_3;\lambda)=12-x_1-x_2-x_3$$

Wir erhalten somit die Bedingungen:

1) $2x_1\,x_2^3\,x_3=\lambda$

2) $3x_1^2x_2^2\,x_3=\lambda$

3) $x_1^2\,x_2^3 \quad =\lambda$

4) $x_1+x_2+x_3 = 12$

Wir können in diesem Beispiel ohne Einschränkung voraussetzen, dass x_1, x_2, x_3 alle von Null verschieden ist, da sonst der Nutzen gleich Null und somit sicher nicht maximal ist.

Gleichsetzen von 1) und 2) liefert: $2x_1\,x_2^3x_3=3x_1^2x_2^2\,x_3 \quad |:2x_1x_2^2x_3\neq 0$

I) $x_2=\frac{3}{2}x_1$

Gleichsetzen von 1) und 3) liefert: $2x_1x_2^3x_3 = x_1^2x_2^3 \quad |:2x_1x_2^3\neq 0$

II) $x_3=\frac{1}{2}x_1$

Einsetzen von I) und II) in 4) liefert: $x_1+\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}x_1=12 \Longleftrightarrow \underline{x_1=4}$

Einsetzen von $x_1=4$ in I) und II) liefert: $\underline{x_2=6}$, $\underline{x_3=2}$

Einsetzen von $x_1=4$, $x_2=6$, $x_3=2$ in 1), 2) bzw. 3) liefert: $\underline{\lambda=3456}$

Für die Jacobi-Matrix gilt: $J(x_1,x_2,x_3)=(1,\ 1,\ 1)=J(x_1^*,x_2^*,x_3^*)$, also ist die Rangbedingung $Rg(J(x_1^*,x_2^*,x_3^*))=1$ erfüllt.

Die einzige mögliche (lokale) Extremalstelle von f unter der Budgetbeschränkung ist somit $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (4, 6, 2)$.
Da der durch die Budgetbeschränkung beschriebene Bereich abgeschlossen und beschränkt ist, besitzt f dort ein absolutes Maximum. Da f auf dem Rand der zulässigen Menge 0 ist, ist an der Stelle $(4,6,2)$ der Nutzen unter der Budgetbeschränkung maximal mit $U(4,6,2) = 4^2 \cdot 6^3 \cdot 2 = 6912$.

Wir werden nun das letzte Beispiel etwas allgemeiner betrachten, um damit einige weitere Begriffe und Zusammenhänge erläutern zu können.

Beispiel 3.4.9: Die Aufgabenstellung sei wie im letzten Beispiel. Für die Budgetbeschränkung verwenden wir allerdings allgemeiner die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = m \quad \text{mit dem Einkommen } m > 0.$$

Das zugehörige Optimierungsproblem lautet dann

$$\max\ U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^3 x_3$$

$$\text{so dass } g(x_1, x_2, x_3) = m - x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Es ist zu erwarten, dass die Optimallösung vom Einkommen m abhängig ist, was durch die folgende Rechnung bestätigt wird.
Lagrangefunktion:

$$L(x_1, x_2, x_3; \lambda) = x_1^2 x_2^3 x_3 + \lambda(m - x_1 - x_2 - x_3)$$

Die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion sind:

$$L_{x_1}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = 2x_1 x_2^3 x_3 - \lambda$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = 3x_1^2 x_2^2 x_3 - \lambda$$

$$L_{x_3}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = x_1^2 x_2^3 - \lambda$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = m - x_1 - x_2 - x_3$$

Wir erhalten somit die Bedingungen:

1) $2x_1 x_2^3 x_3 = \lambda$
2) $3x_1^2 x_2^2 x_3 = \lambda$
3) $x_1^2 x_2^3 = \lambda$
4) $x_1 + x_2 + x_3 = m$

Das Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems geschieht völlig analog zum letzten Beispiel. Es ergibt sich die von m abhängige Lösung:

$$x_1^*(m) = \frac{1}{3}m \quad , x_2^*(m) = \frac{1}{2}m \, , x_3^*(m) = \frac{1}{6}m \, , \lambda^*(m) = \frac{1}{72}m^5$$

Setzt man dies nun in die Nutzenfunktion ein, so erhält man die von m abhängige Funktion

$$\tilde{u}(m) = \frac{1}{432} \cdot m^6 = u(x_1^*(m), x_2^*(m), x_3^*(m))$$

Die Funktion $\tilde{u}$ heißt Optimalwertfunktion des Problems. Es gilt:

$$\frac{d}{dm}\tilde{u}(m) = \frac{1}{72}m^5 = \lambda^*(m)$$

Damit gibt der Lagrange-Multiplikator $\lambda^*(m)$ die momentane Rate an, mit der sich der optimale Wert der Nutzenfunktion ändert, wenn sich das Einkommen m ändert.

Die lineare Approximation von $\tilde{u}$ an einer Stelle $\tilde{m}$ ist (vgl. Analysis I):

$$t_1(m) = \tilde{u}(\tilde{m}) + \frac{d}{dm}\tilde{u}(\tilde{m}) \cdot (m - \tilde{m})$$

$$= \tilde{u}(\tilde{m}) + \lambda^*(\tilde{m}) \cdot (m - \tilde{m}) \approx \tilde{u}(m),$$

wenn m nahe bei $\tilde{m}$ ist. Anders ausgedrückt ist dann

$$\tilde{u}(m) - \tilde{u}(\tilde{m}) \approx \lambda^*(\tilde{m}) \cdot (m - \tilde{m}).$$

Für $m = \tilde{m} + 1$ bedeutet dies speziell:

$$\tilde{u}(\tilde{m}+1) - \tilde{u}(\tilde{m}) \approx \lambda^*(\tilde{m}).$$

$\lambda^*(\tilde{m})$ gibt also näherungsweise an, um wie viel sich der Nutzen ändert, wenn $\tilde{m}$ um 1 erhöht wird.

In der Ökonomie heißt λ^* auch Schattenpreis.

Wir betrachten die Zusammenhänge nun an einem allgemeinen Optimierungsproblem der Form:

$$\min\ (\max)\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{so dass} \quad g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad , i = 1, 2, \ldots, m$$

Für die Restriktionen g_i schreiben wir:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = c_i - h_i(x_1, x_2, ..., x_m) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m$$

mit Konstanten c_i.

Außerdem setzen wir voraus, dass alle Funktionen hinreichend oft differenzierbar sind.

Lösungen der notwendigen Bedingungen, die sich aus dem Nullsetzen der partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion ergeben, werden nun im Allgemeinen von $c_1, c_2, ..., c_m$ abhängen.

Ist $x_j^*(c_1, c_2, ..., c_m)$, $j = 1, ..., n$, $\lambda_i^*(c_1, c_2, ..., c_m)$, $i = 1, ..., m$, eine solche Lösung, so erhält man durch Einsetzen in die Zielfunktion f eine Funktion $\tilde{f}$, die von $c_1, c_2, ..., c_m$ abhängt:

$$\tilde{f}(c_1, c_2, ..., c_m) = f(x_1^*(c_1, c_2, ..., c_m), ..., x_n^*(c_1, c_2, ..., c_m))$$

Die so entstehende Funktion heißt <u>Optimalwertfunktion</u>.

Der optimale Wert der Zielfunktion ändert sich in Abhängigkeit von der Wahl der Konstanten $c_1, c_2, ..., c_m$ in den Restriktionen.

Es gilt nun allgemein folgender Zusammenhang:

$$\frac{\partial}{\partial c_\ell} \tilde{f}(c_1, c_2, ..., c_m) = \lambda_\ell^*(c_1, c_2, ..., c_m)$$

Für interessierte Studierende wird dies im Folgenden nachgewiesen.
Für den Beweis benötigt man insbesondere die allgemeine Kettenregel!

