

**Skript zur Vorlesung
Mathematik für Sicherheitstechniker
Sommersemester 2013
(Master Studiengang)**

© Prof. Dr. Margareta Heilmann

Bergische Universität Wuppertal

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Vorbemerkungen	1
1.2 Die komplexe Exponentialfunktion	2
1.3 Eigenschaften komplexwertiger Funktionen	2
1.4 Periodische Funktionen	4
1.5 Trigonometrische Polynome	7
2 Fourierreihen	11
2.1 Definition der Fourierreihe	12
2.2 Rechenregeln	16
2.3 Konvergenzverhalten	25
2.4 Anwendungsbeispiel: RC-Tiefpassfilter	27
3 Fouriertransformation	29
3.1 Uneigentliche Integrale	29
3.2 Definition der Fouriertransformation	32
3.3 Korrespondenzen und Rechenregeln	37
3.4 Inverse Fouriertransformation	44
3.5 Der Faltungssatz	45
3.5.1 Anwendungsbeispiel: Kreuz- und Autokorrelation	47
3.5.2 Anwendungsbeispiel: LTI-Systeme	50
3.6 Das Shannonsche Abtasttheorem	55
4 Laplace Transformation	56
4.1 Vorbemerkungen	56
4.2 Definition der Laplace Transformation	56
4.3 Korrespondenzen und Rechenregeln	58
4.4 Der Faltungssatz	64
4.5 Grenzwertsätze	65
4.6 Rücktransformation	65
4.7 Anwendung: Lösung von AWP für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	68

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Vorbemerkungen

In vielen technischen Bereichen spielt die Erzeugung, Speicherung, Verarbeitung, Übertragung und Wiedergabe von Signalen eine große Rolle.

Dazu werden mathematische Werkzeuge benötigt, die (zum Teil) im Rahmen dieser Vorlesung zur Verfügung gestellt werden sollen.

Bevor wir damit beginnen, betrachten wir zur Einstimmung einige akustische Signale und ihre mathematische Beschreibung.

Ein **idealer Ton** ist eine periodische Schwingung gleichbleibender Frequenz

$$x(t) = A \sin(2\pi\nu t), t \in \mathbb{R},$$

mit der Amplitude A , deren Größe für die Lautstärke verantwortlich ist, und der Frequenz ν , die die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit angibt und die Tonhöhe bestimmt. Wählt man als Einheit für die Zeitskala eine Sekunde, so wird die Frequenz in Hertz (Hz) angegeben (Anzahl der Schwingungen pro Sekunde). Äquivalent dazu kann man auch

$$x(t) = A \sin(\omega t), t \in \mathbb{R},$$

schreiben, wobei die Kreisfrequenz ω mit der Frequenz ν über die Gleichung $\omega = 2\pi\nu$ zusammenhängt.

Ein **realer Ton** ist ein Ausschnitt aus einem solchen periodischen Vorgang. Dabei muss die Tondauer wesentlich größer sein als die Periodenlänge, um tatsächlich einen Ton wahrnehmen zu können.

Ein **idealer Klang** ist eine Überlagerung (Summe) mehrerer Töne mit unterschiedlichen Amplituden und Frequenzen

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(2\pi\nu_k t), t \in \mathbb{R}.$$

Ein **realer Klang** ist auch hier wieder ein hinreichend langer Ausschnitt aus einem idealen Klang. Die von Instrumenten erzeugten Töne sind in diesem Sinne eigentlich Klänge, da der eigentliche Grundton der Frequenz ν von sogenannten Obertönen mit den Frequenzen $2\nu, 3\nu, \dots$ und vergleichsweise geringen Amplituden überlagert wird. Die Anteile an Obertönen sind verantwortlich für die unterschiedliche Klangfarbe verschiedener Instrumente.

Ein **Geräusch** ist ein akustischer Vorgang, der keine Periodizität erkennen lässt. Viele Frequenzen mit zum Teil extrem kurzen Tondauern kennzeichnen Geräusche.

Für die Verarbeitung von (akustischen) Signalen ist es wichtig zu wissen, welche Frequenzen vorkommen.

Das menschliche Gehör kann (abhängig vom Lebensalter) Frequenzen von circa 20 Hz bis 20 kHz wahrnehmen. Bei der Bildung bestimmter Konsonanten (z.B. s, z, f) sind Frequenzen von bis zu 10 kHz erforderlich. Sprache bleibt aber gut verständlich, wenn man Frequenzen oberhalb von 3.4 kHz unterdrückt.

Man bezeichnet den Frequenzbereich unterhalb von 20 Hz auch als *Infraschall*, den oberhalb von 20 kHz auch als *Ultraschall*, der beispielsweise in der Medizindiagnostik eine große Rolle spielt.

Die in dieser Veranstaltung vorgestellten Methoden werden insbesondere auch im Bereich der Regelungstechnik verwendet. In einem technischen System treten zeitabhängige Größen auf, die automatisch beeinflusst werden sollen. Will man beispielsweise bei einem Elektromotor einen bestimmten Drehzahlverlauf einhalten, mit welcher der Motor betrieben wird, so dient die elektrische Spannung als Stellgröße des Systems. Durch geeignete Veränderung der Spannung während des Betriebes lässt sich ein gewünschter Drehzahlverlauf des Motors herstellen.

1.2 Die komplexe Exponentialfunktion

Im Verlauf der Vorlesung werden wir ständig mit der komplexen Exponentialfunktion arbeiten. Wir stellen daher vorab die Definition und einige Eigenschaften zusammen.

1.2.1 Definition (Komplexe Exponentialfunktion)

Für $z \in \mathbb{C}$ und der kartesischen Darstellung $z = x + jy$ ist die *komplexe Exponentialfunktion* definiert durch

$$e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy}.$$

1.2.2 Bemerkung

- a) Wegen der Eulerschen Formel ($e^{jy} = \cos y + j \sin y$) kann man für e^z auch

$$e^z = e^x(\cos y + j \sin y)$$

schreiben.

- b) Für Real- und Imaginärteil bzw. Betrag und Argument (Winkel) von e^z gilt

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y, |e^z| = e^x, \arg e^z = y$$

- c) Es gelten folgende Eigenschaften und Rechenregeln:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

$$e^{j2k\pi} = 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{j(2k+1)\pi} = -1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{j(2k+\frac{1}{2})\pi} = j \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{j(2k-\frac{1}{2})\pi} = -j \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{z+j2k\pi} = e^z \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

1.3 Eigenschaften komplexwertiger Funktionen

Im Verlauf der Vorlesung werden wir es häufig mit Funktionen zu tun haben, bei denen zwar der Definitionsbereich in der Menge der reellen Zahlen liegt, der Bildbereich aber in der Menge der komplexen Zahlen liegt. Wir stellen daher vorab einige Definitionen und Eigenschaften zur Verfügung.

1.3.1 Definition

Sei $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $x(t) = u(t) + jv(t)$ mit $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) x heißt *stückweise stetig*, wenn u und v bis auf höchstens endlich viele Stellen stetig sind. An den Ausnahmestellen dürfen u und v nur endliche Sprünge aufweisen.
- b) x heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn u und v bis auf höchstens endlich viele Stellen stetig differenzierbar sind. An den Ausnahmestellen dürfen u' und v' nur endliche Sprünge aufweisen.

1.3.2 Bemerkung

a) Ist $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $t \in (a, b)$, so ist die Ableitung durch

$$x'(t) = u'(t) + jv'(t)$$

gegeben.

b) Die für reelle Funktionen bekannten Ableitungsregeln wie Produkt-, Quotienten- und Kettenregel gelten analog.

1.3.3 Beispiel

a) Sei $x(t) = (t^2 + 2t + jt^3)^4$. Dann gilt

$$\begin{aligned}u(t) &= 16t^4 + 32t^5 + 24t^6 + 8t^7 - 23t^8 - 24t^9 - 6t^{10} + t^{12} \\v(t) &= 32t^6 + 48t^7 + 24t^8 + 4t^9 - 8t^{10} - 4t^{11}\end{aligned}$$

Somit ist $x'(t) = u'(t) + jv'(t)$ mit

$$\begin{aligned}u'(t) &= 64t^3 + 160t^4 + 144t^5 + 56t^6 - 184t^7 - 216t^8 - 60t^9 + 12t^{11} \\v'(t) &= 192t^5 + 336t^6 + 192t^7 + 36t^8 - 80t^9 - 44t^{10}\end{aligned}$$

Einfacher erhält man durch Anwendung der Kettenregel

$$x'(t) = 4(t^2 + 2t + jt^3)^3(2t + 2 + 3jt^2)$$

b) Für $x(t) = e^{4jt}$ erhält man

$$x'(t) = 4j e^{4jt}$$

Wichtig für die im folgenden auftretenden Berechnungen von Stammfunktionen und bestimmten Integralen ist:

1.3.4 Bemerkung

$x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $x(t) = u(t) + jv(t)$ stückweise stetig, so ist

$$\begin{aligned}\int x(t) dt &= \int u(t) dt + j \int v(t) dt \\ \int_a^b x(t) dt &= \int_a^b u(t) dt + j \int_a^b v(t) dt\end{aligned}$$

1.3.5 Beispiel

Dieses Beispiel werden wir in der Vorlesung in dieser oder ähnlicher Form permanent wieder verwenden.

$$\begin{aligned}\int e^{jt} dt &= \int \cos t dt + j \int \sin t dt \\ &= \sin t - j \cos t + C \\ &= \sin t + \frac{1}{j} \cos t + C \\ &= \frac{1}{j}(\sin t + \cos t) + C \\ &= \frac{1}{j} e^{jt} + C\end{aligned}$$

Damit ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{jt} dt &= \frac{1}{j} e^{jt} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{j} (e^{j\pi} - e^0) \\ &= -2 \frac{1}{j} \\ &= 2j \end{aligned}$$

1.3.6 Bemerkung

Die bekannten Regeln für die Integration reeller Funktionen gelten auch für komplexwertige Funktionen: Ist $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a)$$

mit $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Stammfunktion zu g , d. h. $G' = g$.

Es gilt die Regel für die partielle Integration.

1.3.7 Beispiel

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \cdot e^{jt} dt &= t \cdot \underbrace{\frac{1}{j}}_{=-j} e^{jt} \Big|_0^\pi - \frac{1}{j} \int_0^\pi e^{jt} dt \\ &= \underbrace{-j\pi e^{j\pi}}_{=-1} - \underbrace{\frac{1}{j^2}}_{=-1} e^{jt} \Big|_0^\pi \\ &= j\pi - 2 \end{aligned}$$

1.4 Periodische Funktionen

1.4.1 Definition (Periodische Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt periodisch mit der Periode T , $T > 0$, (kurz T -periodisch), wenn

$$f(t + T) = f(t), \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1.4.2 Beispiel

- a) $\sin t$ und $\cos t$, $t \in \mathbb{R}$, sind 2π -periodisch.
- b) $\tan t$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{t \mid t = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
 $\cot t$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{t \mid t = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sind π -periodisch.
- c) $\cos t + j \sin t = e^{jt}$, $t \in \mathbb{R}$, ist 2π -periodisch.

Oft ist es üblich und zweckmäßig, sich auf die Betrachtung 2π -periodischer Funktionen zu beschränken. Dies wird durch folgende Überlegung gerechtfertigt.

1.4.3 Satz

Ist $\tilde{x}(\tau)$ T -periodisch, so ist $x(t) = \tilde{x}(t/\omega)$, $\omega = 2\pi/T$, 2π -periodisch.

Beweis:

$$\begin{aligned}x(t + 2\pi) &= \tilde{x}\left(\frac{t + 2\pi}{\omega}\right) \text{ nach Definition von } x \\&= \tilde{x}\left(\frac{t}{\omega} + T\right) \\&= \tilde{x}\left(\frac{t}{\omega}\right) \text{ da } \tilde{x} \text{ } T\text{-periodisch} \\&= x(t) \text{ nach Definition von } x\end{aligned}$$

□

Oftmals wird eine Funktion nur explizit auf einem Intervall $[0, T]$ vorgegeben und dann periodisch fortgesetzt, d.h. man bestimmt eine periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0, T]$ mit der Ausgangsfunktion übereinstimmt. Sei nun $g(t)$ definiert auf $[0, T]$.

a) Direkte Fortsetzung:

Man zerlegt \mathbb{R} in die Intervalle $I_k = [kT, (k + 1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, der Länge T und definiert $x(t)$ auf \mathbb{R} durch

$$x(t) = g(t - kT), t \in I_k.$$

Die so definierte Funktion ist dann T -periodisch.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph von g über jedes Intervall $I_k = [kT, (k + 1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, verschoben wird.

b) Gerade Fortsetzung:

Man zerlegt \mathbb{R} in die Intervalle $I_k = [(2k - 1)T, (2k + 1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, der Länge $2T$ und definiert $x(t)$ auf \mathbb{R} durch

$$x(t) = g(-t), t \in [-T, 0), \text{ und } x(t) = g(t - 2kT) t \in I_k.$$

Die so definierte Funktion ist dann $2T$ -periodisch.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph von g zunächst an der Ordinatenachse gespiegelt wird. Die entstehende gerade Funktion wird dann über jedes Intervall $I_k = [(2k - 1)T, (2k + 1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, verschoben.

c) Ungerade Fortsetzung:

Man zerlegt \mathbb{R} wieder in die Intervalle $I_k = [(2k - 1)T, (2k + 1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, der Länge $2T$ und definiert $x(t)$ auf \mathbb{R} durch

$$x(t) = -g(-t), t \in [-T, 0), \text{ und } x(t) = g(t - 2kT) t \in I_k.$$

Die so definierte Funktion ist dann $2T$ -periodisch.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph von g zunächst am Koordinatenursprung gespiegelt wird. Die entstehende ungerade Funktion wird dann über jedes Intervall $I_k = [(2k - 1)T, (2k + 1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, verschoben.

1.4.4 Beispiel

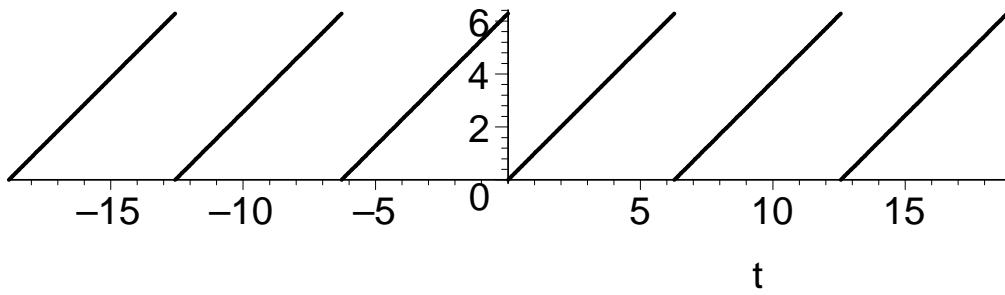
Sei $g(t) = t$ für $t \in [0, T]$, $T > 0$.

a) Direkte Fortsetzung:

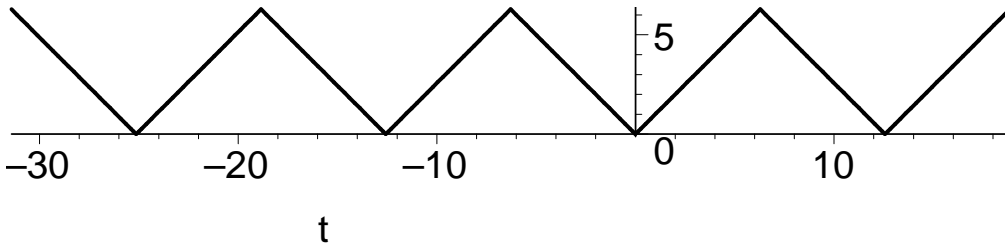
$$x(t) = t - kT, t \in [kT, (k + 1)T), k \in \mathbb{Z}.$$

b) Gerade Fortsetzung:

$$x(t) = |t - 2kT|, t \in [(2k - 1)T, (2k + 1)T), k \in \mathbb{Z}.$$



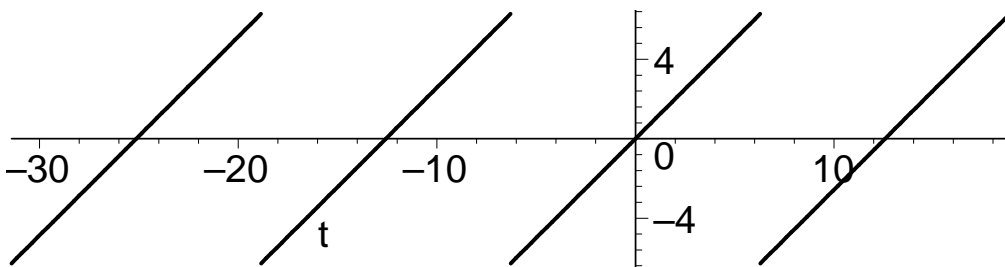
Direkte Fortsetzung, $T = 2\pi$



Gerade Fortsetzung, $T = 2\pi$

c) Ungerade Fortsetzung:

$$x(t) = t - 2kT, t \in [(2k - 1)T, (2k + 1)T), k \in \mathbb{Z}.$$



Ungerade Fortsetzung, $T = 2\pi$

1.4.5 Bemerkung

Es ist üblich, für die ursprüngliche Funktion und ihre periodische Fortsetzung dieselbe Bezeichnung zu verwenden. so kann man für die Funktionen in Beispiel 1.4.4 auch schreiben:

a) Direkte Fortsetzung:

$$x(t) = t, t \in [0, T), x(t) \text{ } T\text{-periodisch.}$$

b) Gerade Fortsetzung:

$$x(t) = |t|, t \in [-T, T), x(t) \text{ } 2T\text{-periodisch.}$$

c) Ungerade Fortsetzung:

$$x(t) = t, t \in [-T, T), x(t) \text{ } 2T\text{-periodisch.}$$

1.5 Trigonometrische Polynome

Trigonometrische Polynome sind Linearkombinationen der T -periodischen Funktionen

$$1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \cos(3\omega t), \sin(3\omega t), \dots$$

bzw. in komplexer Darstellung der Funktionen

$$1, e^{j\omega t}, e^{-j\omega t}, e^{j\cdot 2\omega t}, e^{-j\cdot 2\omega t}, e^{j\cdot 3\omega t}, e^{-j\cdot 3\omega t}, \dots$$

Dabei ist wieder $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

1.5.1 Definition (Trigonometrisches Polynom)

Sei $N \in \mathbb{N}$. Jede Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Bauart

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

bzw.

$$x(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega t}$$

heißt trigonometrisches Polynom. $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \in \mathbb{C}$ bzw. $c_n \in \mathbb{C}$ heißen Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms. Für $|a_N| + |b_N| \neq 0$ bzw. $|c_{-N}| + |c_N| \neq 0$ ist N der Grad von $x(t)$.