Aus dem Nullsetzen der partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [c_i - h_i(x_1, x_2, ..., x_n)]$$

nach der Variablen x_j, $j = 1, 2, ..., n$, folgt zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \cdot \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \qquad (*_1)$$

Für die partiellen Ableitungen von $f(x_1^*(c_1, ..., c_m), ..., x_n^*(c_1, ..., c_m))$ nach c_ℓ gilt mit Hilfe der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial c_\ell}\tilde{f}(c_1,\dots,c_m) = \frac{\partial}{\partial c_\ell} f(x_1^*(c_1,\dots,c_m),\dots,x_n^*(c_1,\dots,c_m))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1^*,\dots,x_n^*)\cdot\frac{\partial}{\partial c_\ell} x_j^*(c_1,c_2,\dots,c_m)$$

Einsetzen von $(*_1)$

$$\overset{\uparrow}{=} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} h(x_1^*,\dots,x_n^*)\cdot\frac{\partial}{\partial c_\ell} x_j^*(c_1,\dots,c_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j} h(x_1^*,\dots,x_n^*)\cdot\frac{\partial}{\partial c_\ell}x_j^*(c_1,\dots,c_m) \quad (*_2)$$

Differenziert man die durch die Restriktionen gegebenen Gleichungen $h_i(x_1^*,\dots,x_n^*) = c_i$ auf beiden Seiten partiell nach c_ℓ, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial c_\ell} h_i(x_1^*,\dots,x_n^*) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j} h_i(x_1^*,\dots,x_n^*)\cdot\frac{\partial}{\partial c_\ell}x_j^*(c_1,\dots,c_m)$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{falls } i=\ell \\ 0, & \text{falls } i\neq\ell \end{cases}$$

Setzt man dies nun in die Gleichung $(*_2)$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial c_\ell}\tilde{f}(c_1,\dots,c_m) = \lambda_\ell^*(c_1,\dots,c_m) \text{ , d.h. die Behauptung.}$$

Die Formel $\frac{\partial}{\partial c_\ell}\tilde{f}(c_1,\dots,c_m) = \lambda_\ell^*(c_1,\dots,c_m)$ zeigt:
Der Lagrange-Multiplikator $\lambda_i^*(c_1,\dots,c_m)$ für die i-te Nebenbedingung ist die momentane Rate, mit der sich der Optimalwert der Zielfunktion ändert, wenn sich die Konstante c_i in der i-ten Restriktion ändert.
Wir betrachten wieder die lineare Approximation von $\tilde{f}$ um $(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m)$, d.h.

$$t(c_1,\dots,c_m) = \tilde{f}(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m) + \left\langle \operatorname{grad}\tilde{f}(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m), \begin{pmatrix} c_1-\tilde{c}_1 \\ \vdots \\ c_m-\tilde{c}_m\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$= \tilde{f}(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial c_i}\tilde{f}(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m)\cdot(c_i-\tilde{c}_i)$$

$$= \tilde{f}(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m)\cdot(c_i-\tilde{c}_i)$$

$$\approx \tilde{f}(c_1,\dots,c_m),$$

wenn $(c_1,\dots,c_m)$ nahe bei $(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m)$ ist. Dann ist also

$$\tilde{f}(c_1,\dots,c_m) - \tilde{f}(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m) \approx \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m)\cdot(c_i-\tilde{c}_i)$$

Für $c_\ell = \tilde{c}_\ell + 1$, $c_i = \tilde{c}_i$ für $i \neq \ell$ ergibt sich daraus speziell:

$$\tilde{f}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{\ell-1}, \tilde{c}_\ell + 1, \tilde{c}_{\ell+1}, \ldots, \tilde{c}_m) - \tilde{f}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m) \approx \lambda_\ell^*(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m) \quad (*)$$

$\lambda_\ell^*(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m)$ gibt also an, um wie viel sich der Optimalwert ungefähr ändert, wenn $\tilde{c}_\ell$ um 1 Einheit erhöht wird.
In der Ökonomie heißt λ_ℓ^* auch Schattenpreis, der einer Einheit der Ressource ℓ zugeschrieben wird.

Beispiel 3.4.10: Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

so dass $g_1(x_1, x_2, x_3) = c_1 - x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$

$g_2(x_1, x_2, x_3) = c_2 - 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

Lagrangefunktion:

$$L(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(c_1 - x_1 - 2x_2 - x_3) + \lambda_2(c_2 - 2x_1 + x_2 + 3x_3)$$

Partielle Ableitungen:

$$L_{x_1}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2$$

$$L_{x_3}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_3 - \lambda_1 + 3\lambda_2$$

$$L_{\lambda_1}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = c_1 - x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$L_{\lambda_2}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = c_2 - 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

Nullsetzen der partiellen Ableitungen liefert:

1) $2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$

2) $2x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

3) $2x_3 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$

4) $x_1 + 2x_2 + x_3 = c_1$

5) $2x_1 - x_2 - 3x_3 = c_2$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, das sich z.B. mit dem Gauß-Algorithmus lösen lässt.

$$\begin{array}{rrrrrr} 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & c_2 \end{array} \quad (-\tfrac{1}{2}) \quad (-1)$$

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & \tfrac{1}{2} & 1 & c_1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & c_2 \end{array} \quad (-1) \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & \tfrac{5}{2} & 0 & c_1 \\ -3 & 0 & \tfrac{5}{2} & c_2 \end{array} \quad (-\tfrac{1}{2}) \quad (\tfrac{3}{2})$$

$$\begin{array}{rrr} 3 & -\tfrac{3}{2} & c_1 \\ -\tfrac{3}{2} & 7 & c_2 \end{array} \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$\begin{array}{rr} \tfrac{25}{4} & \tfrac{1}{2}c_1 + c_2 \end{array}$$

Rückwärtsauflösen liefert:

$$\lambda_2^* = \frac{2}{25}c_1 + \frac{4}{25}c_2$$

$$\lambda_1^* = \frac{28}{75}c_1 + \frac{2}{25}c_2$$

$$x_3^* = \frac{1}{15}c_1 - \frac{1}{5}c_2$$

$$x_2^* = \frac{1}{3}c_1$$

$$x_1^* = \frac{4}{15}c_1 + \frac{1}{5}c_2$$

Die Optimalwertfunktion ergibt sich durch Einsetzen von x_1^*, x_2^*, x_3^* in f zu:

$$\tilde{f}(c_1, c_2) = \frac{14}{75}c_1^2 + \frac{2}{25}c_1c_2 + \frac{2}{25}c_2^2.$$

Man bestätigt leicht den oben allgemein aufgestellten Zusammenhang:

$$\frac{\partial}{\partial c_1}\tilde{f}(c_1,c_2) = \frac{28}{75}c_1 + \frac{2}{25}c_2 = \lambda_1^*(c_1,c_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_2}\tilde{f}(c_1,c_2) = \frac{2}{25}c_1 + \frac{4}{25}c_2 = \lambda_2^*(c_1,c_2)$$

Wählen wir z.B. $c_1 = 30$, $c_2 = 10$, so erhalten wir

$$\tilde{f}(30,10) = 200, \quad \lambda_1^*(30,10) = 12, \quad \lambda_2^*(30,10) = 4.$$

Mit (*) auf S. 18 erhält man z.B.:

$$\tilde{f}(31,9) - \tilde{f}(30,10) \approx \lambda_1^*(30,10)\cdot(31-30) + \lambda_2^*(30,10)\cdot(9-10)$$
$$= 8$$

Zum Vergleich die exakten Werte:

$$\tilde{f}(31,9) - \tilde{f}(30,10) = \frac{15614}{75} - 200 = \frac{614}{75} = 8.18\overline{6}$$

III.5 Optimierung mit Ungleichungsrestriktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir folgendes Optimierungsproblem:

$$\min f(\vec{x})$$
$$\text{so dass } h_j(\vec{x}) \leq 0 \quad , j = 1, \dots, m$$

Hier haben wir nun zu berücksichtigen, dass die Restriktionen in Form von Ungleichungen gegeben sind. Wie im Abschnitt vorher definieren wir wieder die zum Problem gehörende Lagrangefunktion durch

$$L(\vec{x}; \mu_1, \dots, \mu_m) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h_i(\vec{x}).$$

Um an Kandidaten für die Lösung des Optimierungsproblems zu gelangen, fordern wir hier wieder

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \quad , i = 1, \dots, n$$

und führen die sogenannte komplementäre Schlupfbedingung ein, d.h.

$$(2) \quad \mu_j \geq 0 \text{ mit } \mu_j = 0 \text{ falls } h_j(\vec{x}) < 0, \; j = 1, \dots, m.$$

Schließlich müssen auch die Ungleichungsrestriktionen erfüllt sein.

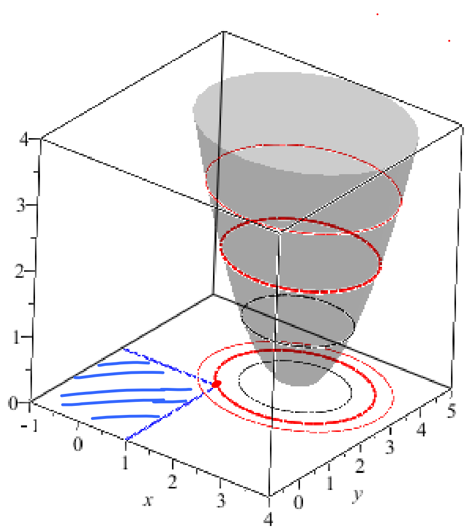
Die Bedingungen (1) und (2) heißen Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen, kurz KKT-Bedingungen.

Die Bedingung (2) bedeutet, dass in den beiden Ungleichungen $\mu_j \geq 0$, $h_j(\vec{x}) \leq 0$ höchstens einmal ein striktes "<" bzw. ">" auftreten darf. Ist $h_j(\tilde{\vec{x}}) = 0$ an einer Stelle $\tilde{\vec{x}}$, so sagt man, dass die Restriktion aktiv ist. Bevor wir zu einer präziseren Formulierung notwendiger Bedingungen kommen, erläutern wir die Begriffe an einem anschaulichen Beispiel.

Beispiel 3.5.1: Wir betrachten das Problem

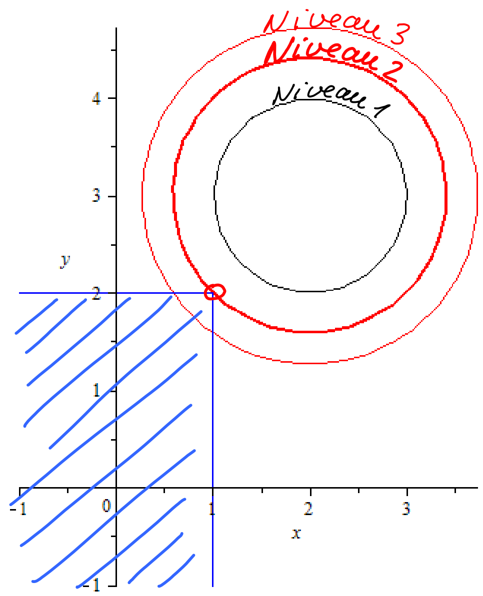
$$\min f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2$$
$$\text{so dass } h_1(x,y) = x - 1 \leq 0$$
$$h_2(x,y) = y - 2 \leq 0$$

Anschaulich stellt sich die Situation folgendermaßen dar.



Die Zielfunktion stellt ein Paraboloid mit Minimum im Punkt (2,3,0) dar. Der durch die Restriktionen festgelegte zulässige Bereich in der xy-Ebene ist blau schraffiert. Die zu der schwarzen Niveaulinie gehörenden (x,y)-Werte liegen alle außerhalb des zulässigen Bereichs. Erst bei der dicker gezeichneten Niveaulinie gibt es einen Wert (x,y) (nämlich (1,2)), der im zulässigen Bereich liegt. Niveaulinien mit höherem Niveau haben dann mehr Punkte im zulässigen Bereich, aber eben auch mit größerem zugehörigen Funktionswert.

Die nebenstehende Graphik verdeutlich die Situation noch einmal in der xy-Ebene. Die zu den Niveaulinien gehörenden Funktionswerte nehmen mit größer werdenden Kreisen zu. Somit ist anschaulich klar, dass $(x^*,y^*)=(1,2)$ das Optimierungsproblem löst.



Im Folgenden überlegen wir nun, was uns in diesem Beispiel die KKT-Bedingungen liefern.

Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$L(x,y;\mu_1,\mu_2)=(x-2)^2+(y-3)^2+\mu_1(x-1)+\mu_2(y-2)$, d.h. die KKT-Bedingungen sind

(1) a) $L_x(x,y;\mu_1,\mu_2)=2(x-2)+\mu_1=0$ b) $L_y(x,y;\mu_1,\mu_2)=2(y-3)+\mu_2=0$

(2) a) $\mu_1\geq 0$ mit $\mu_1=0$ falls $x-1<0$ b) $\mu_2\geq 0$ mit $\mu_2=0$ falls $y-2<0$

1. Fall: Beide Restriktionen aktiv, d.h. $x = 1$, $y = 2$.

Dann liefert (1) a) $\mu_1 = 2$ und (1) b) $\mu_2 = 2$.

Damit ist $(x_1^*, y_1^*) = (1,2)$ möglicher Kandidat.

2. Fall: 1. Restriktion aktiv, 2. Restriktion inaktiv, d.h. $x = 1$ und $y < 2$ mit $\mu_2 = 0$.

Dann liefert (1) b) $y = 3$ im Wiederspruch zu $y < 2$.

Kein möglicher Kandidat.

3. Fall: 1. Restriktion inaktiv, 2. Restriktion aktiv, d.h. $x < 1$ mit $\mu_1 = 0$ und $y = 2$.

Dann liefert (1) a) $x = 2$ im Wiederspruch zu $x < 1$.

Kein möglicher Kandidat.

4. Fall: Beide Restriktionen inaktiv, d.h. $x < 1$ mit $\mu_1 = 0$ und $y < 2$ mit $\mu_2 = 0$.

Dann liefern (1) a) und b) $x = 2$ und $y = 3$ in Wiederspruch zu $x < 1$ und $y < 2$.

Kein möglicher Kandidat.

Insgesamt erfüllt also nur $(x_1^*, y_1^*) = (1,2)$ die KKT-Bedingungen.

Wir formulieren nun eine entsprechende notwendige Bedingung. An Stelle der Rangbedingung für die Jacobi-Matrix der Restriktionsfunktionen tritt nun eine entsprechende Bedingung für die aktiven Restriktionen.

Notwendige Bedingung 3.5.2 : Es seien $f, h_1, \ldots, h_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1-Funktionen und f besitze an einem inneren Punkt $\vec{x}^*$ von $\mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_{h_1} \cap \ldots \cap \mathbb{D}_{h_m}$ ein lokales Minimum unter den Restriktionen $h_j(\vec{x}^*) \leq 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Der Rang der Matrix, die aus den Gradeenten der in $\vec{x}^*$ aktiven Restriktionen an der Stelle $\vec{x}^*$ gebildet wird, sei maximal, d.h. die Gradeenten der an der Stelle $\vec{x}^*$ aktiven Restriktionen seien linear unabhängig.

Dann existieren Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_m$, so dass für die Lagrangefunktion $L(\vec{x}; \mu_1, \ldots, \mu_m) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h_i(\vec{x})$ gilt:

(1) $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}^*; \mu_1, \ldots, \mu_m) = 0$, $i = 1, \ldots, n$

(2) $\mu_j \geq 0$ mit $\mu_j = 0$, falls $h_j(\vec{x}^*) < 0$, $j = 1, \ldots, m$.

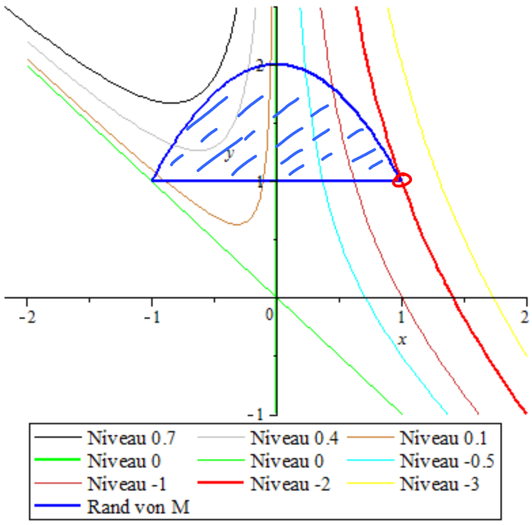
Die in 3.5.2 genannte Rangbedingung wird als constraint qualification (CF) bezeichnet. Wenn die CF-Bedingung an einem optimalen Punkt nicht erfüllt ist, kann es sein, dass dort die KKT-Bedingungen nicht erfüllt sind. Um alle möglichen Kandidaten zu ermitteln, müssen daher genau genommen zwei Dinge getan werden:

- Bestimmung aller zulässigen Punkte, die die KKT-Bedingungen erfüllen,
- Bestimmung aller zulässigen Punkte, an denen die CF-Bedingung nicht erfüllt ist.

Beispiel 3.5.3: $\min f(x,y) = -xy - x^2$

so dass $h_1(x,y) = x^2 + y - 2 \le 0$

$h_2(x,y) = -y + 1 \le 0$



In der nebenstehenden Graphik ist der zulässige Bereich blau umrandet und schraffiert. Zusätzlich sind einige Niveaulinien von f eingezeichnet. Man erkennt, dass das Minimum angenommen wird, wo die rote Niveaulinie den zulässigen Bereich berührt.