1.5.2 Bemerkung

Wir erinnern noch einmal an die Eulersche Formel

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi,$$

woraus sich die Darstellungen

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) \end{aligned}$$

ergeben.

Mit Hilfe der Eulerschen Formel lassen sich die beiden in Definition 1.5.1 genannten Darstellungen ineinander umrechnen.

1.5.3 Satz

Für $n = 1, 2, \dots, N$ gelten die Umrechnungsformeln

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}a_0, & c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n), & c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \\ a_0 &= 2c_0, & a_n &= c_n + c_{-n}, & b_n &= j(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N \{[c_n + c_{-n}] \cos(n\omega t) + j[c_n - c_{-n}] \sin(n\omega t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_0 + \sum_{n=1}^N \{c_n [\cos(n\omega t) + j \sin(n\omega t)]\} + \sum_{n=1}^N \{c_{-n} [\cos(n\omega t) - j \sin(n\omega t)]\} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{j \cdot n\omega t} + \sum_{n=-N}^{-1} \{c_n [\cos(-n\omega t) - j \sin(-n\omega t)]\} \\
&= \sum_{n=0}^N c_n e^{j \cdot n\omega t} + \sum_{n=-N}^{-1} \{c_n [\cos(n\omega t) + j \sin(n\omega t)]\} \\
&= \sum_{n=0}^N c_n e^{j \cdot n\omega t} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{j \cdot n\omega t} \\
&= \sum_{n=-N}^N c_n e^{j \cdot n\omega t}
\end{aligned}$$

□

Die Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms lassen sich mit Hilfe bestimmter Integrale ausdrücken. Um dies zeigen zu können, verwendet man die im folgenden Satz angegebenen Orthogonalitätseigenschaften.

1.5.4 Satz

a) Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T \sin(m\omega t) \sin(n\omega t) dt &= \begin{cases} 0 & \text{falls } m = n = 0 \\ 0 & \text{falls } m \neq n \\ \frac{1}{2} & \text{falls } m = n \neq 0 \end{cases} \\
\frac{1}{T} \int_0^T \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) dt &= \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n = 0 \\ 0 & \text{falls } m \neq n \\ \frac{1}{2} & \text{falls } m = n \neq 0 \end{cases} \\
\frac{1}{T} \int_0^T \sin(m\omega t) \cos(n\omega t) dt &= 0
\end{aligned}$$

b) Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{j \cdot m\omega t} e^{-j \cdot n\omega t} dt = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

Beweis:

a) Für den Beweis der Orthogonalitätseigenschaften vgl. 1. Übungsblatt.

b) Für $n = m$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T e^{j \cdot n\omega t} e^{-j \cdot n\omega t} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

Für $n \neq m$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T e^{j \cdot m\omega t} e^{-j \cdot n\omega t} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j \cdot (m-n)\omega t} dt \\
&= \frac{1}{T} \frac{1}{j \cdot (m-n)\omega} e^{j \cdot (m-n)\omega t} \Big|_0^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \frac{1}{j \cdot (m-n)\omega} (e^{j \cdot (m-n)\omega T} - 1) \\
&= \frac{1}{T} \frac{1}{j \cdot (m-n)\omega} (e^{j \cdot (m-n) \cdot 2\pi} - 1) \text{ wegen } \omega = \frac{2\pi}{T} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Zusätzlich zu weiteren Eigenschaften trigonometrischer Polynome können wir nun die angekündigten Berechnungsformeln für die Koeffizienten angeben.

1.5.5 Satz

Für ein trigonometrisches Polynom $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

a) x hat in $[0, T)$ höchstens $2N$ verschiedene Nullstellen.

b) Wichtig im Zusammenhang mit Koeffizientenvergleich ist:

$$x(t) = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \iff c_n = 0, -N \leq n \leq N$$

c) Zur Charakterisierung reellwertiger trigonometrischer Polynome gilt:

$$x(t) \in \mathbb{R} \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \iff c_n = c_{-n}^*, 0 \leq n \leq N$$

d) Für die Koeffizienten von $x(t)$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt, \quad 0 \leq n \leq N, \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt, \quad 1 \leq n \leq N, \\
c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j \cdot n\omega t} dt, \quad -N \leq n \leq N.
\end{aligned}$$

Beweis:

a) Analog zu entsprechenden Eigenschaften algebraischer Polynome; wird hier nicht bewiesen.

b) Ebenso.

c)

$$\begin{aligned}
&x(t) \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\
\iff &x(t) - (x(t))^* = 0, t \in \mathbb{R} \\
\iff &\sum_{n=-N}^N c_n e^{j \cdot n\omega t} - \left(\sum_{n=-N}^N c_n e^{j \cdot n\omega t} \right)^* = 0, t \in \mathbb{R} \\
\iff &\sum_{n=-N}^N c_n e^{j \cdot n\omega t} - \sum_{n=-N}^N c_n^* e^{-j \cdot n\omega t} = 0, t \in \mathbb{R} \\
\iff &\sum_{n=-N}^N c_n e^{j \cdot n\omega t} - \sum_{n=-N}^N c_{-n}^* e^{j \cdot n\omega t} = 0, t \in \mathbb{R} \\
\iff &\sum_{n=-N}^N (c_n - c_{-n}^*) e^{j \cdot n\omega t} = 0, t \in \mathbb{R} \\
\iff &c_n - c_{-n}^* = 0, -N \leq n \leq N
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j \cdot n \omega t} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{m=-N}^N c_m e^{j \cdot m \omega t} \right) e^{-j \cdot n \omega t} dt \\ &= \sum_{m=-N}^N c_m \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T e^{j \cdot m \omega t} e^{-j \cdot n \omega t} dt}_{\substack{1 \text{ falls } n = m \\ 0 \text{ falls } n \neq m}} \\ &= c_n\end{aligned}$$

Kapitel 2

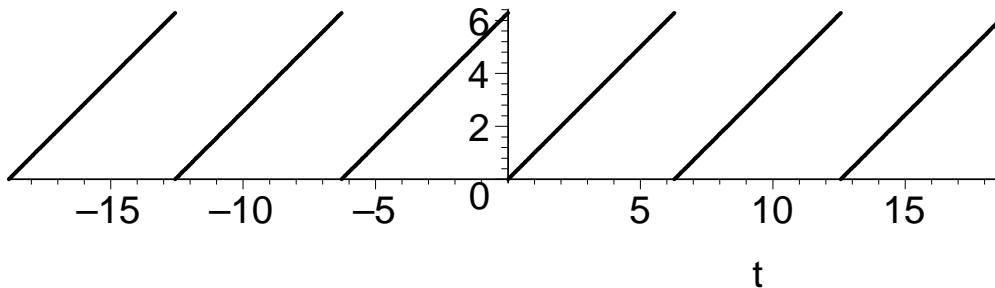
Fourierreihen

Viele zeitliche Vorgänge, wie z.B. Die Schwingung eines (idealen) Pendels, Wechselspannungen, etc. lassen sich durch zeitabhängige Funktionen der Form

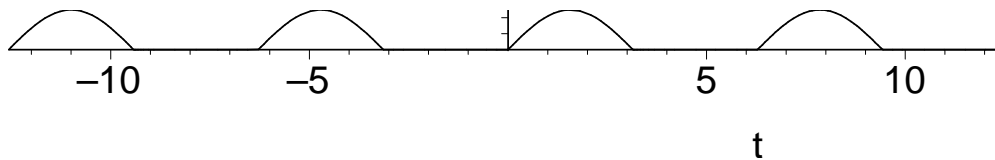
$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

beschreiben. Man spricht von sogenannten harmonischen Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω und der Amplitude A . Mit φ bezeichnet man die Phasenverschiebung oder den Nullphasenwinkel.

In Anwendungen hat man es häufig auch mit Vorgängen zu tun, die zwar periodisch sind, sich aber nicht mehr in der oben genannten einfachen Form beschreiben lassen. Beispiele hierfür sind Kippspannungen (Sägezahn)



und der Sinusimpuls eines Gleichrichters.



Bei der Analyse zeitlich periodischer Vorgänge (Signale, Funktionen), geht es im wesentlichen darum, das Spektrum, d.h. die im Signal enthaltenen Anteile der Grundkreisfrequenz und Vielfacher davon (sog. Harmonische) zu bestimmen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von harmonischer Analyse.

Umgekehrt möchte man aus der Kenntniss des Spektrums das Signal (die Funktion) rekonstruieren. Diesen Vorgang bezeichnet man mit Synthese.

Mathematisch geschieht dies mit Hilfe von Fourierreihen.

2.1 Definition der Fourierreihe

2.1.1 Definition (Fourierreihe, Fourierkoeffizienten)

Seien $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und x T -periodisch fortgesetzt. Dann ist die Fourierreihe von $x(t)$ definiert durch die Zuordnung

$$S\{x\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)],$$

wobei die sogenannten Fourierkoeffizienten durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

gegeben sind.

2.1.2 Bemerkung

- Wegen der Periodizität von x , \sin und \cos kann man bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten statt über $[0, T]$ auch über jedes andere Intervall der Länge T integrieren, z.B. $[-T/2, T/2]$.
- Auch bei den Fourierreihen beschränkt man sich häufig auf die Betrachtung 2π -periodischer Funktionen. Ist also speziell $T = 2\pi$, dann ist $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ und die in Definition 2.1.1 angegebenen Formeln vereinfachen sich zu

$$S\{x\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

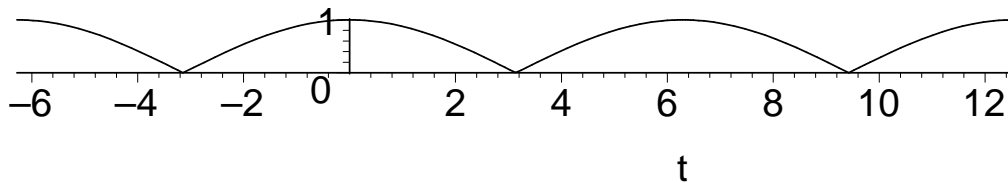
mit den Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Weder die Konvergenz der Fourierreihe, noch die Gleichheit $S\{x\}(t) = x(t)$ an einzelnen Stellen t sind von vornherein gesichert. Auf diese Fragestellungen werden wir an späterer Stelle eingehen.

2.1.3 Beispiel

Sei $x(t) = \cos(t/2)$, $t \in [-\pi, \pi)$, $x(t)$ 2π -periodisch oder gleichbedeutend damit $x(t) = |\cos(t/2)|$, $t \in \mathbb{R}$.



Berechnung der Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{\pi},$$

$$\text{d.h. } \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos \frac{t}{2}}^{\text{gerade}} \overbrace{\cos(nt)}^{\text{gerade}} dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} \cos(nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left[\cos\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)t\right) + \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)t\right) \right] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{1-2n} \sin\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)t\right) + \frac{2}{1+2n} \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)t\right) \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{1-2n} \left\{ \underbrace{\sin\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)\pi\right)}_{=(-1)^n} - \sin 0 \right\} + \frac{1}{1+2n} \left\{ \underbrace{\sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi\right)}_{=(-1)^n} - \sin 0 \right\} \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{4}{\pi} (-1)^n \frac{1}{1-4n^2} \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos \frac{t}{2}}^{\text{gerade}} \overbrace{\sin(nt)}^{\text{ungerade}} dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Die Fourierreihe lautet somit:

$$S\{x\}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1-4n^2} \cos(nt)$$

2.1.4 Bemerkung

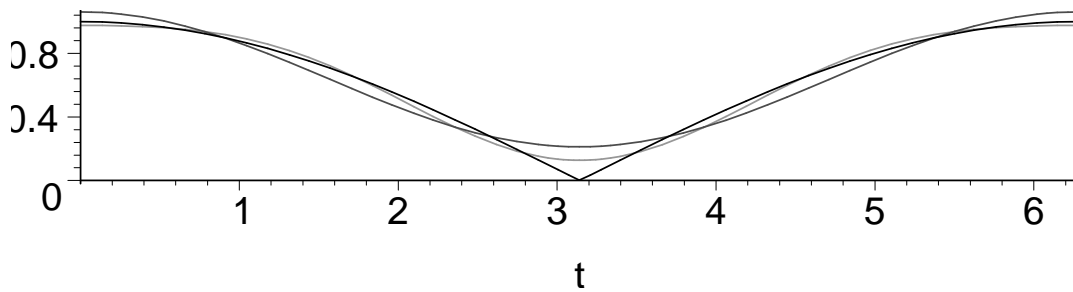
Konvergiert die Fourierreihe gegen die Funktion, so kann man ihre Partialsummen für die Approximation der Funktion verwenden. Unter welchen Umständen dies der Fall ist, behandeln wir an späterer Stelle. Konkret bedeutet das, dass man $x(t)$ durch die N -te, $N \in \mathbb{N}$, Teilsumme, also durch ein trigonometrisches Polynom vom Höchstgrad N annähert:

$$S_N\{x\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

2.1.5 Beispiel

Zu $x(t) = |\cos(t/2)|$, $t \in \mathbb{R}$, betrachten wir (vgl. auch Beispiel 2.1.3)

$$S_N\{x\}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{1}{1-4n^2} \cos(nt), \quad N = 1, 2.$$



Approximationen für $N = 1$ und $N = 2$

2.1.6 Bemerkung

Statt in der oben angegebenen Form kann man die Fourierreihe auch als Sinusreihe plus Gleichanteil darstellen. Dazu werden die Terme mit gleichen Frequenzen zusammengefasst, d.h.

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

mit

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ und } \varphi_n = \begin{cases} \arctan \frac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } b_n = 0, a_n > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } b_n = 0, a_n < 0 \\ \pi + \arctan \frac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n < 0 \end{cases}$$

Die A_n sind die jeweiligen Amplituden (maximalen Auslenkungen) und die φ_n die zugehörigen Phasenverschiebungen (Nullphasenwinkel).

Die Fourierreihe erhält dann die Form

$$S\{x\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Stellt man die Amplituden A_n und die Nullphasenwinkel φ_n als Funktion von n dar, so erhält man die sogenannten Amplituden- und Phasenspektren, die nur zu diskreten Werten Funktionswerte besitzen. Sie werden dargestellt, indem an den entsprechenden Werten für n Linien der Höhen A_n bzw. φ_n eingetragen werden. Sie werden daher auch als Linienspektren bezeichnet.