Die Lagrangefunktion des Problems ist

$L(x,y;\mu_1,\mu_2) = -xy - x^2 + \mu_1(x^2 + y - 2) + \mu_2(-y+1)$, d.h. die KKT-Bedingungen lauten:

(1) a) $L_x(x,y;\mu_1,\mu_2) = -y - 2x + 2\mu_1 x = 0$ b) $L_y(x,y;\mu_1,\mu_2) = -x + \mu_1 - \mu_2 = 0$

(2) a) $\mu_1 \ge 0$ mit $\mu_1 = 0$ falls $x^2 + y - 2 < 0$ b) $\mu_2 \ge 0$ mit $\mu_2 = 0$ falls $-y + 1 < 0$

Die Gradienten der Restriktionen sind $\nabla h_1(x,y) = (2x, 1)$, $\nabla h_2(x,y) = (0,-1)$

1. Fall: Beide Restriktionen sind aktiv, d.h. $y = 1$ und $x^2 + y = 2$, also $x = \pm 1$.

Für $x_1 = y_1 = 1$ liefern (1)a) und b) $\mu_1 = \frac{3}{2}$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$. Weiter gilt, dass $\nabla h_1(x_1,y_1) = (2,1)$, $\nabla h_2(x_1,y_1) = (0,-1)$ linear unabhängig sind, d.h. die

CF-Bedingung ist erfüllt.

Für $x_2=-1, y_2=1$ liefern (1)a) und b) $\mu_1 = \frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{3}{2}$. Weiter gilt, dass $\nabla h_1(x_2,y_2)=(-2,1)$, $\nabla h_2(x_2,y_2)=(0,-1)$ linear unabhängig sind, d.h. die CF-Bedingung ist erfüllt.

Mögliche Kandidaten: $(x_1,y_1)=(1,1)$, $(x_2,y_2)=(-1,1)$

2. Fall: 1. Restriktion aktiv, 2. Restriktion inaktiv, d.h. $x^2+y=2$ und $y>1$ mit $\mu_2=0$. Mit (1)b) erhält man $\mu_1 = x$, eingesetzt in (1)a) $-y-2x+2x^2=0$, d.h. wegen $x^2+y=2$ die Gleichung:
$3x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{7}$. Wegen $\mu_1=x\geq 0$ ist nur $x=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{7}$ zulässig. Dann ist aber $y=2-x^2=2-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{7})^2=\frac{10}{9}-\frac{2}{9}\sqrt{7}<1$ im Wiederspruch zu $y>1$.

Da $\nabla h_1(x,y)=(2x,1)$ linear unabhängig für jedes x, ist die CF-Bedingung für alle (x,y) in diesem Fall erfüllt.

Keine möglichen Kandidaten in diesem Fall.

3. Fall: 1. Restriktion inaktiv, 2. Restriktion aktiv, d.h. $x^2+y<2$ mit $\mu_1=0$ und $y=1$. Mit (1)a) folgt $x=-\frac{1}{2}$ und mit (1)b) $\mu_2=\frac{1}{2}$.

Da $\nabla h_2(x,y)=(0,-1)$ linear unabhängig für alle (x,y) in diesem Fall, gibt es einen möglichen Kandidaten $(x_3,y_3)=(-\frac{1}{2},1)$.

4. Fall: Beide Restriktionen inaktiv, d.h. $x^2+y<2$ und $y>1$ mit $\mu_1=\mu_2=0$. Aus (1)b) und a) erhält man $x=0$ und $y=0$ im Wiederspruch zu $y>1$.

Da beide Restriktionen inaktiv sind, ist die CF-Bedingung automatisch erfüllt.

Keine Kandidaten in diesem Fall.

Für die drei Kandidaten gilt nun: $f(1,1)=-2$, $f(-1,1)=0$, $f(-\frac{1}{2},1)=\frac{1}{4}$.

Da die Funktion f stetig ist auf dem abgeschlossenen und beschränkten zulässigen Bereich $M=\{(x,y): x^2+y-2\leq 0, -y+1\leq 0\}$, nimmt f dort ihr Minimum an. Somit ist $(x^*,y^*)=(1,1)$ mit $f(1,1)=-2$ Lösung des Optimierungsproblems.

Auch im Falle von Ungleichungsrestriktionen spielen Konvexitätseigenschaften bei hinreichenden Kriterien eine wichtige Rolle.

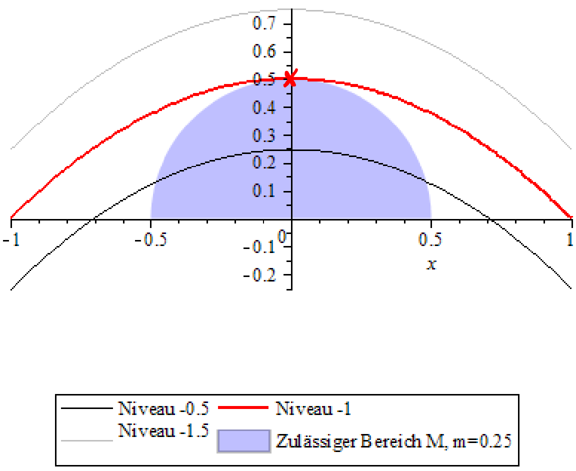
Satz 3.5.4: Wir betrachten $\min f(\vec{x})$, so dass $h_j(\vec{x}) \leq 0$, $j = 1, 2, ..., m$, mit der Lagrangefunktion $L(\vec{x}; \mu_1, ..., \mu_m)$. Sei $\vec{x}^*$ zulässig und erfülle die KKT-Bedingungen mit zugehörigen $\mu_1^*, ..., \mu_m^*$. Dann gilt: Ist $L^*(\vec{x}^*)$ konvex, dann ist $\vec{x}^*$ optimal.

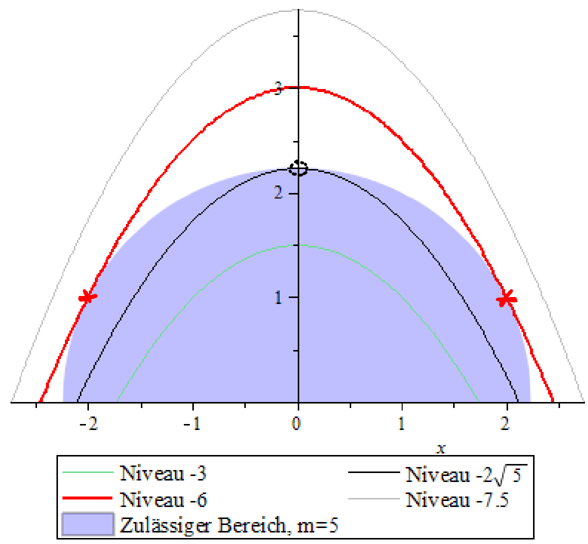
Beispiel 3.5.5: Sei m eine positive Konstante. Wir betrachten

$$\min -(x^2+2y),$$

$$\text{so dass } \left.\begin{array}{r} x^2+y^2 \leq m \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \text{ oberer Halbkreis um den Ursprung mit Radius } m$$

Wir analysieren die Situation zunächst mit Hilfe der unten stehenden Graphiken. Es sind (wie sich herausstellen wird) zwei typische Situationen gezeichnet: links ist $m = \frac{1}{4}$, d.h. $0 < m < 1$ und rechts $m = 5$, d.h. $m \geq 1$. Mit Hilfe der eingezeichneten Niveaulinien sieht man, dass das Minimum im zulässigen Bereich in genau einem Punkt, rechts in zwei Punkten angenommen wird. Dies ist, wie wir mit Hilfe der unten stehenden Rechnung sehen werden, typisch für die genannten Fälle $0 < m < 1$ und $m \geq 1$.





Die Lagrangefunktion lautet: $L(x,y;\mu_1,\mu_2)=-x^2-2y+\mu_1(x^2+y^2-m)-\mu_2 y$

KKT-Bedingungen:

(1) a) $L_x(x,y;\mu_1,\mu_2)=-2x+2\mu_1 x=0$ b) $L_y(x,y;\mu_1,\mu_2)=-2+2\mu_1 y-\mu_2=0$

(2) a) $\mu_1 \geq 0$ mit $\mu_1=0$ falls $x^2+y^2<m$ b) $\mu_2 \geq 0$ mit $\mu_2=0$ falls $y=0$

1.Fall: Beide Restriktionen sind aktiv, d.h. $x^2+y^2=m$ und $y=0$.

Aus (1) b) ergibt sich mit $y=0$: $\mu_2=-2$ im Widerspruch zu (2) b).

Keine möglichen Kandidaten

2.Fall: 1. Restriktion aktiv, 2. Restriktion inaktiv, d.h. $x^2+y^2=m$ und $y>0$ mit $\mu_2=0$. (1) a) liefert $x(1-\mu_1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee \mu_1=1$

(i) $x=0$ in $x^2+y^2=m$ liefert $y=\pm\sqrt{m}$. Da $y>0$, kommt nur $y=\sqrt{m}$ in Frage. Mit (1) b) erhält man $\mu_1=\frac{1}{\sqrt{m}}$

Kandidat $(x_1,y_1)=(0,\sqrt{m})$ mit $\mu_1=\frac{1}{\sqrt{m}}$, $\mu_2=0$

(ii) $\mu_1=1$. Mit (1) b) folgt $y=1$ und aus $x^2+y^2=m$ dann $x=\pm\sqrt{m-1}$, falls $m\geq 1$.

Kandidaten falls $m \geq 1$: $(x_2,y_2)=(\sqrt{m-1},1)$, $(x_3,y_3)=(-\sqrt{m-1},1)$ mit $\mu_1=1$, $\mu_2=0$

3.Fall: 1. Restriktion inaktiv, 2. Restriktion aktiv, d.h. $x^2+y^2<m$ mit $\mu_1=0$ und $y=0$. Dann folgt mit 1) b) $\mu_2=-2$ im Widerspruch zu $\mu_2 \geq 0$.

Kein Kandidat.

4.Fall: Beide Restriktionen inaktiv, d.h. $\mu_1=\mu_2=0$ im Widerspruch zu (1) b).

Kein Kandidat.

Wir überprüfen nun die Konvexitätseigenschaften der hinreichenden Bedingung.

(i) $0<m<1$; $L^*(x,y;\mu_1^*,\mu_2^*)=-x^2-2y+\frac{1}{\sqrt{m}}(x^2+y^2-m)$

$$H_{L^*}(x,y)=\begin{pmatrix}-2+\frac{2}{\sqrt{m}} & 0\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{m}}\end{pmatrix}=H_{L^*}(0,\sqrt{m})$$

Da für $0<m<1$: $-2+\frac{2}{\sqrt{m}}>0$ und $\begin{vmatrix} -2+\frac{2}{\sqrt{m}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{m}} \end{vmatrix} > 0$, ist

$H_{L^*}(0,\sqrt{m})$ positiv definit, d.h. L^* dort strikt konvex.

Also ist im Fall $0<m<1$ $f(0,\sqrt{m}) = -2\sqrt{m}$ minimal auf dem zulässigen Bereich. (Für $m=1$ nur konvex, für $m>1$ indefinit)

(ii) Für $m \geq 1$ haben wir noch $(\pm\sqrt{m-1}, 1)$ zu beachten.

Es gilt $f(\pm\sqrt{m-1}, 1) = -(m-1)-2 = -(m+1) \leq -2\sqrt{m}$, da

$m+1 \geq 2\sqrt{m} \iff (m+1)^2 \geq 4m \iff m^2+2m+1 \geq 4m$

$\iff m^2-2m+1 \geq 0 \iff (m-1)^2 \geq 0$ (offensichtlich wahr)

Also ist f für $m \geq 1$ minimal für $(\pm\sqrt{m-1}, 1)$ mit $f(\pm\sqrt{m-1}, 1) = -(m+1)$

Bemerkung 3.5.6: Es gibt auch schwächere hinreichende Bedingungen als die in Satz 3.5.4 formulierten. Diese setzen aber weitere Begriffe wie quasikonvexe Funktionen und geeignete Kriterien zur Überprüfung voraus. Im Rahmen dieser Vorlesung gehen wir darauf nicht weiter ein.

III.6 Nichtnegativitätsbedingungen

In vielen praktischen Optimierungsproblemen können oder müssen Variablen als nichtnegativ angenommen werden. Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Variablen so geordnet sind, dass für die ersten k Variablen Vorzeichenbedingungen gestellt werden, d.h. wir betrachten

$$\min f(\vec{x})$$

so dass $h_j(\vec{x}) \leq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$

$x_\ell \geq 0$, $\ell = 1, 2, \dots, k$

Prinzipiell lassen sich die Vorzeichenbedingungen auch als Restriktionen der Form $h_{m+\ell}(\vec{x}) = -x_\ell \leq 0$, $\ell = 1, 2, \dots, k$ schreiben. Die zugehörige Lagrangefunktion lautet dann

$$L(\vec{x}; \mu_1, \dots, \mu_m; \varkappa_1, \dots, \varkappa_k) = f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{k} \varkappa_i (-x_i)$$

und die Methoden des letzten Kapitels können verwendet werden.

Damit erhält man folgende KKT-Bedingungen.

1) a) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{x}) - \varkappa_i = 0 \quad , i = 1,2,\dots,k$

b) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \quad , i = k+1,\dots,n$

2) a) $\mu_j \geq 0$ mit $\mu_j = 0$ falls $h_j(\vec{x}) < 0$, $j = 1,2,\dots,m$

b) $\varkappa_i \geq 0$ mit $\varkappa_i = 0$ falls $-x_i < 0$, $i = 1,2,\dots,k$

Die Bedingungen 1)a) und 2)b) lassen sich nun weiter zusammenfassen.
Da $\varkappa_i \geq 0$ und $\varkappa_i = 0$ falls $x_i > 0$, sind 1)a) und 2)b) zusammen äquivalent zu der Bedingung: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{x}) \geq 0$, $i = 1,\dots,k$, wobei das Gleichheitszeichen gelten muss, falls $x_i > 0$ ist.

Insgesamt haben wir also die KKT-Bedingungen:

1) a) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{x}) \geq 0$ ($= 0$ falls $x_i > 0$), $i = 1,2,\dots,k$

b) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0$, $i = k+1,\dots,n$

2) $\mu_j \geq 0$ mit $\mu_j = 0$ falls $h_j(\vec{x}) < 0$, $j = 1,2,\dots,m$.

Beispiel 3.6.1: $\min f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{12}y$

so dass $x \leq 5$ (d.h. $h_1(x,y) = x - 5 \leq 0$)

$y \leq 1 + x$ (d.h. $h_2(x,y) = y - x - 1 \leq 0$)

$x \geq 0$

Die Lagrangefunktion lautet $L(x,y;\mu_1,\mu_2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{12}y + \mu_1(x-5) + \mu_2(y-x-1)$.

Die KKT-Bedingungen sind:

1) a) $x - \frac{2}{3} + \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ ($= 0$ falls $x > 0$)

b) $-\frac{1}{12} + \mu_2 = 0$

2) (i) $\mu_1 \geq 0$ mit $\mu_1 = 0$ falls $x < 5$

(ii) $\mu_2 \geq 0$ mit $\mu_2 = 0$ falls $y < 1 + x$

Aus 1)b) folgt unmittelbar $\mu_2 = \frac{1}{12} > 0$. Nach 2)(ii) muss damit $y = 1 + x$ gelten.

Wir betrachten nun den Fall $\mu_1 > 0$. Dann ist mit 2)(i) $x=5$. Einsetzen von $x=5$ und $\mu_2 = \frac{1}{12}$ in 1)a) liefert $\mu_1 = -5+\frac{2}{3}+\frac{1}{12} < 0$ im Wiederspruch zu $\mu_1 > 0$.

Für $\mu_1 = 0$ gilt mit 1)a) $x \geq \frac{2}{3}+\frac{1}{12} > 0$. Also ist nach 1)a) $x = \frac{3}{4}$ und $y = 1+x = \frac{7}{4}$.

Insgesamt erfüllt nur der Punkt $(x^*, y^*) = (\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$ mit $\mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{1}{12}$ die KKT-Bedingungen.

Beispiel 3.6.2: Wir betrachten das Problem

$$\max \; g(x,y) = \ln(1+x) + y$$

so dass $px + y \leq m$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, wobei $p \in (0,1)$, $m > 0$ sein soll.

Das Problem ist äquivalent zu $\min f(x,y) = -\ln(1+x) - y$ mit denselben Restriktionen. Die KKT-Bedingungen lauten also:

1) (i) $-\frac{1}{1+x} + \mu p \geq 0$ $(=0$ falls $x > 0)$

(ii) $-1 + \mu \geq 0$ $(=0$ falls $y > 0)$

2) $\mu \geq 0$ mit $\mu = 0$ falls $px + y < m$

Wegen 1)(ii) kann $\mu = 0$ nicht gelten. Also muss $\mu > 0$ sein, d.h. mit 2) $px + y = m$ (*). Da $p, m > 0$, kann nicht gleichzeitig $x=0, y=0$ sein.