2.1.7 Beispiel

Für $x(t) = |\cos(t/2)|$, $t \in \mathbb{R}$, lesen wir aus Beispiel 2.1.3 einen Gleichanteil von $\frac{2}{\pi}$, Amplituden $A_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2-1}$ und Phasenverschiebungen von $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$ ab. Somit ist

$$S\{x\}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \sin\left(nt + \frac{\pi}{2}\right).$$

2.1.8 Bemerkung

- a) Oft viel einfacher zu handhaben ist die Darstellung der Fourierreihe mit Hilfe der Funktionen e^{jnt} , $n \in \mathbb{Z}$. Die Fourierreihe lässt sich damit auch in der Form

$$S\{x\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt, n \in \mathbb{Z},$$

darstellen.

b) Im Fall $T = 2\pi$, d.h. $\omega = 1$, gilt

$$S\{x\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt}$$

mit den Fourierkoeffizienten

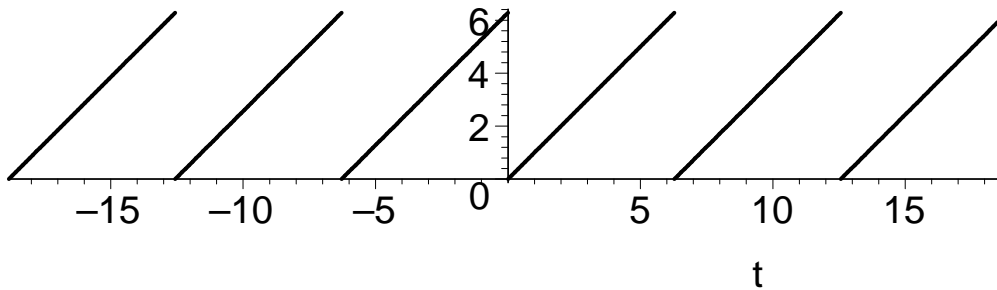
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-jnt} dt \quad n \in \mathbb{Z}.$$

c) Für die Umrechnung der Koeffizienten gelten wieder die Formeln (vgl. Satz 1.4.3)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} a_0, & c_n &= \frac{1}{2}(a_n - j b_n), & c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \\ a_0 &= 2c_0, & a_n &= c_n + c_{-n}, & b_n &= j(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

2.1.9 Beispiel (Kippspannung, Sägezahn)

Sei $x(t) = t$, $t \in [0, 2\pi)$, $x(t)$ 2π -periodisch.



Berechnung der Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Für $n \neq 0$ erhält man mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t e^{-jnt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{jn} t e^{-jnt} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{jn} \int_0^{2\pi} e^{-jnt} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{jn} t e^{-jnt} - \frac{1}{(jn)^2} e^{-jnt} \right\} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{jn} 2\pi \underbrace{e^{-jn \cdot 2\pi}}_{=1} - \frac{1}{(jn)^2} \left[\underbrace{e^{-jn \cdot 2\pi}}_{=1} - \underbrace{e^0}_{=1} \right] \right\} \\ &= \frac{j}{n} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe lautet somit:

$$S\{x\}(t) = \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jnt}$$

2.1.10 Beispiel

Mit den Umrechnungsformeln aus Bemerkung 2.1.8 erhalten wir für $x(t) = |\cos(t/2)|$, $t \in \mathbb{R}$, die Fourierkoeffizienten (vgl. Beispiel 2.1.3)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi} \\ c_n &= \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{falls } n > 0 \\ \frac{a_{-n}}{2} & \text{falls } n < 0 \end{cases} = 2(-1)^n \frac{1}{\pi(1-4n^2)}, \end{aligned}$$

d.h. die Darstellung

$$\begin{aligned} S\{x\}(t) &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-4n^2)} e^{jnt} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-4n^2)} e^{jnt} \end{aligned}$$

für die Fourierreihe.

2.2 Rechenregeln

In diesem Abschnitt werden einige Rechenregeln zusammengestellt, die die Bestimmung der Fourierreihen bzw. Fourierkoeffizienten zum Teil erheblich vereinfacht. Für konkrete Anwendungen ist dies daher ein besonders wichtiger Abschnitt.

Im folgenden seien $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodische und auf $[0, T]$ stückweise stetige Funktionen mit den Fourierreihen $S\{x\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$, $S\{y\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega t}$.

2.2.1 Satz (Linearität)

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sind die Fourierkoeffizienten von $\alpha x + \beta y$ durch $\alpha c_n + \beta d_n$ gegeben, d.h. es gilt

$$S\{\alpha x + \beta y\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha c_n + \beta d_n) e^{jn\omega t}.$$

Beweis: Nach Definition gilt für die Fourierkoeffizienten von $\alpha x + \beta y$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha x(t) + \beta y(t)) e^{-jn\omega t} dt &= \alpha \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} + \beta \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} \\ &= \alpha c_n + \beta d_n \end{aligned}$$

□

2.2.2 Beispiel

Seien $x(t) = |\cos t/2|$, $t \in \mathbb{R}$ und $y(t) = t$, $t \in [0, 2\pi)$, y 2π -periodisch.

Nach Beispiel 2.1.10 und Beispiel 2.1.9 sind die Fourierreihen durch

$$\begin{aligned} S\{x\}(t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-4n^2)} e^{jnt} \\ S\{y\}(t) &= \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jnt} \end{aligned}$$

gegeben.

Die zugehörigen Fourierkoeffizienten sind

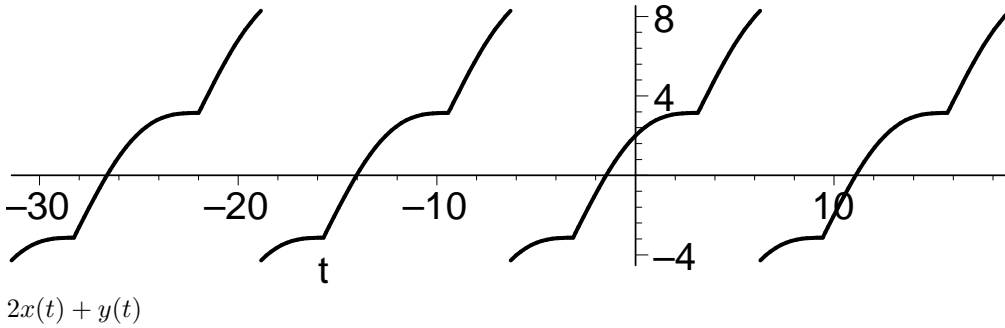
$$c_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{1}{(1-4n^2)}, n \in \mathbb{Z}, d_0 = \pi, d_n = \frac{j}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$2x(t) + y(t) = 2|\cos \frac{t}{2}| + t - 2k\pi, t \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z},$$

bzw. gleichbedeutend

$$z(t) = 2x(t) + y(t) = 2|\cos \frac{t}{2}| + t, t \in [0, 2\pi), z \text{ } 2\pi\text{-periodisch.}$$



Die zugehörigen Fourierkoeffizienten sind somit durch

$$2c_0 + d_0 = \frac{4}{\pi} + \pi$$

und für $n \neq 0$ durch

$$2c_n + d_n = \frac{4}{\pi}(-1)^n \frac{1}{1-4n^2} + \frac{j}{n}$$

gegeben. Die Fourierreihe von $2x(t) + y(t)$ lautet somit

$$S\{2x + y\}(t) = \frac{4}{\pi} + \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi}(-1)^n \frac{1}{1-4n^2} + \frac{j}{n} \right) e^{jnt}.$$

2.2.3 Satz (Zeitumkehr, Konjugation)

a) Sei $\tilde{x}(t) = x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = c_{-n},$$

d.h. für die Fourierreihe

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{jn\omega t}.$$

b) Sei $\tilde{x}(t) = x^*(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = c_{-n}^*,$$

d.h. für die Fourierreihe

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{jn\omega t}.$$

Beweis:

a) Mit der Substitution $\tau = -t$ erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(-t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^0 x(\tau) e^{jn\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{-j(-n)\omega\tau} d\tau \\ &= c_{-n}\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) e^{jn\omega t})^* dt \\ &= \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j(-n)\omega t} dt \right)^* \\ &= c_{-n}^*\end{aligned}$$

□

2.2.4 Satz (Dilatation, Skalierung)

Sei $\tilde{x}(t) = x(ct)$, $t \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = c_n,$$

d.h. für die Fourierreihe

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{T}c.$$

Beweis: Wenn $x(t)$ T -periodisch ist, so ist $\tilde{x}(t)$ T/c -periodisch. Mit der Substitution $\tau = ct$ erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{c}{T} \int_0^{T/c} \tilde{x}(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{c}{T} \int_0^{T/c} x(ct) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{jn\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau \\ &= c_n\end{aligned}$$

□

2.2.5 Bemerkung

Der Skalierungssatz besagt, dass eine Änderung der Frequenz oder Zeitskala keinen Einfluss auf die Amplituden der Teilschwingungen hat.

2.2.6 Beispiel

Für die Funktion $x(t) = t$, $t \in [0, 2\pi)$, x 2π -periodisch (Sägezahn) gilt (vgl. Beispiel 2.1.9)

$$c_0 = \pi, \quad c_n = \frac{j}{n} \text{ für } n \neq 0,$$

d.h.

$$S\{x\}(t) = \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jnt}$$

Für $\tilde{x}(t) = x(2t)$, d.h. $\tilde{x}(t) = 2t$, $t \in [0, \pi)$, \tilde{x} π -periodisch gilt dann

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jn \cdot 2t}$$

Verschiebt man eine Funktion $x(t)$ um t_0 auf der t -Achse (im Zeitbereich), so ergeben sich die Fourierkoeffizienten der verschobenen Funktion durch Multiplikation eines sogenannten Phasenfaktors. Genauer gilt:

2.2.7 Satz (1. Verschiebungssatz, Translation)

Sei $\tilde{x}(t) = x(t - t_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = e^{-jn\omega t_0} c_n,$$

d.h. für die Fourierreihe

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-jn\omega t_0} c_n) e^{jn\omega t}$$

Beweis: Mit der Substitution $\tau = t - t_0$ erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t - t_0) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} x(\tau) e^{-jn\omega(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-jn\omega t_0} \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \\ &= e^{-jn\omega t_0} c_n \end{aligned}$$

□

2.2.8 Beispiel

Sei $x(t) = t$, $t \in [0, 2\pi)$, x 2π -periodisch (Sägezahn) und $\tilde{x}(t) = t - \pi/2$, $t \in [\pi/2, 5\pi/2)$, \tilde{x} 2π -periodisch. Dann gilt:

$$\tilde{x}(t) = x(t - \pi/2)$$

Also sind (vgl. Beispiel 2.1.9) die Fourierkoeffizienten von \tilde{x}

$$\tilde{c}_0 = e^0 c_0 = \pi$$

und für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= e^{-jn\frac{\pi}{2}} c_n \\ &= e^{-jn\frac{\pi}{2}} \frac{j}{n} \\ &= \left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^n \frac{j}{n} \\ &= (-j)^n \frac{j}{n} \end{aligned}$$

Die zugehörige Fourierreihe lautet also

$$S\{\tilde{x}\} = \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(-j)^n j}{n} e^{jnt}$$

2.2.9 Bemerkung

Man beachte, dass eine Verschiebung von $x(t)$ nach oben oder unten nur eine entsprechende Änderung im Gleichanteil nach sich zieht.

2.2.10 Satz (2. Verschiebungssatz)

Sei $\tilde{x}(t) = e^{jk\omega t} x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = c_{n-k}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{jk\omega t} e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j(n-k)\omega t} dt \\ &= c_{n-k} \end{aligned}$$

□

2.2.11 Beispiel

Sei $x(t) = |\cos(t/2)|$, $t \in \mathbb{R}$, und $\tilde{x}(t) = \cos t |\cos(t/2)|$, $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit der Eulerschen Formel (vgl. Bemerkung 1.4.2)

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \frac{1}{2} (e^{jt} + e^{-jt}) x(t) \\ &= \frac{1}{2} (e^{jt} x(t) + e^{-jt} x(t)) \end{aligned}$$

Mit den Fourierkoeffizienten von $x(t)$ (vgl. Beispiel 2.1.10) gilt dann nach Satz 2.2.10

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{2} (c_{n-1} + c_{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1-4(n-1)^2} + \frac{1}{1-4(n+1)^2} \right) \end{aligned}$$

Im folgenden betrachten wir, wie sich gewisse Symmetrieeigenschaften der Funktion auf die Fourierkoeffizienten auswirken. Sei wieder allgemein zunächst $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, T -periodisch.

2.2.12 Satz

a) Ist $x(t)$ gerade, d.h. $x(t) = x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{bzw.} \\ c_n &= c_{-n} = \frac{a_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Die zugehörige Fourierreihe ist somit eine Cosinus-Reihe.

b) Ist $x(t)$ ungerade, d.h. $x(t) = -x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{bzw.} \\ c_0 &= 0 \\ c_n &= -c_{-n} = -j \frac{b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die zugehörige Fourierreihe ist somit eine Sinus-Reihe.

Beweis:

a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{x(t) \cos(n\omega t)}^{\text{gerade}} dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{x(t) \sin(n\omega t)}^{\text{ungerade}} dt \\ &= 0, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{x(t) \cos(n\omega t)}^{\text{ungerade}} dt \\ &= 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{x(t) \sin(n\omega t)}^{\text{gerade}} dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

c) Die Behauptungen für die Koeffizienten c_n ergeben sich unmittelbar aus den allgemeinen Umrechnungsformeln (vgl. Satz 1.4.3).

□

2.2.13 Satz (Differentiationsatz)

Sei $x(t)$ stetig und auf dem Periodenintervall $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbar. Dann kann man die Fourierkoeffizienten c'_n der stückweise existierenden Ableitung $x'(t)$ aus den Fourierkoeffizienten c_n von $x(t)$ durch

$$c'_n = jn\omega c_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

bzw.

$$\begin{aligned} a'_0 &= 0 \\ a'_n &= n\omega b_n, n \in \mathbb{N} \\ b'_n &= -n\omega a_n, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

berechnen. Die zugehörige Fourierreihe lautet dann

$$\begin{aligned} S\{x'\}(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} jn\omega c_n e^{jn\omega t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\omega \{b_n \cos(n\omega t) - a_n \sin(n\omega t)\} \end{aligned}$$

d. h. also, dass man die Fourierreihe von x' durch gliedweises Differenzieren der Fourierreihe von x erhält.

Beweis: Seien $t_0 = 0$, $t_m = T$ und $t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1}$ die (eventuell vorhandenen) endlich vielen Stellen im Periodenintervall, an denen $x'(t)$ nicht existiert. Dann erhält man durch Aufteilung des Periodenintervalls und partielle Integration für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x'(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ x(t) e^{-jn\omega t} \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} + jn\omega \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{T} \left\{ x(t) e^{-jn\omega t} \Big|_0^T + jn\omega \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{T} \underbrace{[x(T) - x(0)]}_{=0, \text{ da } x \text{ } T\text{-periodisch}} + jn\omega c_n \\ &= jn\omega c_n \end{aligned}$$

Der Beweis für den Fall $n = 0$ geht mit analogen Überlegungen (ohne partielle Integration).

Die Behauptungen für die Koeffizienten a'_n und b'_n lassen sich wieder mit den allgemeinen Umrechnungsformeln (vgl. Satz 1.4.3) zeigen. □

2.2.14 Bemerkung

Achtung: Der Satz gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn x nicht als stetig vorausgesetzt wird.

Der folgende Satz kann als Gegenstück zum Differentiationssatz angesehen werden.

2.2.15 Satz

Sei $x(t)$ auf dem Periodenintervall $[0, T]$ stückweise stetig und sei $X(t) = \int_0^t x(s) ds$ mit $X(T) = 0$. Dann ist X ebenfalls T -periodisch und die Fourierkoeffizienten $c_n(X)$ von X berechnen sich aus den Fourierkoeffizienten $c_n(x)$ von x durch

$$c_n(X) = \begin{cases} -\frac{1}{T} \int_0^T t \cdot x(t) dt & \text{falls } n = 0 \\ -\frac{j}{\omega n} c_n(x) & \text{falls } n \neq 0 \end{cases}$$

d. h. die Fourierreihe von x darf gliedweise integriert werden.

Beweis: Da

$$\begin{aligned}
 X(t+T) &= \int_0^{t+T} x(s) ds \\
 &= \underbrace{\int_0^T x(s) ds}_{=0} + \int_T^{t+T} x(s) ds \\
 &= \int_0^t x(s) ds \\
 &= X(t)
 \end{aligned}$$

ist X ebenfalls T -periodisch.

Aus dem Differentiationssatz erhalten wir für $n \neq 0$

$$c_n(x) = c_n(X') = j\omega n c_n(X)$$

also

$$c_n(X) = \frac{1}{j\omega n} c_n(x) = \frac{-j}{\omega n} c_n(x)$$

Für $n = 0$ gilt (mit der entsprechenden Unterteilung des Periodenintervalls wie beim Beweis des Differentiationssatzes) mittels partieller Integration ($u = X(t)$, $v' = 1$)

$$\begin{aligned}
 c_0(X) &= \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ t \cdot X(t) \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} t \cdot x(t) dt \right\} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} [t_{k+1} \cdot X(t_{k+1}) - t_k \cdot X(t_k)] - \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot x(t) dt \\
 &= \underbrace{T \cdot X(T) - 0 \cdot X(0)}_{=0} - \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot x(t) dt
 \end{aligned}$$

□

Wir werden nun noch eine neue Rechenoperation kennenlernen, die so genannte periodische Faltung, deren Bedeutung am Ende des Kapitels bei einem Anwendungsbeispiel noch genauer erläutert wird.

2.2.16 Definition

Sind x , y T -periodische, stückweise stetige Funktionen, so bezeichnen wir mit

$$(x * y)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) y(\tau) d\tau$$

die periodische Faltung von x und y .