$x = 0$: Mit (*) ist dann $y = m > 0$ und mit 1)(ii) $\mu = 1 > 0$

$y = 0$: Mit (*) ist dann $x = \frac{m}{p} > 0$ und mit 1)(i) $\mu = \frac{1}{m+p} > 0$

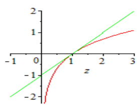
$x > 0, y > 0$: Mit 1)(ii) ist $\mu = 1 > 0$, mit 1)(i) $x = \frac{1}{p} - 1 > 0$, (*) $y = m+1-p > 0$

Es gibt also drei Punkte, die die KKT-Bedingungen erfüllen:

$(x_1^*, y_1^*) = (0, m)$ mit $\mu_1^* = 1$, $f_1^* = f(0,m) = -m$

$(x_2^*, y_2^*) = (\frac{m}{p}, 0)$ mit $\mu_2^* = \frac{1}{m+p}$, $f_2^* = f(\frac{m}{p}, 0) = \ln(p) - \ln(m+p)$

$(x_3^*, y_3^*) = (\frac{1}{p}-1, m+1-p)$ mit $\mu_3^* = 1$, $f_3^* = f(\frac{1}{p}-1, m+1-p) = \ln(p) - m + 1 - p$

Für jedes $z > 0$ gilt: $\ln(z) \leq z - 1$.  Damit:

$f_3^* \leq f_1^* \iff \ln(p) - m + 1 - p \leq -m \iff \ln p \leq p - 1$ ✓

$f_3^* \leq f_2^* \iff \ln(p) - m + 1 - p \leq \ln(p) - \ln(m+p) \iff \ln(m+p) \leq m - 1 + p$ ✓

III.7 Optimierung mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen

Wir betrachten noch kurz den Fall, dass Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen, sowie Vorzeichenbedingungen in einem Optimierungsproblem auftreten, d.h.

$$
\begin{aligned}
&\min f(\vec{x}) \\
\text{so dass}\quad & g_i(\vec{x}) = 0 \quad , i=1,\dots,m \\
& h_j(\vec{x}) \leq 0 \quad , j=1,\dots,s \\
& x_\ell \geq 0 \quad , \ell=1,\dots,k
\end{aligned}
$$

Die Behandlung des Problems ergibt sich aus den vorhergehenden Kapiteln. Die Lagrangefunktion mit den Lagrangemultiplikatoren $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, $\mu_1,\dots,\mu_s$ ist $L(\vec{x};\lambda_1,\dots,\lambda_m;\mu_1,\dots,\mu_s) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j h_j(\vec{x})$.

Die KKT-Bedingungen sind gegeben durch:

1) a) $\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_\ell}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial x_\ell}(\vec{x}) \geq 0$ ($=0$ falls $x_\ell > 0$), $\ell=1,\dots,k$

   b) $\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_\ell}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial x_\ell}(\vec{x}) = 0$, $\ell=k+1,\dots,n$

2) $\mu_j \geq 0$ mit $\mu_j = 0$ falls $h_j(\vec{x}) < 0$, $j=1,\dots,m$.

III.7 Numerische Verfahren zur Optimierung

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Gedanken zu numerischen Verfahren bei nichtlinearen Optimierungsproblemen skizziert. Ausgehend von einem Startwert $\vec{x}^{(0)}$ versucht man eine Folge von $\vec{x}^{(k)}$, $k=1,2,\dots$, zu bestimmen, die sich einer lokalen bzw. globalen Extremalstelle nähert oder auch einer Stelle, an der die notwendigen Optimalitätsbedingungen erfüllt sind. Prinzipiell kann man sich das so vorstellen, dass man versucht, ausgehend von einem $x^{(k)}$, in einer Richtung ein $x^{(k+1)}$ zu suchen, für das der Funktionswert kleiner ist. Wir betrachten im Folgenden beispielhaft grundlegende Verfahren mit unterschiedlichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die zu minimierende Funktion.

Zyklische Koordinatenmethode

Hierbei werden nacheinander die Richtungen der Koordinatenachsen als Suchrichtungen verwendet. Ausgehend von $\vec{x}^{(0)}$ sucht man zunächst ein Minimum in Richtung $\vec{e}_1$, von diesem Minimum ausgehend in Richtung $\vec{e}_2$ u.s.w. bis $\vec{e}_n$. Den dann erhaltenen Wert nennen wir $\vec{x}^{(1)}$ und suchen wieder in Richtung $\vec{e}_1$, etc.

Wir betrachten die Methode an einem einfachen Beispiel.

Beispiel 3.7.1: $\min f(x_1,x_2)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$

Hier ist klar, dass f an der Stelle $(2,1)$ ein absolutes Minimum besitzt.

Start: $\vec{x}^{(0)}=(0,3)^T$ mit $f(\vec{x})=52$

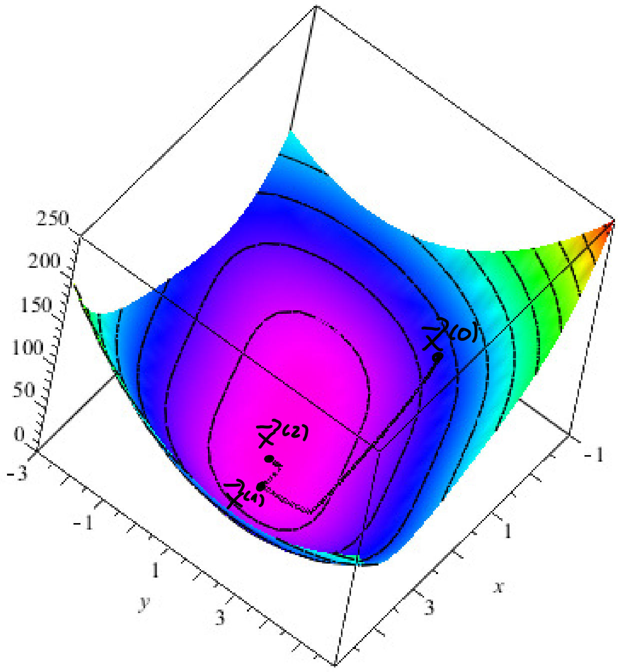
Ausgehend von $\vec{x}^{(0)}$ suchen wir in Richtung $\vec{e}_1=(1,0)^T$, d.h. wir suchen ein Minimum von $f(0+h,3)=(h-2)^4+(h-6)^2=\tilde{f}(h)$.

Das Minimum von $\tilde{f}(h)$ wird für $h\approx 3.13$ angenommen, d.h. wir suchen nun ausgehend von $(3.13,3)$ in Richtung $\vec{e}_2=(0,1)^T$ und müssen daher nun ein Minimum von

$f(3.13, 3+h) = 1.13^4 + (3.13 - 6 - 2h)^2 = \tilde{f}(h)$ bestimmen. Hier erhält man $h \approx -1.44$ und somit $\vec{x}^{(1)} = (3.13, 1.56)^T$ mit $f(\vec{x}^{(1)}) = 1.63\ldots$

Ausgehend von $\vec{x}^{(1)}$ sucht man nun zunächst wieder erst in Richtung $\vec{e}_1$, dann in Richtung $\vec{e}_2$ zur Bestimmung von $\vec{x}^{(3)}$.

Die ersten Iterationen sind in den unten stehenden Graphiken eingezeichnet und in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst.



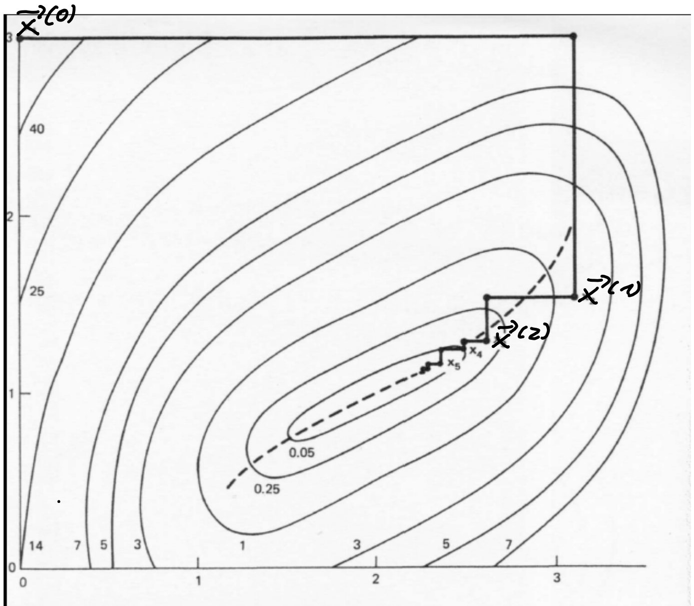


Figure 8.7 Illustration of the cyclic coordinate method.