2.2.17 Satz

- a) $x * y = y * x$
- b) Mit x und y ist auch $x * y$ T -periodisch.

c) Ist x stetig differenzierbar, so ist auch $x * y$ stetig differenzierbar und es gilt

$$(x * y)' = x' * y.$$

Beweis:

a) Mit der Substitution $\tilde{\tau} = t - \tau$ erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned} (x * y)(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau)y(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(\tilde{\tau})y(t - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(\tilde{\tau})y(t - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \\ &= (y * x)(t) \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} (x * y)(t + T) &= \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{x(t + T - \tau)}_{=x(t-\tau)} y(\tau) d\tau \\ &= (x * y)(t) \end{aligned}$$

c) Wird hier nicht behandelt. □

Die Fourierreihe der Faltung zweier periodischer Funktionen lässt sich einfach berechnen.

2.2.18 Satz (Faltungssatz)

Seien x und y T -periodisch und stückweise stetig. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten $c_n(x * y)$ von $x * y$

$$c_n(x * y) = c_n(x) \cdot c_n(y),$$

wobei $c_n(x)$ und $c_n(y)$ die Fourierkoeffizienten von x und y bezeichnen. Einer Faltung im Zeitbereich entspricht somit einer Multiplikation im Frequenzbereich.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} c_n(x * y) &= \frac{1}{T} \int_0^T (x * y)(t) \cdot e^{-j\omega n t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) \cdot y(\tau) d\tau \right) e^{-j\omega n t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) \cdot e^{-j\omega n(t-\tau)} dt \right) e^{-j\omega n \tau} d\tau \end{aligned}$$

Für das innere Integral erhalten wir mit der Substitution $t - \tau = s$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) \cdot e^{-j\omega n(t-\tau)} dt &= \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} x(s) \cdot e^{-j\omega n s} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(s) \cdot e^{-j\omega n s} ds \\ &= c_n(x) \end{aligned}$$

Oben eingesetzt ergibt sich also

$$\begin{aligned} c_n(x * y) &= c_n(x) \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \\ &= c_n(x) \cdot c_n(y) \end{aligned}$$

□

2.3 Konvergenzverhalten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit folgenden Fragestellungen:

- Unter welchen Voraussetzungen konvergiert eine Fourierreihe?
- Unter welchen Voraussetzungen kann man eine Funktion (ein Signal) aus ihrem Spektrum, d. h. den Fourierkoeffizienten wiedergewinnen?
Wann gilt also

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega nt} ?$$

Wir befassen uns zunächst mit verschiedenen Konvergenzbegriffen.

2.3.1 Definition

- a) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$, wenn die Folge der Partialsummen gegen a konvergiert, d. h. wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = a$$

Wir schreiben dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$.

- b) Seien $x_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$ heißt *punktweise* konvergent gegen $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = x(t)$$

- c) Seien $x_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$ heißt *gleichmäßig* konvergent gegen $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, wenn gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_{a \leq t \leq b} \left| \sum_{n=0}^N x_n(t) - x(t) \right| \right\} = 0$$

2.3.2 Bemerkung

- a) Anschaulich bedeutet die gleichmäßige Konvergenz, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl N_0 existiert, so dass der Graph von $\sum_{n=0}^N x_n(t)$ für $N \geq N_0$ in einem Streifen der Breite ε um den Graphen der Grenzfunktion verläuft.
- b) Kriterium für punktweise Konvergenz:
Falls zu jedem $n \geq 0$ und jedem $t \in [a, b]$ eine Zahl $K_n(t) > 0$ existiert, so dass $|x_n(t)| \leq K_n(t)$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} K_n(t)$ konvergiert, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$ punktweise konvergent.
- c) Kriterium für gleichmäßige Konvergenz:
Falls zu jedem $n \geq 0$ eine Zahl $K_n > 0$ existiert, so dass $\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t)| \leq K_n$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} K_n$ konvergiert, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$ gleichmäßig konvergent.

Wir kommen nun zu den angekündigten Konvergenzaussagen.

2.3.3 Satz

Sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch und auf $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N\{x\}(t) = S\{x\}(t) = \frac{1}{2}(x(t^+) + x(t^-)),$$

wobei

$$x(t^+) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} x(\tau) \text{ und } x(t^-) = \lim_{\tau \rightarrow t^-} x(\tau)$$

die rechts- und linksseitigen Grenzwerte bezeichnen.

Die Fourierreihe konvergiert somit *punktweise*.

2.3.4 Bemerkung

a) Ist x stetig in $t \in \mathbb{R}$, so ist $x(t^+) = x(t^-) = x(t)$ und somit

$$S\{x\}(t) = x(t)$$

b) An einer Sprungstelle konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel aus rechts- und linksseitigem Grenzwert der Funktion.

2.3.5 Satz

Sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch und auf $[0, T]$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\max_{t \in [0, T]} |S_N\{x\}(t) - x(t)| \right) = 0.$$

Die Fourierreihe konvergiert somit *gleichmäßig* auf $[0, T]$ gegen x .

2.3.6 Satz

Sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch und auf $[0, T]$ stückweise stetig. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |S_N\{x\}(t) - x(t)|^2 dt \right)^{1/2} = 0.$$

Man sagt, die Fourierreihe konvergiert *im quadratischen Mittel* gegen x .

Weiter gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

2.3.7 Bemerkung

a) Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die punktweise Konvergenz und die quadratische Konvergenz. Die Umkehrung gilt nicht!

b) Bei der Approximation von T -periodischen, auf $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbaren Funktionen durch N -te Teilsommen der Fourierreihe treten in der Nähe von Sprungstellen „Überschwinger“ auf, die mit wachsendem N auf die Sprungstellen zurückgehen, ohne dass die Höhe der Überschwinger gegen 0 konvergiert. Dies wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet.

2.3.8 Beispiel

a) Sägezahn: stückweise stetig differenzierbar, aber nicht stetig; punktweise Konvergenz

b) Zackenfunktion: stetig und stückweise stetig differenzierbar; gleichmäßige Konvergenz

Aus der Parsevalschen Gleichung ergeben sich unmittelbar die folgenden Eigenschaften für die Fourierkoeffizienten.

2.3.9 Folgerung

Sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch und auf $[0, T]$ stückweise stetig. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{-n} = 0$$

Genauer wird das Abklingverhalten der Fourierkoeffizienten in Abhängigkeit von Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion in folgendem Satz beschrieben.

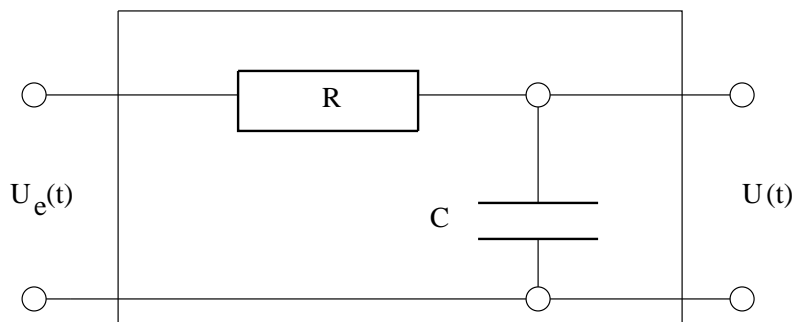
2.3.10 Satz

Sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodisch und m -mal stetig differenzierbar, wobei die m -te Ableitung $x^{(m)}$ auf $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbar sein soll. Dann existiert eine Zahl $M < \infty$, so dass für die Fourierkoeffizienten gilt

$$|c_n| < \frac{M}{|n|^{m+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2.4 Anwendungsbeispiel: RC-Tiefpassfilter

Wir betrachten folgende Schaltung.



Schaltbild RC-Kreis

Zwischen der Eingangsspannung $U_e(t)$ und der Ausgangsspannung $U(t)$ gilt folgender Zusammenhang.

$$RC\dot{U}(t) + U(t) = U_e(t)$$

Sei nun $U_e(t)$ T -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt

$$U_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(U_e) e^{j\omega n t}$$

Setzen wir für $U(t)$ ebenfalls eine Fourierreihe an,

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(U) e^{j\omega n t},$$

so gilt mit dem Differentiationssatz

$$\dot{U}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(U) \frac{1}{j\omega n} e^{j\omega n t}.$$

Einsetzen in die DGL und Vergleich der Fourierkoeffizienten liefert

$$RC \cdot c_n(U) \frac{1}{j\omega n} + c_n(U) = c_n(U_e),$$

also

$$c_n(U) = \frac{c_n(U_e)}{1 + j\omega n RC}$$

Die Fourierkoeffizienten von U gehen aus denen von U_e durch Multiplikation mit $d_n = 1/(1 + j\omega n RC)$ hervor, d. h.

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot c_n(U_e) e^{j\omega n t}$$

Der Multiplikation der Fourierkoeffizienten entspricht die periodische Faltung von

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j\omega n t}$$

mit der Funktion $U_e(t)$.

$h(t)$ heißt Übertragungsfunktion des Systems:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j\omega n RC} e^{j\omega n t}$$

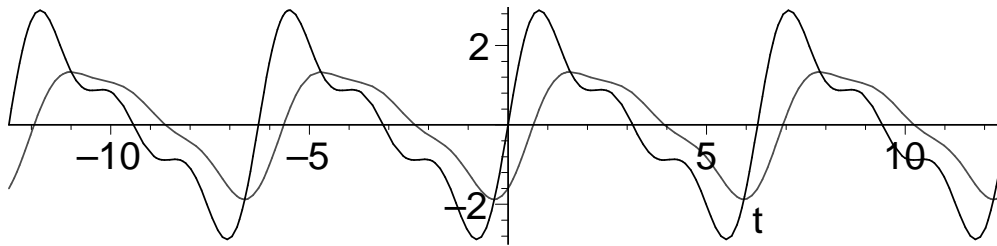
Dies ist die Fourierreihendarstellung von

$$h(t) = \frac{T}{RC} \left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right)^{-1} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

für $0 \leq t < T$, $h(t)$ T -periodisch.

Je größer der Betrag von n wird, desto kleiner wird der Betrag $|d_n| = \frac{1}{|1 + j\omega n RC|}$ der Fourierkoeffizienten der Übertragungsfunktion. Durch die Multiplikation mit den Fourierkoeffizienten $c_n(U_e)$ werden Anteile mit hoher Frequenz stark gedämpft, Anteile mit niedriger Frequenz dagegen nicht (daher die Bezeichnung Tiefpass).

Für $U_e(t) = 2 \sin t + \sin(2t) + \frac{2}{3} \sin(3t)$ ergibt sich $U(t) = \sin t - \cos t + \frac{1}{5} \sin(2t) - \frac{2}{5} \cos(2t) + \frac{1}{15} \sin(3t) - \frac{1}{5} \cos(3t)$.



$U_e(t)$ und $U(t)$

Kapitel 3

Fouriertransformation

3.1 Uneigentliche Integrale

3.1.1 Definition (bei unendlichem Definitionsbereich)

a)

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

b)

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

c)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx + \lim_{d \rightarrow \infty} \int_a^d f(x) dx \end{aligned}$$

falls die angegebenen Grenzwerte existieren und endlich sind.

3.1.2 Beispiel

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 2^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(\ln 2)(-x)} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{\ln 2} \cdot e^{-(\ln 2)x} \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{\ln 2} 2^{-x} \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{\ln 2} (2^{-b} - 1) \\ &= -\frac{1}{\ln 2} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \approx 1.443 \end{aligned}$$

3.1.3 Beispiel

a)

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-x^{-1} \Big|_1^b) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 x \cdot e^{-x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x \cdot e^{-x^2} dx \\ &\quad (u = x^2 \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \frac{1}{2} du = x dx) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \int_{a^2}^0 e^{-u} du \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} e^{-u} \Big|_{u=a^2}^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} e^{-a^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a^2} \\ &= -\frac{1}{2} + 0 \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \sin(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin(x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\cos(x) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\cos(b) + \cos(0)\end{aligned}$$

existiert nicht!

3.1.4 Satz

a) $\int_a^{\infty} f(x) dx$ hat höchstens dann einen endlichen Wert, wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ existiert.

b) Entsprechend ist für die Existenz von $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ notwendig, dass $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ existiert.

c) Für die Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \in \mathbb{R}$ notwendig.

3.1.5 Beispiel

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^b \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) - 0 \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

d.h. das Integral existiert nicht !

3.1.6 Satz Sei $a > 0$. $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ existiert für $\alpha > 1$ und existiert nicht (d.h. wird unendlich) für $\alpha \leq 1$.

3.1.7 Beispiel

$$\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Problem : Integrand hat Polstelle im Integrationsintervall bei $x = 0$.

3.1.8 Definition

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion mit unendlichem Sprung bei $c \in [a, b]$. Wir setzen

a) Falls $c = a$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

b) Falls $c = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

c) Falls $a < c < b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx$$

Voraussetzung : Die Grenzwerte müssen existieren.

3.1.9 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{\epsilon}^8 \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (-\epsilon)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} (-1)^{\frac{2}{3}} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} 8^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \epsilon^{\frac{2}{3}} \\
&= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} 2^2 \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

3.1.10 Beispiel

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_v dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(x \ln(x) \Big|_{\epsilon}^1 - \int_{\epsilon}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (0 - \epsilon \ln(\epsilon) - x \Big|_{\epsilon}^1) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-\epsilon \ln(\epsilon) - (1 - \epsilon)) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \ln(\epsilon) - 1 \\ &= -1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\epsilon)}{\frac{1}{\epsilon}} \\ &= -1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\epsilon}}{-\frac{1}{\epsilon^2}} \\ &= -1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-\epsilon) \\ &= -1.\end{aligned}$$

3.1.11 Beispiel

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\epsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} -x^{-1} \Big|_{-1}^{\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -x^{-1} \Big|_{\epsilon}^1 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{\epsilon} - 1\right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \\ &= \infty + \infty \\ &= \infty,\end{aligned}$$

d.h. das Integral existiert nicht !

3.2 Definition der Fouriertransformation

Im letzten Kapitel haben wir festgestellt, dass durch die Fourierkoeffizienten einer periodischen Funktion ihr diskretes Spektrum gegeben ist. Dabei gibt der n -te Fourierkoeffizient die Amplitude der n -ten Oberschwingung an. Durch Überlagerung aller Anteile (d.h. durch die Fourierreihe) wird die Funktion rekonstruiert.

Betrachten wir nun das Spektrum nichtperiodischer Funktionen, so finden wir einerseits eine Reihe analoger Zusammenhänge aber andererseits auch einen wesentlichen Unterschied. Das Spektrum einer nichtperiodischen Funktion ist nicht mehr diskret, sondern *kontinuierlich*.

Wir betrachten im folgenden zunächst ein Beispiel, bei dem die Periodenlänge eines speziellen Signaltyps immer weiter vergrößert wird.

3.2.1 Beispiel

Für $0 < \tau < T$, $t \in [-T/2, T/2]$ sei

$$x_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad x_T(t) \quad T\text{-periodisch.}$$

Da wir im folgenden die Periodenlänge T verändern wollen, berechnen wir die Fourierkoeffizienten $c_n(T)$ in Abhängigkeit von der Periodenlänge T und $\omega(T) = 2\pi/T$.

Für $n = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} c_0(T) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x_T(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 dt \\ &= \frac{\tau}{T} \end{aligned}$$

Für $n \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} c_n(T) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x_T(t) e^{-jn\omega(T)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega(T)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{-jn\omega(T)} e^{-jn\omega(T)t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{-jn\omega(T)} \left(e^{-jn\omega(T)\frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega(T)\frac{-\tau}{2}} \right) \\ &\quad \left(\text{mit } \omega(T) = \frac{2\pi}{T} \right) \\ &= \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{1}{2j} \left(e^{jn\pi\frac{\tau}{T}} - e^{-jn\pi\frac{\tau}{T}} \right) \\ &= \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right) \\ &= \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right)}{n\pi\frac{\tau}{T}} \end{aligned}$$

Da $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ gilt, kann man die Funktion $\frac{\sin t}{t}$ stetig ergänzen. Dazu führt man die im Zusammenhang mit der Fourieranalyse häufig vorkommende Abkürzung

$$\text{sinc } t = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{falls } t \neq 0 \\ 1 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

ein. Damit kann man nun die oben berechneten Fourierkoeffizienten einheitlich für alle $n \in \mathbb{Z}$ schreiben als

$$c_n = \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right).$$

Wenn wir nun bei festem τ die Periodenlänge (Wellenlänge) von $x_T(t)$ immer weiter vergrößern, wird die Grundkreisfrequenz $\omega(T) = \frac{2\pi}{T}$ immer kleiner. Die Abstände der Frequenzen zwischen aufeinanderfolgenden Oberschwingungen $n\frac{2\pi}{T}$ und $(n+1)\frac{2\pi}{T}$ werden ebenfalls kleiner. Das bedeutet, dass die Linien im Spektrum immer dichter aneinanderrücken.

Man macht sich dies am besten klar, wenn man die Größen $Tc_n(T) = \tau \operatorname{sinc}(n\pi \frac{\tau}{T})$ betrachtet. Insbesondere gilt bei Verdoppelung der Periodenlänge

$$Tc_n(T) = \tau \operatorname{sinc}(n\pi \frac{\tau}{T}) = \tau \operatorname{sinc}(2n\pi \frac{\tau}{2T}) = 2Tc_{2n}(2T)$$

Die Fourierkoeffizienten von $x_T(t)$ sind somit auch Fourierkoeffizienten von $x_{2T}(t)$.

Das obige Beispiel legt nahe, für nichtperiodische Funktionen Grenzbetrachtungen für $T \rightarrow \infty$ anzustellen. Setzt man die Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} x(t) dt$$

in die Fourierreihe

$$S\{x\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}, \quad -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$$

ein, so erhält man im Fall $S\{x\}(t) = x(t)$ mit $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $\omega_n = n\Delta\omega$ die Darstellung

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{j\omega_n t} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega_n \tau} x(\tau) d\tau \right) \Delta\omega$$

Die Zahlenfolge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ stellt eine äquidistante Unterteilung der ganzen reellen ω -Achse dar. Es liegt daher nahe, die unendliche Reihe als Grenzwert von Riemann-Summen aufzufassen. Man erwartet damit, dass sich die Reihe und das Integral in uneigentliche Integrale verwandeln, wenn $T \rightarrow \infty$ und damit $\Delta\omega \rightarrow 0$ strebt, d.h.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega \tau} x(\tau) d\tau \right) d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diese Beziehung heißt *Fourier-Integral-Formel* und kann unter bestimmten Voraussetzungen an die Funktion $x(t)$ bewiesen werden. Sie erlaubt die Darstellung einer nichtperiodischen Funktion als *Fourier-Integral*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} c(\omega) d\omega,$$

wenn man die *Spektralfunktion* von $x(t)$ als

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega \tau} x(\tau) d\tau$$

definiert. Im Gegensatz zur Fourierreihe einer periodischen Funktion stellt die genannte Integraldarstellung von $x(t)$ eine kontinuierliche Überlagerung von harmonischen Schwingungen $e^{j\omega t}$ dar, wobei $c(\omega)$ die Rolle einer „Dichtefunktion der in $x(t)$ enthaltenen harmonischen Teilschwingungen“ spielt. Die Integraldarstellung heißt daher auch *spektrale Zerlegung* der nichtperiodischen Funktion $x(t)$. In diesem Sinne besitzt eine periodische Funktion ein *diskretes Spektrum*, eine nichtperiodische Funktion ein *kontinuierliches Spektrum*.

3.2.2 Definition

Sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt (= X(\omega))$$

die *Fouriertransformierte* oder *Spektralfunktion* von $x(t)$. Das Paar $(x(t), X(\omega))$ nennt man eine *Fourier-Korrespondenz* und schreibt kurz

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\bullet} X(\omega) \text{ oder auch } x(t) \circ\bullet X(\omega)$$

$X(\omega)$ heißt die *Bildfunktion* von $x(t)$, umgekehrt ist $x(t)$ die *Originalfunktion* oder *Urbildfunktion* von $X(\omega)$.
Die *inverse Fouriertransformation* von $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ lautet

$$\mathcal{X}^{-1}\{F(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

3.2.3 Bemerkung

Durch die Fouriertransformation wird eine *Funktion* $x(t)$ im Zeitbereich auf eine *Funktion* $X(\omega)$ im Frequenzbereich abgebildet. Umgekehrt wird durch die inverse Fouriertransformation eine *Funktion* $X(\omega)$ im Frequenzbereich auf eine *Funktion* $x(t)$ im Zeitbereich abgebildet.

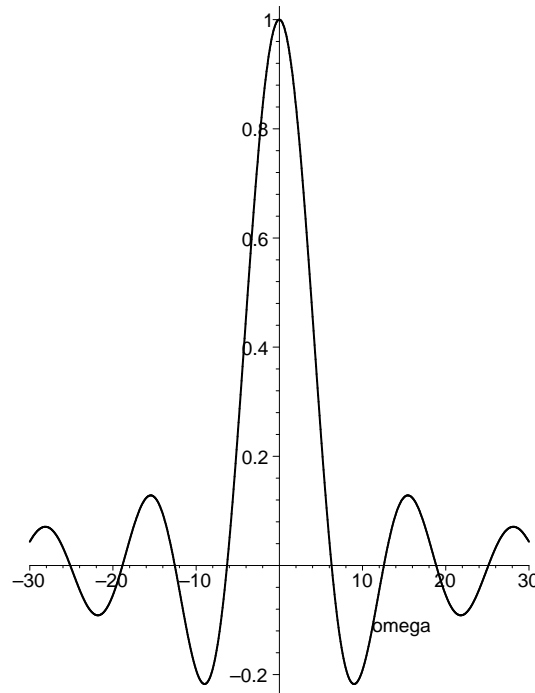
3.2.4 Beispiel

Für festes $\tau > 0$ sei

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt \\ &= \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$



Graph der Funktion $\text{sinc}(\omega/2)$

3.2.5 Beispiel

Sei $x(t) = e^{-|t|}$. Dann gilt mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-|t|}}_{\text{gerade}} \underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{gerade}} dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-|t|}}_{\text{gerade}} \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{ungerade}} dt \\
&= 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(\omega t) dt
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun zunächst die Stammfunktion von $e^{-t} \cos(\omega t)$. Durch zweimalige partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int e^{-t} \cos(\omega t) dt &= -e^{-t} \cos(\omega t) - \omega \int e^{-t} \sin(\omega t) dt \\
&= -e^{-t} \cos(\omega t) - \omega \left\{ -e^{-t} \sin(\omega t) + \omega \int e^{-t} \cos(\omega t) dt \right\} \\
&= e^{-t} (\omega \sin(\omega t) - \cos(\omega t)) - \omega^2 \int e^{-t} \cos(\omega t) dt
\end{aligned}$$

Löst man diese Gleichung nach $\int e^{-t} \cos(\omega t) dt$ auf, so ergibt sich

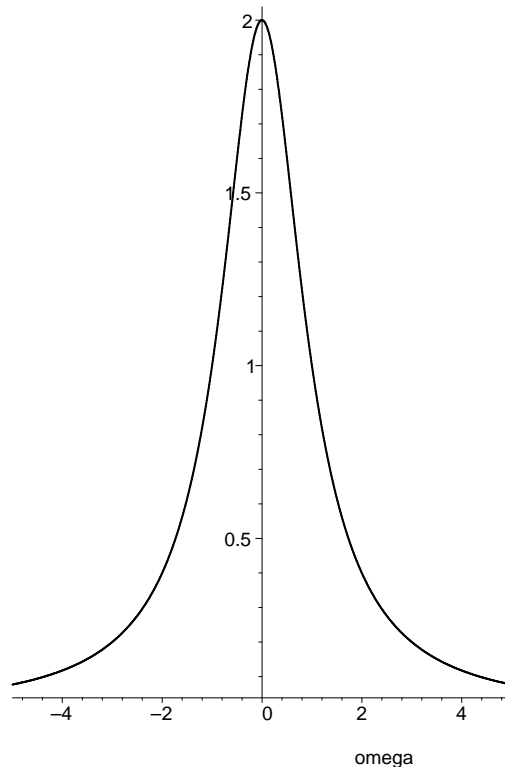
$$\int e^{-t} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{1 + \omega^2} e^{-t} (\omega \sin(\omega t) - \cos(\omega t)) + C$$

Somit erhält man für die Fouriertransformierte

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) &= 2 \frac{1}{1 + \omega^2} e^{-t} (\omega \sin(\omega t) - \cos(\omega t)) \Big|_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{2}{1 + \omega^2},
\end{aligned}$$

da

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} (\omega \sin(\omega b) - \cos(\omega b)) = 0$$



Graph der Funktion $2/(1 + \omega^2)$

3.3 Korrespondenzen und Rechenregeln

In diesem Abschnitt werden wir Rechenregeln für die Fouriertransformation herleiten. Zu beachten ist die enge Verwandtschaft mit analogen Rechenregeln für die Fourierreihenentwicklungen.

Im Hinblick auf spätere Konvergenzüberlegungen setzen wir im folgenden stets voraus, dass die Zeitfunktionen stückweise stetig sein sollen und absolut integrierbar, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

3.3.1 Satz (Linearität)

Seien $x_1(t) \circ \bullet X_1(\omega)$, $x_2(t) \circ \bullet X_2(\omega)$ und K_1, K_2 Konstanten. Dann gilt

$$K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) \circ \bullet K_1 X_1(\omega) + K_2 X_2(\omega)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{F}\{K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t)\}(\omega) = K_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\}(\omega) + K_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}(\omega).$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Fouriertransformation. □

3.3.2 Beispiel

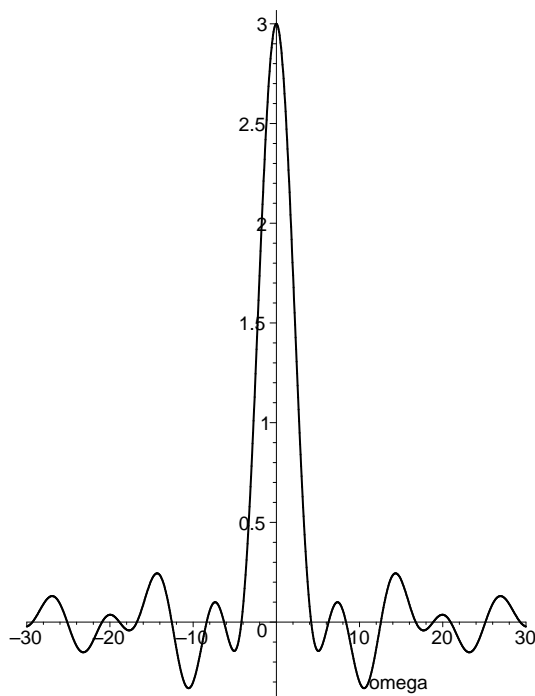
Seien

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Beispiel 3.2.4 erhält man

$$\mathcal{F}\{x_1(t) + x_2(t)\}(\omega) = 2 \operatorname{sinc} \omega + \operatorname{sinc} \frac{\omega}{2}$$



Graph von $2 \operatorname{sinc} \omega + \operatorname{sinc} (\omega/2)$

3.3.3 Satz (Skalierung, Dilatation)

Ist $x(t) \circ \bullet X(\omega)$, dann gilt für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$x(at) \circ \bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{F}\{x(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{x(t)\}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Beweis:

1. Fall: $a > 0$. Dann gilt mit der Substitution $\tau = at$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(at)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{F}\{x(t)\}\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ &= \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{x(t)\}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

2. Fall: $a < 0$: Dann ist $|a| = -a$. Mit der gleichen Substitution $\tau = at$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(at)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{x(t)\}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

□

3.3.4 Beispiel

Sei

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Dann hat

$$x(2t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1/4 \leq t \leq 1/4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}\{x(2t)\}(\omega) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

Die folgenden Rechenregeln betreffen wieder Verschiebungen im Argument der Zeit- bzw. Frequenzfunktion.

3.3.5 Satz (1. Verschiebungssatz)

Ist $x(t) \circ \bullet X(\omega)$, dann gilt

$$x(t - t_0) \circ \bullet e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\}(\omega) = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega).$$

Beweis: Mit der Substitution $\tau = t - t_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t - t_0)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)\end{aligned}$$

□

3.3.6 Beispiel

Sei

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Dann hat

$$x(t - \tau/2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}\{x(t - \tau/2)\}(\omega) = e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

3.3.7 Satz (2. Verschiebungssatz)

Ist $x(t) \circ \bullet X(\omega)$, dann gilt

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \circ \bullet X(\omega - \omega_0)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega - \omega_0).$$

Beweis: Man rechnet leicht nach, dass

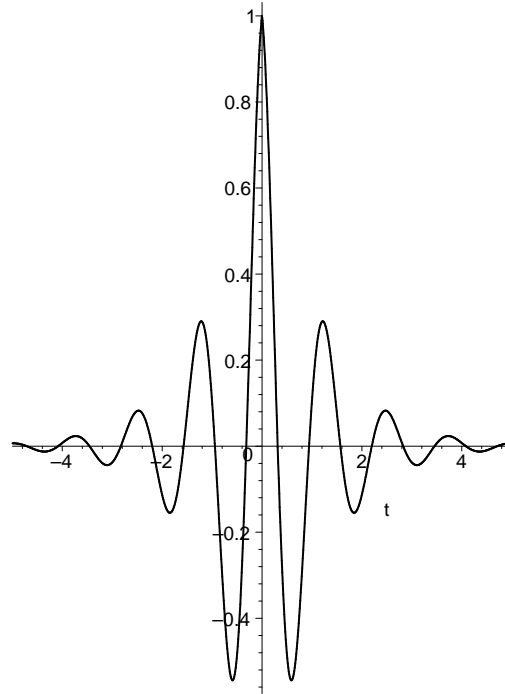
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega - \omega_0)\end{aligned}$$

□

3.3.8 Beispiel

Wir betrachten das Beispiel einer amplitudenmodulierten Schwingung. Dazu multiplizieren wir die Schwingung $\cos(\omega_0 t)$ mit der Funktion $e^{-|t|}$, die die Schwingung moduliert, d.h. wir betrachten mit $x(t) = e^{-|t|}$

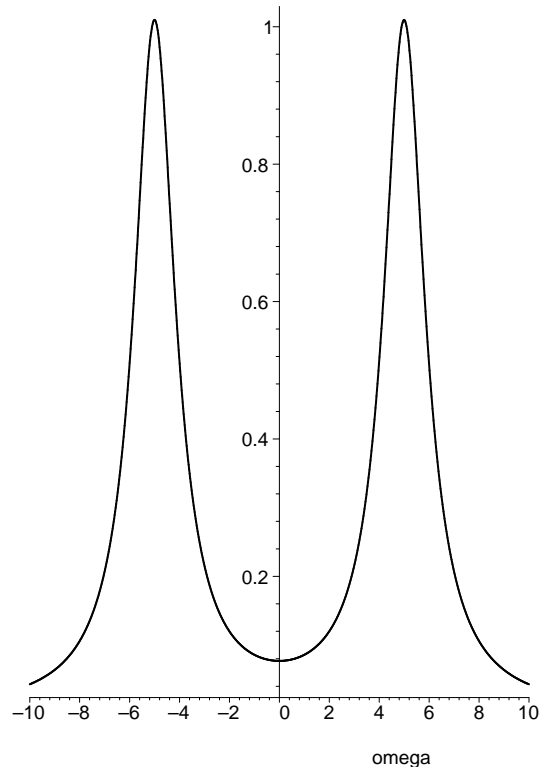
$$\begin{aligned}\cos(\omega_0 t)x(t) &= \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) x(t) \\ &= \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} x(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} x(t)\end{aligned}$$



Amplitudenmodulierte Schwingung

Da $\int_{-\infty}^{\infty} |\cos(\omega_0 t)| e^{-|t|} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} dt = 2 < \infty$, ist $\cos(\omega_0 t) e^{-|t|}$ absolut integrierbar. Durch Anwendung des 2. Verschiebungssatzes auf die beiden Summanden und Verwendung des Ergebnisses aus Beispiel 3.2.5 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} x(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} x(t)\right\}(\omega) &= \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\}(\omega) + \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t} x(t)\}(\omega) \\ &= \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{1 + (\omega + \omega_0)^2} \end{aligned}$$



Fouriertransformierte der amplitudenmodulierten Schwingung

Im folgenden überlegen wir wieder, wie sich Symmetrieeigenschaften der Funktion nutzen lassen. Dazu halten wir vorab fest:

3.3.9 Bemerkung

Wegen der Eulerschen Formel lässt sich die Fouriertransformation bzw. die inverse Fouriertransformation auch schreiben als

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \\ \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cos(\omega t) d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \sin(\omega t) d\omega \right\}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

3.3.10 Satz

a) Ist $x(t)$ gerade, dann ist $\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)$ gerade, und es gilt

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

b) Ist $x(t)$ ungerade, dann ist $\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)$ ungerade, und es gilt

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

c) Ist $X(\omega)$ gerade, dann ist $\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t)$ gerade, und es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

d) Ist $X(\omega)$ ungerade, dann ist $\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t)$ ungerade, und es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = j \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

3.3.11 Satz

Ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *reelle* Funktion und definiert man den geraden Anteil durch

$$x_g(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

und den ungeraden Anteil durch

$$x_u(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)],$$

so folgt

$$x_g(t) \circ \bullet \operatorname{Re} X(\omega) \quad \text{und} \quad x_u(t) \circ \bullet j \operatorname{Im} X(\omega)$$

Beweis: Offenbar gilt $x(t) = x_g(t) + x_u(t)$, sowie x_g gerade und x_u ungerade. Mit Satz 3.3.10 folgt

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{x_g(t)\}(\omega) + \mathcal{F}\{x_u(t)\}(\omega) \quad (3.1)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - 2j \int_0^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \quad (3.2)$$

□

Im folgenden werden wir uns mit Korrespondenzen für die Ableitung der Zeit- bzw. Frequenzfunktion beschäftigen.