k	$\vec{x}^{(k)}$ / $f(\vec{x}^{(k)})$	Suchrichtung	h	Zwischenwerte
0	$(0,3)^T$	$\vec{e}_1$	3.13	$(3.13, 3)^T$
	52	$\vec{e}_2$	-1.44	
1	$(3.13, 1.56)^T$	$\vec{e}_1$	-0.5	$(2.63, 1.56)^T$
	1.63	$\vec{e}_2$	-0.25	
2	$(2.63, 1.31)^T$	$\vec{e}_1$	-0.19	$(2.44, 1.31)^T$
	0.16	$\vec{e}_2$	-0.09	
3	$(2.44, 1.22)^T$	$\vec{e}_1$	-0.09	$(2.35, 1.22)^T$
	0.04	$\vec{e}_2$	-0.05	
4	$(2.35, 1.17)^T$	$\vec{e}_1$	-0.06	$(2.29, 1.17)^T$
	0.015	$\vec{e}_2$	-0.03	
5	$(2.29, 1.14)^T$	$\vec{e}_1$	-0.04	$(2.25, 1.14)^T$
		$\vec{e}_2$	-0.02	
6	$(2.25, 1.12)^T$	u.s.w.		
	0.004			

Methode des steilsten Abstiegs

Diese Methode setzt voraus, dass die zu minimierende Funktion eine C^1-Funktion ist. Ausgehend von einem Startwert $\vec{x}^{(0)}$ sucht man ein Minimum der Funktion in Richtung des steilsten Abstiegs, d.h. in Richtung des negativen Gradienten an der Stelle $\vec{x}^{(0)}$. Ausgehend von der Stelle $\vec{x}^{(1)}$ dieses Minimums sucht man dann weiter in Richtung des negativen Gradienten von $\vec{x}^{(1)}$ u.s.w.

Beispiel 3.7.2: $\min f(x_1, x_2) = (x_1-2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$

Es gilt $-\nabla f(\vec{x}) = (-4(x_1-2)^3 - 2(x_1-2x_2),\ 4(x_1-2x_2))^T$

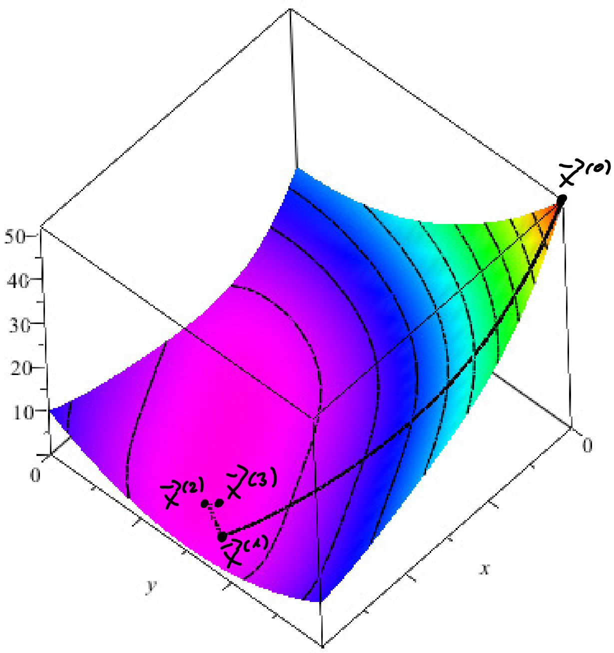
Start: $\vec{x}^{(0)} = (0,3)^T$, $-\nabla f(\vec{x}^{(0)}) = (44, -24)^T$.

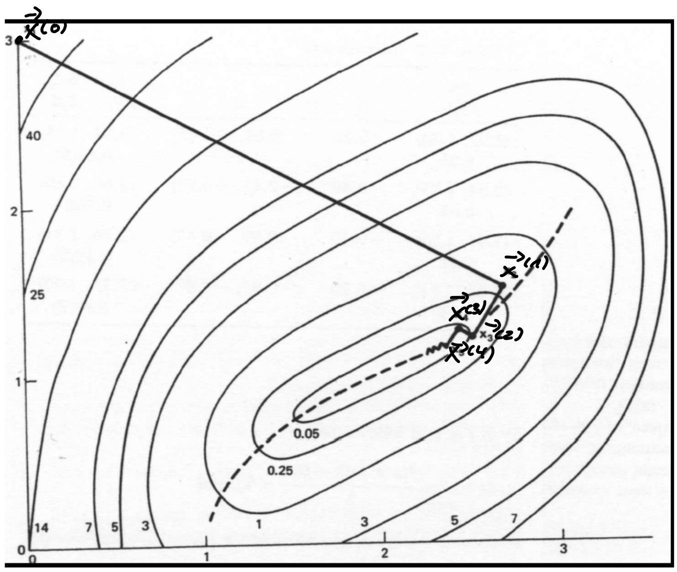
Wir suchen also ein Minimum von

$f(0+44h,\ 3-24h) = (44h-2)^4 + (92h-6)^2 = \tilde{f}(h)$. Das Minimum wird für $h \approx 0.0615$ angenommen.

Somit ist $\vec{x}^{(1)} = (2.7075, 1.5232)^T$ mit $f(\vec{x}^{(1)}) = 0.3653$.

Für $\vec{x}^{(1)}$ bestimmt man dann $-\nabla f(\vec{x}^{(1)})$ und das Minimum von f in dieser Richtung. Die ersten Iterationen sind in den Graphiken eingezeichnet und in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst.





k	$\vec{x}^{(k)}$	$f(\vec{x}^{(k)})$	$-\nabla f(\vec{x}^{(k)})$	h
0	$(0,3)^T$	52	$(44,-24)^T$	0.0615
1	$(2.7075,1.5232)^T$	0.3653	$(-0.7392,-1.3552)^T$	0.2301
2	$(2.5369,1.2104)^T$	0.0966	$(-0.8514,0.4644)^T$	0.1116
3	$(2.4419,1.2622)^T$	0.0450	$(-0.1801,-0.3302)^T$	0.2672
4	$(2.3940,1.1740)^T$	0.0261		

Bei beiden bisher vorgestellten Verfahren werden Minima in bestimmten Richtungen gesucht. Das bedeutet, dass man Minima von Funktionen einer Variablen bestimmen muss, was häufig auch nur iterativ möglich ist. Wir werden dies zum Schluss noch kurz diskutieren.

Newton-Verfahren

Dieses Verfahren beruht darauf, dass man die Funktion an den Iterierten jeweils durch eine quadratische Funktion approximiert. Dazu muss die zu minimierende Funktion eine C^2-Funktion sein.

Die quadratische Approximation an einer Stelle $x^{(k)}$ ist gegeben durch

$$q(\vec{x}) = f(\vec{x}^{(k)}) + (\vec{x}-\vec{x}^{(k)})^T \nabla f(\vec{x}^{(k)}) + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}^{(k)})^T H_f(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}-\vec{x}^{(k)})$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum von q ist

$$\nabla q(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}^{(k)}) + H_f(\vec{x}^{(k)})(x-\vec{x}^{(k)}) = \vec{0}$$

Wir nehmen an, dass $H_f(\vec{x}^{(k)})$ invertierbar ist. Dann ist $x^{(k+1)}$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\nabla q(\vec{x}^{(k+1)}) = \vec{0} \iff \nabla f(\vec{x}^{(k)}) + H_f(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)})$$

$$\iff \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - [H_f(\vec{x}^{(k)})]^{-1} f(\vec{x}^{(k)})$$

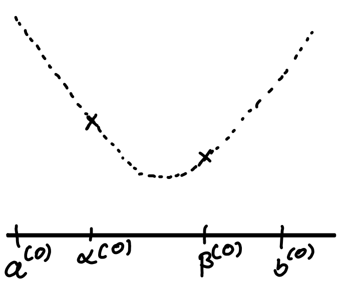
In jedem Iterationsschritt ist also die Hesse-Matrix zu bestimmen und ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Statt der Hesse-Matrix verwendet man häufig Näherungen.