3.3.12 Satz (1. Differentiationssatz)

Ist $x(t) \circ \bullet X(\omega)$ und seien $x(t)$ differenzierbar sowie $x(t), x'(t)$ absolut integrierbar, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)| dt < \infty$. Dann gilt

$$x'(t) \circ \bullet j\omega X(\omega)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{F}\{x'(t)\}(\omega) = j\omega \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega).$$

Beweis: Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x'(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x'(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= x(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= j\omega \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega), \end{aligned}$$

da $|e^{-j\omega t}| = 1$ (d.h. beschränkt) ist, und wegen der absoluten Integrierbarkeit von $x(t)$ gilt, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.

□

3.3.13 Bemerkung

a) Allgemeiner kann man auch formulieren: Ist $x(t) \circ \bullet X(\omega)$ und sei $x(t)$ m -mal differenzierbar sowie $x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots, m$, absolut integrierbar. Dann gilt

$$x^{(k)}(t) \circ \bullet (j\omega)^k X(\omega), \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

b) Bei der Differenzierbarkeitsforderung darf es auch endlich viele Ausnahmestellen geben. Die Funktion muss an diesen Stellen dann aber wenigstens stetig sein.

3.3.14 Beispiel

Sei $x(t) = e^{-|t|}$ mit $X(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$. Dann gilt

$$x'(t) = \begin{cases} -e^{-t} & \text{falls } t > 0 \\ e^t & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

und

$$\mathcal{F}\{x'(t)\}(\omega) = j\omega \frac{2}{1+\omega^2}$$

3.3.15 Satz (2. Differentiationssatz)

Ist $x(t) \circ \bullet X(\omega)$ und sei $tx(t)$ absolut integrierbar, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |tx(t)| dt < \infty$. Dann ist $X(\omega)$ differenzierbar und es gilt

$$-jtx(t) \circ \bullet X'(\omega)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{F}\{-jtx(t)\}(\omega) = \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega).$$

Beweis: Unter den Voraussetzungen des Satzes kann man zeigen, dass

$$\frac{d}{d\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{d\omega} (e^{-j\omega t}) dt$$

gilt. Also ist

$$\begin{aligned} X'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (-jt) e^{-j\omega t} dt \\ &= \mathcal{F}\{-jtx(t)\}(\omega) \end{aligned}$$

□

3.3.16 Bemerkung

Allgemeiner kann man hier formulieren: Ist $x(t) \circ \bullet X(\omega)$ und sei $t^k x(t)$, $k = 0, 1, \dots, m$, absolut integrierbar, dann ist $X(\omega)$ m -mal differenzierbar und es gilt

$$(-jt)^k x(t) \circ \bullet X^{(k)}(\omega), \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

3.3.17 Beispiel

Wir betrachten die Funktion $x(t) = t^k e^{-|t|}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{t^k e^{-|t|}\}(\omega) &= \frac{1}{(-j)^k} \mathcal{F}\{(-jt)^k e^{-|t|}\}(\omega) \\ &= j^k \frac{d^k}{d\omega^k} \frac{2}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned} k = 1: \quad \mathcal{F}\{t e^{-|t|}\}(\omega) &= \frac{-4j\omega}{(1+\omega^2)^2} \\ k = 2: \quad \mathcal{F}\{t^2 e^{-|t|}\}(\omega) &= \frac{4(1-3\omega^2)}{(1+\omega^2)^3} \end{aligned}$$

3.3.18 Beispiel

Wir bestimmen die Fouriertransformierte der Gaußfunktion $x(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$. Mit dem 1. Differentiationssatz erhalten wir zunächst

$$\mathcal{F}\{x'(t)\}(\omega) = j\omega X(\omega).$$

Da $x'(t) = -2at e^{-at^2} = -2at \cdot x(t)$, erhalten wir mit Hilfe des 2. Differentiationsatzes

$$\mathcal{F}\{x'(t)\}(\omega) = -2a\mathcal{F}\{t \cdot x(t)\}(\omega) = \frac{2a}{j}X'(\omega).$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $\mathcal{F}\{x'(t)\}(\omega)$ ergibt die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$j\omega X(\omega) = \frac{2a}{j}X'(\omega),$$

bzw.

$$X'(\omega) = -\frac{\omega}{2a}X(\omega).$$

Durch Trennung der Variablen erhält man

$$\frac{dX(\omega)}{X(\omega)} = -\frac{\omega}{2a}d\omega.$$

Integration und Anwenden der Exponentialfunktion liefert die allgemeine Lösung

$$X(\omega) = C \cdot e^{-\frac{1}{4a}\omega^2} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten beachten wir, dass

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \frac{\pi}{a} = C$$

gilt. Insgesamt erhalten wir somit das Ergebnis

$$X(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-\frac{1}{4a}\omega^2}.$$

3.4 Inverse Fouriertransformation

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Frage, wann eine Funktion aus ihrer Fouriertransformierten (ein Signal aus seinem Frequenzspektrum) rekonstruiert werden kann. D. h. wir wollen wissen, wann

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = x(t)$$

gilt. Antwort gibt der folgende Satz.

3.4.1 Satz

Sei $x(t) \circ \bullet X(\omega)$ und $x(t), X(\omega)$ absolut integrierbar. Dann gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$, wo $x(t)$ stetig ist.

Bezüglich der Konvergenz im quadratischen Mittel gilt:

3.4.2 Satz

Ist $x(t) \circ \bullet X(\omega)$ und sei $x(t)$ absolut integrierbar, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ und quadratintegrierbar (von endlicher Energie), d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$. Dann gilt:

$$X_N(\omega) = \int_{-N}^N x(t) e^{-j\omega t} dt$$

ist quadratintegrierbar (ist von endlicher Energie), und die Funktionenfolge $(X_N(\omega))_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen die Fouriertransformierte $X(\omega)$, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |X_N(\omega) - X(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2} = 0$$

Außerdem gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

(Das bedeutet, dass sich die Energie des Signals aus dem Spektrum berechnen lässt.)

3.5 Der Faltungssatz

In diesem Abschnitt werden wir die kontinuierliche Faltung zweier Funktionen definieren und anschließend sehen, dass die Faltungsoperation mit der Multiplikation der Fouriertransformierten korrespondiert. Als Stichworte für die Anwendung von Faltungsoperationen seien hier zunächst Korrelation, Autokorrelation, sowie Impulsantwort und Übertragungsfunktion linearer zeitinvarianter Systeme genannt.

Zur Vereinfachung betrachten wir in diesem Abschnitt nur reelle Funktionen, d.h. im folgenden sei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

3.5.1 Definition

Seien x_1 und x_2 absolut integrierbare Funktionen. Dann heißt

$$(x_1 \star x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau$$

Faltung (convolution) der Funktionen x_1 und x_2 .

Es gilt der folgende Satz.

3.5.2 Satz

Sind x_1 und x_2 absolut integrierbar und quadratintegrierbar (d.h. von endlicher Energie), dann ist ihre Faltung beschränkt und ebenfalls absolut integrierbar und quadratintegrierbar.

Wir wollen uns die Faltungsoperation nun zunächst an einem Beispiel klarmachen.

3.5.3 Beispiel

Sei

$$x(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq \tau \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$x(-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \leq \tau \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$x(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 + t \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für das Produkt $x(\tau)x(t - \tau)$ folgt daraus

$$x(\tau)x(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq \tau \leq 1 \text{ und } -1 + t \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Bedingung $*$ ($0 \leq \tau \leq 1$ und $-1 + t \leq \tau \leq t$) besagt nun folgendes.

a) $t < 0$ oder $t > 2$:

Dann gibt es kein τ , dass die Bedingung * erfüllt, d.h. dann ist

$$x(\tau)x(t - \tau) = 0$$

für alle $\tau \in \mathbb{R}$.

b) $0 \leq t \leq 1$:

Dann ist * erfüllt für $\tau \in [0, t]$, d.h.

$$x(\tau)x(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) $1 < t \leq 2$:

Dann ist * erfüllt für $\tau \in [-1 + t, 1]$, d.h.

$$x(\tau)x(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 + t \leq \tau \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit kann man nun die Faltung $(x \star x)(t)$ berechnen:

$$\begin{aligned} (x \star x)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t - \tau) d\tau \\ &= \begin{cases} \int_0^t 1 d\tau & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ \int_{-1+t}^1 1 d\tau & \text{falls } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} t & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & \text{falls } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

3.5.4 Beispiel

Sind A und B stetige, unabhängige Zufallsvariable, so ist die Verteilungsdichte h der Zufallsvariablen $A + B$ die Faltung der Verteilungsdichten f und g von A und B .

Sind z. B. A und B unabhängig und beide exponentialverteilt mit dem Parameter λ , so ist

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} t e^{-t/\lambda} & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Verteilungsdichte von $A + B$.

Als Rechenregel für die Faltung halten wir fest:

3.5.5 Satz

Die Faltungsoperation ist kommutativ, d.h.

$$(x_1 \star x_2)(t) = (x_2 \star x_1)(t)$$

Beweis: Mit der Substitution $\tilde{\tau} = t - \tau$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (x_1 \star x_2)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tilde{\tau})x_2(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \\ &= (x_2 \star x_1)(t) \end{aligned}$$

□

Im folgenden untersuchen wir nun die Fouriertransformation einer Faltung.

3.5.6 Satz

Seien x_1 und x_2 absolut integrierbar und quadratintegrierbar und es gelte

$$x_1(t) \circ \bullet X_1(\omega), \quad x_2(t) \circ \bullet X_2(\omega)$$

Dann gilt

$$(x_1 \star x_2)(t) \circ \bullet X_1(\omega)X_2(\omega)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{F}\{(x_1 \star x_2)(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{x_1(t)\}(\omega)\mathcal{F}\{x_2(t)\}(\omega)$$

Beweis: Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die hier ohne weitere Begründung durchgeführt wird und anschließender Substitution $\tilde{t} = t - \tau$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{(x_1 \star x_2)(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 \star x_2)(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tilde{t}) e^{-j\omega(\tilde{t} + \tau)} d\tilde{t} \right\} d\tau \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tilde{t}) e^{-j\omega\tilde{t}} d\tilde{t} \right\} \\ &= \mathcal{F}\{x_1(t)\}(\omega)\mathcal{F}\{x_2(t)\}(\omega) \end{aligned}$$

□

3.5.1 Anwendungsbeispiel: Kreuz- und Autokorrelation

3.5.7 Definition

Seien x_1 und x_2 absolut integrierbar und quadratintegrierbar. Dann heißt

$$r_{x_1, x_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(\tau + t) d\tau$$

Kreuzkorrelation von x_1 und x_2 und

$$r_{x_1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_1(\tau + t) d\tau$$

Autokorrelation von x_1 .

Korrelation und Faltung zweier Funktionen hängen nicht nur rein optisch, sondern auch formelmäßig zusammen. Es gilt:

3.5.8 Satz

Setzt man $\tilde{x}_1(\tau) = x_1(-\tau)$, so gilt

$$r_{x_1, x_2} = (\tilde{x}_1 \star x_2)(t)$$

Beweis: Mit der Substitution $\tilde{\tau} = -\tau$ erhält man

$$\begin{aligned} r_{x_1, x_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(\tau + t) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_1(-\tau) x_2(\tau + t) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_1(\tilde{\tau}) x_2(t - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \\ &= (\tilde{x}_1 \star x_2)(t) \end{aligned}$$

3.5.9 Bemerkung

Die Kreuzkorrelation zweier Funktionen dient als Maß dafür, inwieweit zwei Funktionen in Abhängigkeit von t übereinstimmen. Wir werden dies an Hand von Beispielen erläutern. Um die Ergebnisse vergleichbar machen zu können, betrachten wir allerdings die normierte Größe

$$\tilde{r}_{x_1, x_2}(t) = \frac{r_{x_1, x_2}(t)}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2 dt \right\}^{1/2}}$$

Der Wertebereich liegt stets im Intervall $[-1, 1]$, wobei der Wert 1 dann angenommen wird, wenn $x_1(\tau)$ und $x_2(t + \tau)$ übereinstimmen.

3.5.10 Beispiel

Seien

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= \begin{cases} \cos \tau & \text{falls } -\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ x_2(\tau) &= \begin{cases} \sin \tau & \text{falls } 0 \leq \tau \leq 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$x_1(\tau)x_2(t + \tau) = \begin{cases} \cos \tau \sin(t + \tau) & , -\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2} \text{ und } -t \leq \tau \leq 2\pi - t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit lässt sich die Kreuzkorrelation der beiden Funktionen berechnen zu

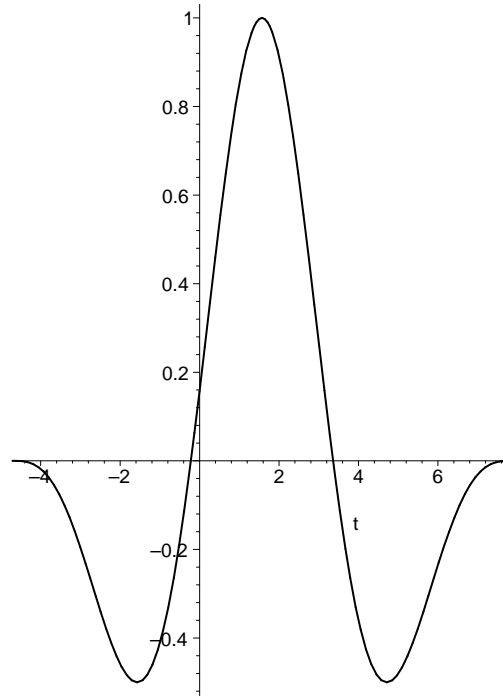
$$\begin{aligned} r_{x_1, x_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t + \tau) d\tau \\ &= \begin{cases} \int_{-\pi/2}^{2\pi-t} \cos \tau \sin(t + \tau) d\tau & , \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{2} \\ \int_{-t}^{3\pi/2} \cos \tau \sin(t + \tau) d\tau & , -\frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \cos t + \frac{5}{4}\pi \sin t - \frac{1}{2}t \sin t & , \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{2} \\ \frac{1}{2} \cos t + \frac{3}{4}\pi \sin t + \frac{1}{2}t \sin t & , -\frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(\tau)|^2 d\tau = \pi,$$

folgt somit

$$\tilde{r}_{x_1, x_2}(t) = \frac{1}{\pi} r_{x_1, x_2}(t)$$



Normierte Kreuzkorrelation

Der Maximalwert wird angenommen für $t = \pi/2$. Dies ist eigentlich auch klar, da

$$\begin{aligned}
 x_2\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) &= \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) & \text{falls } 0 \leq \frac{\pi}{2} + \tau \leq 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \cos \tau & \text{falls } -\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= x_1(\tau)
 \end{aligned}$$

3.5.11 Beispiel

Seien

$$\begin{aligned}
 x_1(\tau) &= \begin{cases} \sin \tau & \text{falls } 0 \leq \tau \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 x_2(\tau) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq \tau \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$x_1(\tau)x_2(t + \tau) = \begin{cases} \sin \tau & \text{falls } 0 \leq \tau \leq \pi \text{ und } -t \leq \tau \leq \pi - t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit lässt sich die Kreuzkorrelation der beiden Funktionen berechnen zu

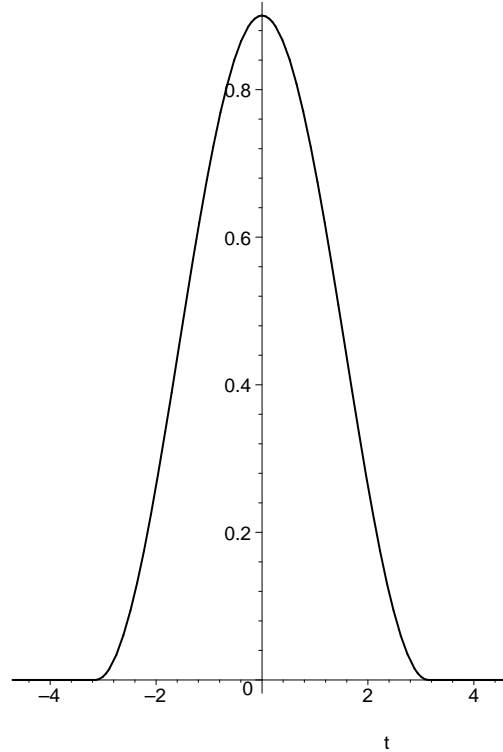
$$\begin{aligned}
 r_{x_1, x_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t + \tau) d\tau \\
 &= \begin{cases} \int_0^{\pi-t} \sin \tau d\tau & \text{falls } 0 \leq t \leq \pi \\ \int_{-t}^{\pi} \sin \tau d\tau & \text{falls } -\pi \leq t < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 + \cos t & \text{falls } -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(\tau)|^2 d\tau = \frac{\pi}{2} \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(\tau)|^2 d\tau = \pi,$$

d.h.

$$\tilde{r}_{x_1, x_2}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} r_{x_1, x_2}(t)$$



Normierte Kreuzkorrelation

Der Maximalwert wird für $t = 0$ angenommen und beträgt $\tilde{r}_{x_1, x_2}(0) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.9$

3.5.12 Bemerkung

Wegen des oben bereits erwähnten Zusammenhangs zwischen Korrelation und Faltung lassen sich Kreuz- und Autokorrelation auch über folgenden Weg berechnen.

- a) Berechnung der Fouriertransformierten von x_1 und x_2
- b) Multiplikation der Fouriertransformierten
- c) Inverse Fouriertransformation für das Produkt

Bedeutung erlangt dieser Zusammenhang insbesondere auch bei der Verarbeitung diskreter Daten. Der Weg über die *Diskrete Fouriertransformation* erfordert bei der Verwendung schneller Algorithmen (*Fast Fourier Transform*) erheblich weniger Rechenoperationen als die direkte Berechnung diskreter Korrelationen.

3.5.2 Anwendungsbeispiel: LTI-Systeme

Wir betrachten Systeme, die zu einem vorgegebenen *Eingangssignal* $x(t)$ ein *Ausgangssignal* $y(t)$ erzeugen. Schematisch

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y(t)$$

Dabei soll das System *linear* sein, d.h. wenn das System aus den Eingangssignalen $x_1(t)$, $x_2(t)$ die Ausgangssignale $y_1(t)$, $y_2(t)$ erzeugt, so wird aus dem Eingangssignal $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ das Ausgangssignal $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$. Weiter soll das System *zeitinvariant* sein, d.h. aus dem um die Dauer t_0 verschobenen Eingangssignal wird das ebenfalls um t_0 verschobene Ausgangssignal erzeugt. Systeme mit diesen beiden Eigenschaften nennt man lineare zeitinvariante Systeme, kurz LTI-Systeme (linear time invariant systems).

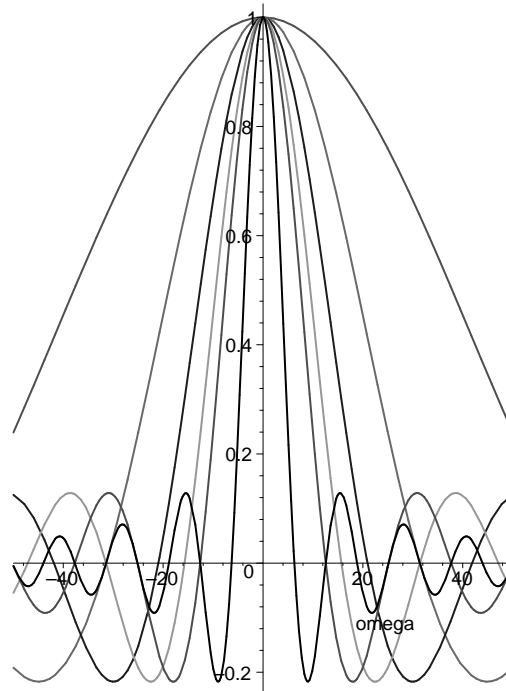
Für unsere weiteren Überlegungen benötigen wir den Begriff der δ -Distribution. Eine allgemeine, mathematisch fundierte Herleitung kann im Rahmen dieser Vorlesung nicht gegeben werden. Wir beschränken uns daher auf eine heuristische Herleitung und die Angabe einiger wichtiger Eigenschaften.

Man betrachtet z.B. einen Rechteckimpuls der Breite ε und der Höhe $1/\varepsilon$, d.h.

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{falls } -\frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

mit der Fouriertransformierten (vgl. Beispiel 3.2.4)

$$\mathcal{F}\{x_\varepsilon(t)\}(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)$$



Graphen von $\text{sinc}(\omega\varepsilon/2)$ für verschiedene Werte von ε

Für die Funktionen $x_\varepsilon(t)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x_\varepsilon(t) dt &= \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} dt \\ &= 1 \text{ für jedes } \varepsilon > 0 \\ x_\varepsilon(t) &= x_\varepsilon(-t), \text{ d.h. } x_\varepsilon(t) \text{ gerade} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) &= \begin{cases} \infty & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Man stellt sich nun vor, dass ε immer kleiner wird. Die Rechteckimpulse werden dann immer schmaler und höher. Den Grenzfall ($\varepsilon \rightarrow 0$) bezeichnet man dann als δ -Distribution $\delta(t)$. Dabei ist zu beachten, dass es sich hier nicht um eine Funktion im üblichen Sinne handelt.

Für die Fouriertransformierten $\mathcal{F}\{x_\varepsilon(t)\}(\omega)$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right) = 1 \text{ für jedes } \omega$$

und man setzt daher

$$\delta(t) \circ \bullet 1$$

Weitere für die Anwendung wichtige Eigenschaften sind:

- a) Ist eine Funktion g in einer Umgebung eines Punktes t stetig, und bezeichnet G die Stammfunktion von g , so gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = (g \star \delta)(t) = g(t)$$

Die Delta-Distribution ist also das Einselement der Faltungsoperation.

- b) Allgemeiner gilt

$$(g \star \delta_{t_0})(t) = g(t - t_0),$$

wobei $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$ den verschobenen Delta-Impuls bezeichnet.

- c)

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \delta(t), \quad \alpha > 0.$$

Man kann nun zeigen, dass sich ein lineares, zeitinvariantes System folgendermaßen beschreiben lässt.

Sei $S(x(t)) = y(t)$. Dann gilt:

$$S(x(t)) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega) \cdot X(\omega)\}(t) \quad (*)$$

mit der Fouriertransformierten $X(\omega)$ von $x(t)$ und einer Funktion $H(\omega)$, die durch das System S festgelegt ist. $H(\omega)$ heißt *Übertragungsfunktion* oder *Frequenzgang* des Systems. Betrachtet man als Eingangssignal speziell die Delta-Distribution (den Delta-Impuls), so erhält man daraus

$$S(\delta(t)) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega) \cdot 1\}(t) = h(t)$$

mit

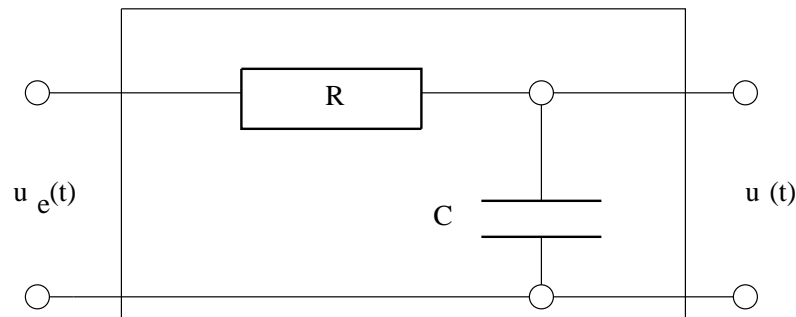
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}(t).$$

Die Antwort des Systems auf den Delta-Impuls ist also die Rücktransformierte des Frequenzganges und wird als *Impulsantwort* des Systems bezeichnet. Zusammen mit der Gleichung (*) bedeutet dies, dass sich $S(x(t)) = y(t)$ als Faltung des Eingangssignals $x(t)$ mit der Impulsantwort $h(t)$ beschreiben lässt.

$$S(x(t)) = (h \star x)(t)$$

3.5.13 Beispiel

Wir betrachten wieder folgende Schaltung.



Schaltbild RC-Kreis

Der Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung $u_e(t)$ und der Ausgangsspannung $u(t)$ ist wieder durch die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$u_e(t) = u(t) + RC \frac{du(t)}{dt}$$

gegeben (lineares zeitinvariantes System).

Bestimmung der Übertragungsfunktion $H(\omega)$: Es gilt

$$\delta(t) = h(t) + RC \frac{dh(t)}{dt}$$

Anwendung der Fouriertransformation und des Differentiationsatzes liefert

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) &= \mathcal{F}\{h(t)\}(\omega) + RC \mathcal{F}\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\}(\omega) \\ &= H(\omega) + RC \cdot j\omega H(\omega) \end{aligned}$$

bzw. aufgelöst nach $H(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + RC \cdot j\omega}$$

Bestimmung der Impulsantwort $h(t)$: Mit der Korrespondenz

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \circ \bullet \quad X(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

(vgl. Tabelle) und dem Skalierungssatz erhält man aus $H(\omega)$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir bestimmen nun zum Eingangssignal

$$u_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das zugehörige Ausgangssignal $u(t) = (x \star h)(t)$ mit Hilfe des Faltungssatzes. Mit Hilfe der Tabelle erhält man

$$\begin{aligned} U(\omega) &= U_e(\omega) \cdot H(\omega) \\ &= \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) \frac{1}{1 + RC \cdot j\omega} \\ &= \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) \frac{1}{1 + RC \cdot j\omega} \end{aligned}$$

Da $\delta(\omega) = 0$ für $\omega \neq 0$ und $1/(1 + RC \cdot j\omega) = 1$ für $\omega = 0$ ergibt sich daraus

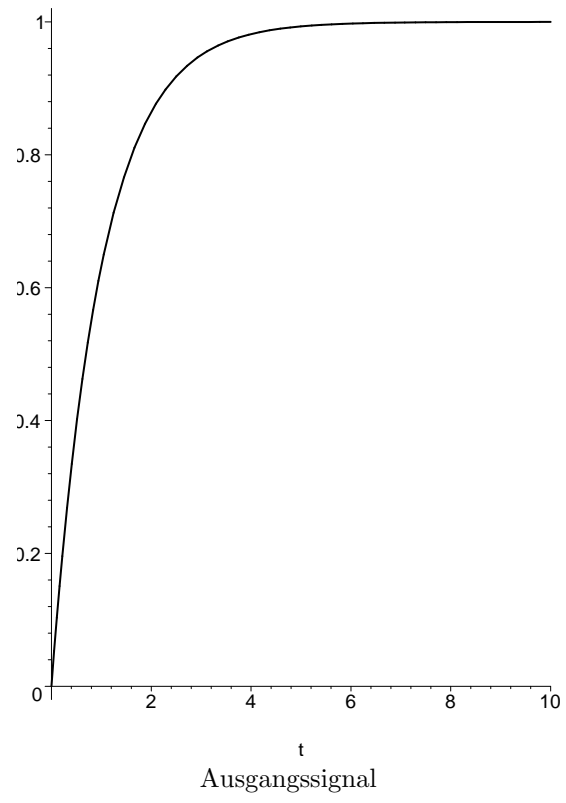
$$U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega(1 + RC \cdot j\omega)}$$

Mittels Partialbruchzerlegung erhält man

$$U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{RC}{1 + RC \cdot j\omega}$$

Aus der Tabelle liest man nun für das Ausgangssignal ab

$$\begin{aligned} u(t) &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\frac{t}{RC}} & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 - e^{-\frac{t}{RC}} & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \end{aligned}$$



3.6 Das Shannonsche Abtasttheorem

In der Praxis kennt man von einer Zeitfunktion $x(t)$ häufig nur die Werte zu diskreten äquidistanten Zeitpunkten $n \cdot \Delta t$, $n \in \mathbb{Z}$. Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen sich $x(t)$ aus der Folge $(x(n \cdot \Delta t))_{n \in \mathbb{Z}}$ vollständig rekonstruieren lässt. Auskunft darüber gibt der folgende Satz, der unter dem Namen Shannonsches Abtasttheorem bekannt ist.

3.6.1 Satz

Sei $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Spektralfunktion mit

$$X(\omega) = 0 \text{ für } |\omega| > \Omega > 0, \quad (3.3)$$

d. h. $x(t)$ besitzt endliche Bandbreite Ω .

Dann lässt sich die zugehörige Zeitfunktion $x(t)$ darstellen als

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot \Delta t) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta t} (t - n \cdot \Delta t) \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

falls die Abtastfrequenz $\frac{2\pi}{\Delta t}$ mindestens doppelt so groß ist wie die Bandbreite Ω , d. h.

$$\frac{2\pi}{\Delta t} \geq \Omega \text{ bzw. } \Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega}. \quad (3.4)$$

(Die Voraussetzungen (3.3) und (3.4) des Satzes bezeichnet man auch als Nyquist-Bedingung.)

3.6.2 Beispiel

Sei $x(t) = \cos(\pi t)$. Aus der Tabelle ermitteln wir

$$X(\omega) = \pi \delta(\omega - \pi) + \pi \delta(\omega + \pi)$$

Die Bandbreite ist somit $\Omega = \pi$. Für die Abtastrate muss somit $\Delta t \leq 1$ erfüllt sein. Mit $\Delta t = 1$ erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\pi) \operatorname{sinc}(\pi(t-n)) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sinc}(\pi(t-n)) \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kapitel 4

Laplace Transformation

4.1 Vorbemerkungen

Wir behandeln in diesem Kapitel eine weitere Transformation, die in Anwendungen bei Problemen in Naturwissenschaft und Technik eine Rolle spielt. Häufig wird die Laplace Transformation zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und entsprechender Systeme von Differentialgleichungen verwendet.

4.2 Definition der Laplace Transformation

Im folgenden betrachten wir generell Funktionen $x(t)$, die für $t \geq 0$ definiert sind. Für $t < 0$ denken wir uns die Funktionen mit Null fortgesetzt, ohne dies jedes Mal explizit anzugeben.

4.2.1 Definition

Eine Funktion $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Laplace transformierbar*, wenn das uneigentliche Integral

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(s)$$

für ein $s \in \mathbb{C}$ existiert. Dann heißt $X(s)$ *Laplace transformierte* von $x(t)$.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Laplace-Transformierten liefert der folgende Satz.

4.2.2 Satz

Sei $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, und es existiere ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty,$$

dann konvergiert das Integral

$$\int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

für alle $s = \sigma + j\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma \geq \sigma_0$.

Beweis: Da $|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}| \cdot |e^{-j\tau t}| = e^{-\sigma t}$, gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt &= \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \\ &\leq \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \end{aligned}$$

□

4.2.3 Bemerkung

Auch im Zusammenhang mit der Laplacetransformation verwendet man das Korrespondenzsymbol

$$x(t) \circ \bullet x(s)$$

4.2.4 Beispiel

Sei $x(t) = 1$ für $t \geq 0$ (Sprungfunktion, Heavisidefunktion). Dann gilt für $s = \sigma + j\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} \quad (\text{da } \sigma \neq 0) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \end{aligned}$$

Nun gilt für $s = \sigma + j\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 0$

$$e^{-sb} = \underbrace{e^{-b\sigma}}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ (} b \rightarrow \infty \text{)} \\ \text{da } \sigma > 0}} \cdot \underbrace{e^{-jb\tau}}_{\text{beschränkt}}$$

Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{s} \text{ für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} s > 0$$

bzw. kurz

$$1 \circ \bullet \frac{1}{s}$$

4.2.5 Beispiel

Sei $x(t) = t^n$ für $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ für } \operatorname{Re} s > 0$$

$n = 0$: vgl. Beispiel 4.2.4

$n \Rightarrow n + 1$: Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{n+1}\}(s) &= \int_0^{\infty} t^{n+1} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} t^{n+1} \Big|_0^{\infty} + \frac{n+1}{s} \underbrace{\int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt}_{=\mathcal{L}\{t^n\}(s)} \\ &= -\frac{1}{s} \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} b^{n+1}}_{=0 \text{ für } \operatorname{Re} s > 0} + \frac{n+1}{s} \underbrace{\mathcal{L}\{t^n\}(s)}_{=\frac{n!}{s^{n+1}}} \\ &= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} \end{aligned}$$

Also gilt die Korrespondenz

$$t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Nicht jede Funktion ist Laplace-transformierbar. Man kann aber eine Klasse von Funktionen angeben, deren Wachstum nicht zu groß ist.