Wir haben gesehen, dass die Bestimmung von Minima von Funktionen einer Variablen als Teilproblem bei numerischen Optimierungsverfahren auftritt. Auch dies ist häufig nur näherungsweise möglich.
Wir befassen uns daher zum Abschluss noch beispielhaft mit sogenannten Liniensuchmethoden.
Wir nehmen an, dass wir das Minimum einer strikt konvexen Funktion auf einem Intervall $[a,b]$ bestimmen wollen. Für alle $x, y \in [a,b]$ mit $x \neq y$ und $\lambda \in (0,1)$ soll also gelten:

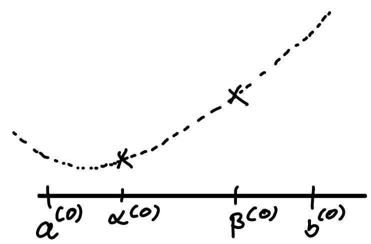
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Man geht nun so vor, dass man das Intervall, in dem das Minimum liegt, schrittweise durch Vergleich geeigneter Funktionswerte verkleinert.
Wir starten mit dem Intervall $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ und bestimmen die Funktionswerte $f(\alpha^{(0)})$, $f(\beta^{(0)})$ an zwei Stellen $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}$, für die $a^{(0)} < \alpha^{(0)} < \beta^{(0)} < b^{(0)}$ sein soll. Grundsätzlich können nun zwei verschiedene Fälle eintreten:

1. Fall: $f(\alpha^{(0)}) > f(\beta^{(0)})$. Dann gilt:
   $f(x) > f(\beta^{(0)})$ für alle $x \in [a^{(0)}, \alpha^{(0)})$.
   Setze $[a^{(1)}, b^{(1)}] = [\alpha^{(0)}, b^{(0)}]$.



2. Fall: $f(\alpha^{(0)}) \leq f(\beta^{(0)})$. Dann gilt:
   $f(x) > f(\alpha^{(0)})$ für alle $x \in (\beta^{(0)}, b^{(0)}]$.
   Setze $[a^{(1)}, b^{(1)}] = [a^{(0)}, \beta^{(0)}]$.



Mit dem Intervall $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ verfährt man dann genauso wie mit $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ u.s.w. In jedem Schritt erhält man ein kleineres Intervall. Ist $[a^{(k)}, b^{(k)}]$ klein genug, so nimmt man die Intervallmitte $\frac{1}{2}(a^{(k)} + b^{(k)})$ als Näherung für die Minimalstelle.

Für die Wahl von $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ gibt es prinzipiell natürlich viele Möglichkeiten. Sinnvoll ist es $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ so zu wählen, dass das neue Intervall auch signifikant kleiner ist als das alte und die Anzahl der nötigen Funktionsauswertungen klein zu halten.

Im Folgenden wählen wir $\alpha^{(i)}$ rechts und $\beta^{(i)}$ links vom Mittelpunkt des jeweiligen Intervalls mit gleichem Abstand vom Mittelpunkt.

Für $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ sei also

$$\alpha^{(i)} = a^{(i)} + \lambda(b^{(i)} - a^{(i)}) \qquad \beta^{(i)} = b^{(i)} - \lambda(b^{(i)} - a^{(i)})$$
$$= (1-\lambda)a^{(i)} + \lambda b^{(i)} \qquad = \lambda a^{(i)} + (1-\lambda) b^{(i)}$$

Bezeichnen wir mit L_i die Länge des Intervalls $[a^{(i)}, b^{(i)}]$, so gilt:

$$L_{i+1} = \beta^{(i)} - a^{(i)} = b^{(i)} - \alpha^{(i)}$$
$$= b^{(i)} - [(1-\lambda)a^{(i)} + \lambda b^{(i)}]$$
$$= (1-\lambda)[b^{(i)} - a^{(i)}] = (1-\lambda) L_i$$

Es gilt also die Differenzengleichung $L_{i+1} - (1-\lambda) L_i = 0$ mit $L_0 = b - a$.

Somit $L_i = (1-\lambda)^i (b-a)$. Da $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, wird L_i umso kleiner, je dichter λ am Wert $\frac{1}{2}$ gewählt wird. Im Allgemeinen sind zwei Funktionsauswertungen zur Bestimmung des neuen Intervalls nötig. Im Folgenden bestimmen wir $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ so, dass nur jeweils ein Funktionswert neu bestimmt werden muss.

Für den 1. Fall, d.h. $[a^{(i+1)}, b^{(i+1)}] = [\alpha^{(i)}, b^{(i)}]$ soll gelten:

$$\alpha^{(i+1)} = \beta^{(i)} \iff a^{(i+1)} + \lambda(b^{(i+1)} - a^{(i+1)}) = a^{(i)} + (1-\lambda)(b^{(i)} - a^{(i)})$$
$$\iff \alpha^{(i)} + \lambda(b^{(i)} - \alpha^{(i)}) = a^{(i)} + (1-\lambda)(b^{(i)} - a^{(i)})$$
$$\iff (1-\lambda)\alpha^{(i)} + \lambda b^{(i)} = \lambda a^{(i)} + (1-\lambda) b^{(i)}$$
$$\iff (1-\lambda)[(1-\lambda)a^{(i)} + \lambda b^{(i)}] + \lambda b^{(i)} = \lambda a^{(i)} + (1-\lambda) b^{(i)}$$
$$\iff (b^{(i)} - a^{(i)})\,[(1-\lambda)^2 + (1-\lambda) - 1] = 0$$
$$\iff (1-\lambda) = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Da $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ und somit $(1-\lambda) \in (\frac{1}{2}, 1)$ sein soll, folgt $(1-\lambda) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\alpha^{(i)}$ (bzw. $\beta^{(i)}$) teilen die Strecke $\overline{a^{(i)},b^{(i)}}$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts, d.h. $\frac{\text{Länge}(\overline{a^{(i)},b^{(i)}})}{\text{Länge}(\overline{a^{(i)},\beta^{(i)}})} = \frac{\text{Länge}(\overline{a^{(i)},\beta^{(i)}})}{\text{Länge}(\overline{\beta^{(i)},b^{(i)}})}$.

Analoge Betrachtungen und Umformungen führen auch im 2. Fall $[a^{(i+1)},b^{(i+1)}]=[a^{(i)},\beta^{(i)}]$ mit der Forderung $\beta^{(i+1)}=\alpha^{(i)}$ auf dasselbe Ergebnis. Außer beim 1. Schritt ist nur jeweils eine neue Funktionsauswertung erforderlich.

Beispiel 3.7.3: Das Startintervall sei $[a^{(0)},b^{(0)}]=[0,1]$ und die Funktion f strikt konvex auf $[0,1]$. Die Minimalstelle soll mit einer Genauigkeit von 10^{-5} bestimmt werden. Wir überlegen, wie viele Schritte und Funktionsauswertungen erforderlich sind für a) $\lambda_1=\frac{1}{3}$, $1-\lambda_1=\frac{2}{3}$ b) $\lambda_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $1-\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Da wir als Näherung für die Minimalstelle den Mittelpunkt des letzten bestimmten Intervalls verwenden wollen, soll also gelten $\frac{1}{2}\cdot L_i \le 10^{-5}$, d.h. (vgl. S. 6)

$$\frac{1}{2}(1-\lambda)^i \le 10^{-5} \iff i\cdot \underbrace{\ln(\underbrace{1-\lambda}_{<1})}_{<0} \le \ln(2\cdot 10^{-5})$$

$$\iff i > \frac{\ln(2\cdot 10^{-5})}{\ln(1-\lambda)}$$

a) $\lambda_1=\frac{1}{3}$, dann ist $\frac{\ln(2\cdot 10^{-5})}{\ln(1-\lambda_1)} = 26.68\ldots$

Also sind 27 Schritte mit insgesamt 54 Funktionsauswertungen erforderlich.

b) $\lambda_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$, dann ist $\frac{\ln(2\cdot 10^{-5})}{\ln(1-\lambda_2)} = 22.48\ldots$

Also sind 23 Schritte mit insgesamt 24 Funktionsauswertungen erforderlich.

Beispiel 3.7.4. Für $f(x)=x^2+2x$ starten wir mit dem Intervall $[a^{(0)},b^{(0)}]=[-3,3]$. In den nachfolgenden Tabellen sind die Intervalle $[a^{(i)},b^{(i)}]$ für $\lambda_1=\frac{1}{3}$ und für $\lambda_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ angegeben.

$\lambda_1 = \frac{1}{3}$

[-3., 3]
[-3., 1]
[-3., -0.3333333333]
[-2.111111111, -0.3333333333]
[-1.518518519, -0.3333333333]
[-1.518518519, -0.7283950617]
[-1.255144033, -0.7283950617]
[-1.255144033, -0.9039780521]
[-1.138088706, -0.9039780521]
[-1.060051821, -0.9039780521]
[-1.060051821, -0.9560026419]

$\lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

[-3., 3]
[-3., 0.708203928]
[-1.583592134, 0.708203928]
[-1.583592134, -0.167184274]
[-1.583592134, -0.7082039356]
[-1.249223595, -0.7082039356]
[-1.249223595, -0.9148550573]
[-1.121506178, -0.9148550573]
[-1.042572474, -0.9148550573]
[-1.042572474, -0.9636387696]
[-1.012422482, -0.9636387696]