4.2.6 Satz

Sei $x(t)$ stückweise stetig mit höchstens exponentiellem Wachstum, d.h.

$$|x(t)| \leq M e^{kt} \text{ mit Konstanten } M, k \in \mathbb{R}$$

Dann existiert $\mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ für alle $s = \sigma + j\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > k$.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\{x(t)\}(s)| &\leq \int_0^\infty \underbrace{|x(t)|}_{\leq M e^{kt}} \underbrace{|e^{-st}|}_{= e^{-t\sigma}} dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{(-\sigma+k)t} dt \\ &= \frac{M}{\sigma - k} \text{ für } \sigma > k \end{aligned}$$

□

4.3 Korrespondenzen und Rechenregeln

4.3.1 Satz (Linearität)

Seien $x_1(t) \circ \bullet X_1(s)$, $x_2(t) \circ \bullet X_2(s)$ und K_1, K_2 Konstanten. Dann gilt

$$K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) \circ \bullet K_1 X_1(s) + K_2 X_2(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t)\}(s) = K_1 \mathcal{L}\{x_1(t)\}(s) + K_2 \mathcal{L}\{x_2(t)\}(s).$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Laplacetransformation. □

4.3.2 Satz (Skalierung)

Ist $x(t) \circ \bullet X(s)$, dann gilt für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$x(at) \circ \bullet \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{x(at)\}(s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}\{x(t)\}\left(\frac{s}{a}\right).$$

Beweis: vgl. Übung □

4.3.3 Satz (Periodische Funktionen)

Sei $x(t)$ T -periodisch, d.h. hier im Zusammenhang mit der Laplace-Transformation

$$x(t) = 0 \text{ für } t < 0 \text{ und } x(t + nT) = x(t) \text{ für } t \geq 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T x(t) e^{-st} dt$$

Beweis: Wir zerlegen das Integrationsintervall in die Teilintervalle $[0, T]$, $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, ... der Länge T . Dies ergibt

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) e^{-st} dt$$

Mit der Substitution $\tau = t - nT$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \underbrace{x(\tau + nT)}_{=x(\tau)} \underbrace{e^{-s(\tau+nT)}}_{=e^{-s\tau} e^{-snT}} d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T x(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \left(\int_0^T x(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sT})^n \right) \end{aligned}$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sT})^n = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

konvergiert für $\operatorname{Re} s > 0$, d.h. es gilt

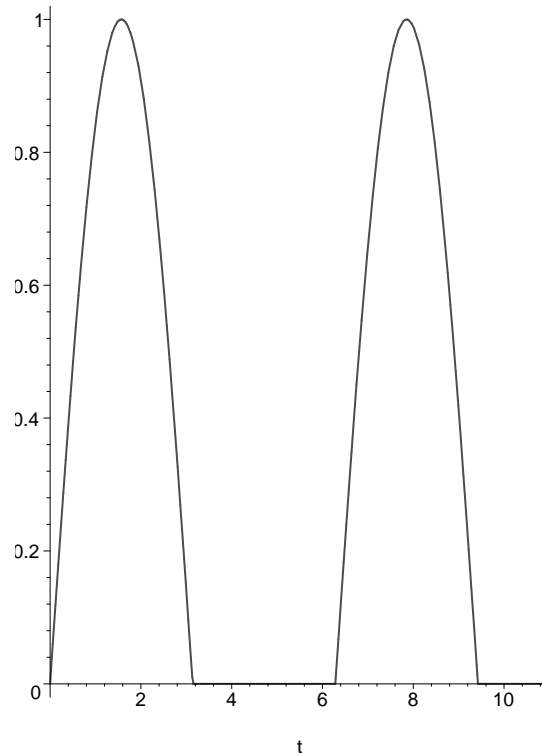
$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T x(t) e^{-st} dt$$

□

4.3.4 Beispiel

Sei

$$x(t) = \begin{cases} \sin t & \text{falls } t \geq 0 \text{ und } \sin t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Dann gilt:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} \sin t e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{2j} \int_0^\pi \left\{ e^{t(j-s)} - e^{-t(j+s)} \right\} dt \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{j-s} \left[e^{t(j-s)} - 1 \right] + \frac{1}{j+s} \left[e^{-t(j+s)} - 1 \right] \right\}_0^\pi \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{j-s} \left[\underbrace{e^{(j-s)\pi} - 1}_{=-e^{-s\pi}} \right] + \frac{1}{j+s} \left[\underbrace{e^{-(j+s)\pi} - 1}_{=-e^{-s\pi}} \right] \right\} \\
&= \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \\
&= \frac{1}{1 - e^{s\pi}} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}
\end{aligned}$$

Die folgenden Rechenregeln betreffen wieder Verschiebungen im Argument der Zeit- bzw. Bildfunktion.

4.3.5 Satz (1. Verschiebungssatz)

Ist $x(t) \circ \bullet X(s)$, dann gilt für $a > 0$

$$x(t - a) \circ \bullet e^{-as} X(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{x(t - a)\}(s) = e^{-as} \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$

Beweis: Mit der Substitution $\tau = t - a$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x(t - a)\}(s) &= \int_0^\infty x(t - a) e^{-st} dt \\
&= \int_{-a}^\infty x(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau \\
&= \int_0^\infty x(\tau) e^{-s\tau} e^{-sa} d\tau \\
&= e^{-sa} \mathcal{L}\{x(t)\}(s)
\end{aligned}$$

□

4.3.6 Beispiel

Sei $a > 0$ und

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$x(t - a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $X(s) = \frac{1}{s}$ folgt aus dem 1. Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\{x(t - a)\}(s) = \frac{1}{s} e^{-as}$$

4.3.7 Satz (2. Verschiebungssatz)

Ist $x(t) \circ \bullet X(s)$, dann gilt

$$e^{-ct} x(t) \circ \bullet X(s + c)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{e^{-ct} x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s + c).$$

Dabei muss $s + c$ im Definitionsbereich der Laplace-Transformierten von $x(t)$ liegen.

Beweis: Man rechnet leicht nach, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-ct}x(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-ct}x(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} x(t)e^{-(s+c)t} dt \\ &= \mathcal{L}\{x(t)\}(s+c)\end{aligned}$$

□

4.3.8 Beispiel

Sei $x(t) = e^{-t}$ für $t \geq 0$ und $\tilde{x}(t) = 1$ für $t \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}\tilde{x}(t)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\tilde{x}(t)\}(s+1) \\ &= \frac{1}{s+1} \text{ für } \operatorname{Re}(s+1) > 0, \text{ d.h. } \operatorname{Re} s > -1\end{aligned}$$

4.3.9 Satz (1. Differentiationssatz)

Ist $x(t) \circ \bullet X(s)$ und sei $x(t)$ stückweise differenzierbar. Dann gilt

$$x'(t) \circ \bullet sX(s) - x(0^+),$$

wobei $x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t)$ den rechtsseitigen Grenzwert bezeichnet, oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - x(0^+).$$

Beweis: Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} x'(t)e^{-st} dt \\ &= x(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= -x(0^+) + s\mathcal{L}\{x(t)\}(s),\end{aligned}$$

□

4.3.10 Bemerkung

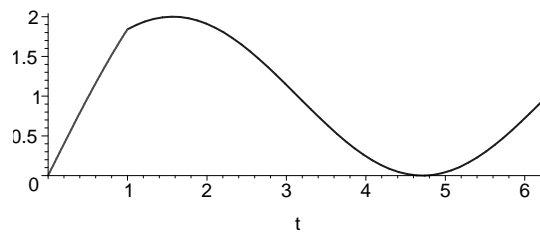
Allgemeiner kann man auch formulieren: Ist $x(t)$ n -mal differenzierbar, dann gilt

$$x^{(k)}(t) \circ \bullet s^k X(s) - \sum_{l=0}^{k-1} s^l x^{(k-1-l)}(0^+), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

4.3.11 Beispiel

Sei

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ t + \sin t & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + \sin t & \text{falls } t > 1 \end{cases}$$



Wir definieren

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ t & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}, \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \text{ oder } \sin t < 0 \\ \sin t & \text{falls } t \geq 0 \text{ und } \sin t \geq 0 \end{cases}$$

Dann gilt $x(t) = x_1(t) - x_1(t-1) + x_2(t) - x_2(t-\pi)$. Mit den Korrespondenzen

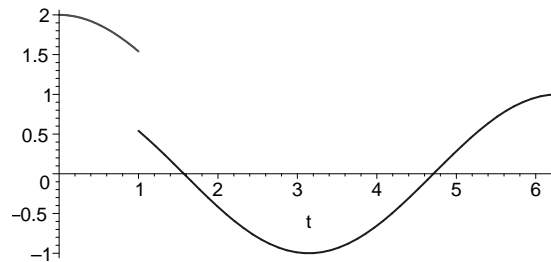
$$\begin{aligned} x_1(t) &\circ\bullet \frac{1}{s^2} \\ x_1(t-1) &\circ\bullet e^{-s} \cdot \frac{1}{s^2} \\ x_2(t) &\circ\bullet \frac{1}{1+s^2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \\ x_2(t-\pi) &\circ\bullet e^{-\pi s} \cdot \frac{1}{1+s^2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \end{aligned}$$

folgt somit

$$x(t) \circ\bullet \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s}) + \frac{1}{1+s^2}$$

Für die Ableitung

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 + \cos t & \text{falls } 0 < t < 1 \\ \cos t & \text{falls } t > 1 \end{cases}$$



erhalten wir mit Hilfe des 1. Differentiationssatzes

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - x(0^+) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) + \frac{s}{1+s^2}$$

4.3.12 Satz (Integrationsatz)

Ist $x(t) \circ\bullet X(s)$, dann gilt:

$$\int_0^t x(\tau) d\tau \circ\bullet \frac{1}{s}X(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$

Beweis: Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\}(s) &= \int_0^\infty \left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} e^{-st} dt \\ &= \underbrace{-\frac{1}{s}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} e^{-st}}_{=0} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{x(t)\}(s) \end{aligned}$$

□

4.3.13 Beispiel

$$\int_0^t \sin(\omega\tau) d\tau = \frac{-1}{\omega} \cos(\omega\tau) \Big|_0^t = \frac{-1}{\omega} (\cos \omega t - 1)$$

Mit den Korrespondenzen

$$\begin{array}{l} \sin(\omega t) \quad \circ \bullet \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{vgl. Übung}) \\ 1 \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{s} \end{array}$$

folgt mit dem Integrationsatz die Korrespondenz

$$\cos(\omega t) \quad \circ \bullet \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

4.3.14 Satz (2. Differentiationssatz)

Ist $x(t) \circ \bullet X(s)$ und sei $X(s)$ stückweise differenzierbar, dann gilt

$$-tx(t) \circ \bullet X'(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{-tx(t)\}(s) = \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} X'(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty x(t) (-t) e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\{-tx(t)\}(s) \end{aligned}$$

□

4.3.15 Bemerkung

Allgemeiner kann man hier formulieren: Ist $x(t) \circ \bullet X(s)$ und sei $t^k x(t)$ und $X(s)$ n -mal differenzierbar, dann gilt

$$(-t)^k x(t) \circ \bullet X^{(k)}(s), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

4.3.16 Beispiel

Es gilt (vgl. Übung)

$$e^{\lambda t} \circ \bullet \frac{1}{s - \lambda}$$

Damit folgt:

$$\begin{array}{l} -t e^{\lambda t} \quad \circ \bullet \quad -\frac{1}{(s - \lambda)^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s - \lambda} \right) \\ t^2 e^{\lambda t} \quad \circ \bullet \quad \frac{2}{(s - \lambda)^3} = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s - \lambda} \right) \end{array}$$

4.3.17 Beispiel

Wir bestimmen die Laplace-Transformierte von $x(t) = t^2 \sin(\omega t)$, $t \geq 0$. Es gilt (vgl. Übung)

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Also folgt

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin(\omega t)\}(s) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = -2\omega \frac{\omega^2 - 3s^2}{(s^2 + \omega^2)^3}$$

4.4 Der Faltungssatz

Wir erinnern uns zunächst an die Definition der Faltung zweier Funktionen im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation:

$$(x_1 \star x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau$$

Sind nun $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Funktionen mit $x_1(t) = x_2(t) = 0$ für $t < 0$, dann gilt:

$$x_1(\tau) = 0 \text{ für } \tau < 0 \text{ und } x_2(t - \tau) = 0 \text{ für } \tau > t$$

Damit reduziert sich das Faltungsintegral zu

$$(x_1 \star x_2)(t) = \int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau$$

4.4.1 Satz

Ist

$$x_1(t) \circ \bullet X_1(s), \quad x_2(t) \circ \bullet X_2(s)$$

Dann gilt

$$(x_1 \star x_2)(t) \circ \bullet X_1(s)X_2(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{(x_1 \star x_2)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}(s)\mathcal{L}\{x_2(t)\}(s)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(x_1 \star x_2)(t)\}(\omega) &= \int_0^{\infty} (x_1 \star x_2)(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \right\} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \right\} e^{-st} dt \\ &\quad \text{da } x_2(t - \tau) = 0 \text{ für } \tau > t \\ &= \int_0^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau} \left\{ \int_0^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-s(t-\tau)} dt \right\} d\tau \\ &= \left\{ \int_0^{\infty} x_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right\} \left\{ \int_0^{\infty} x_2(\sigma) e^{-s\sigma} d\sigma \right\} \\ &= \mathcal{L}\{x_1(t)\}(s)\mathcal{L}\{x_2(t)\}(s) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $\sigma = t - \tau$ verwendet haben. □

Wie wir sehen werden, spielt der Faltungssatz bei der Behandlung von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen eine wichtige Rolle.

4.4.2 Beispiel

Gegeben sei die Laplace-Transformierte

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)s}$$

Gesucht ist $x(t)$, so dass $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ gilt. Zunächst gilt

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

mit $x_1(t) = 1$ und $x_2(t) = \sin(t)$ für $t \geq 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1 \star x_2)(t) \\ &= \int_0^t \sin \tau \, d\tau \\ &= 1 - \cos t \end{aligned}$$

4.5 Grenzwertsätze

Manchmal interessiert in Anwendungen das Verhalten der Originalfunktion für $t \rightarrow 0^+$ bzw. $t \rightarrow \infty$. Dieses läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen aus dem Verhalten der als bekannt angenommenen Bildfunktion $X(s)$ ermitteln.

4.5.1 Satz

Sei $x(t)$ differenzierbar für $t > 0$, $x'(t)$ exponentiell beschränkt.

Dann gilt für den Anfangswert

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

Ist darüber hinaus $x(t)$ absolut integrierbar, so gilt für den Endwert

$$\lim_{s \rightarrow 0, \operatorname{Re}(s) \geq 0} sX(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

4.5.2 Beispiel

Sei $X(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} sX(s) &= \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + a^2} \\ &= 1 = x(0^+) \end{aligned}$$

Sei $X(s) = \frac{1}{s(s-4)(s-5)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0, \operatorname{Re}(s) \geq 0} sX(s) &= \lim_{s \rightarrow 0, \operatorname{Re}(s) \geq 0} \frac{1}{(s-4)(s-5)} \\ &= \frac{1}{20} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \end{aligned}$$

4.6 Rücktransformation

Für die Anwendungsmöglichkeiten der Laplace-Transformation ist es wichtig, vom Bildbereich in den Originalbereich zurückzugelangen.

Die Rücktransformation geschieht in der Praxis in der Regel mit Hilfe geeigneter Tabellen, in der Transformationspaare aufgelistet sind.

In den Anwendungen treten als Transformationsfunktionen häufig gebrochen rationale Funktionen auf. Diese werden dann mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in eine Summe einfacher Partialbrüche umgewandelt. Mit Hilfe der Transformationstabelle lassen sich dann die für die einzelnen Summanden zugehörigen Originalfunktionen ermitteln.

Es gibt zwar auch Formeln für die inverse Laplace-Transformation, die mit \mathcal{L}^{-1} bezeichnet wird, die Anwendung setzt aber weitreichende Kenntnisse voraus. Für den Fall, dass es sich bei $X(s)$ um eine rationale Funktion handelt, verwendet man die Partialbruchzerlegung (vgl. auch 2. Semester). Wir haben es hier allerdings etwas allgemeiner mit komplexen Funktionen zu tun. Basis sind die folgenden Sätze.

4.6.1 Satz (Linearfaktorzerlegung)

Ist $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(s) = \sum_{l=0}^n a_l s^l$, ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, so lässt sich $P(s)$ darstellen durch die Linearfaktorzerlegung

$$P(s) = a_n (s - s_1)^{r_1} \cdot (s - s_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (s - s_k)^{r_k},$$

wobei $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $P(s)$ mit den Vielfachheiten $r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N}$, $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ bezeichnen.

4.6.2 Beispiel

$$\begin{aligned} P(s) &= s^3 + s^2 + 5s + 9 + 12j \\ &= (s - (1 - 2j))(s - 3j)(s + 2 + j) \end{aligned}$$

Hierbei ist $n = 3$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$.

$$\begin{aligned} P(s) &= s^4 + 2(3 - j)s^3 + 3(3 - 4j)s^2 - 2(3 + 10j)s - 10 \\ &= (s + 3 - j)(s + 3 + j)(s - j)^2 \end{aligned}$$

Hierbei ist $n = 4$, $r_1 = r_2 = 1$ und $r_3 = 2$.

Zur Partialbruchzerlegung gilt:

4.6.3 Satz

Ist $R(s) = P(s)/Q(s)$ eine rationale Funktion, so dass der Grad von P kleiner als der Grad von Q ist, und besitzt Q die Linearfaktorzerlegung

$$Q(s) = a_n (s - s_1)^{r_1} \cdot (s - s_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (s - s_k)^{r_k},$$

so lässt sich R darstellen als

$$R(s) = \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{r_m} \frac{A_{l,m}}{(s - s_m)^l}$$

mit geeigneten Koeffizienten $A_{l,m} \in \mathbb{C}$.

4.6.4 Beispiel

Sei

$$R(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}.$$

Für das Nenner polynom gilt die Faktorisierung

$$Q(s) = (s - 1)(s + 1)(s - j)(s + j).$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist somit

$$R(s) = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s - j} + \frac{D}{s + j}$$

Multiplikation mit $Q(s)$, sortieren nach Potenzen von s und Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + C + D \\ 1 &= A - B + jC - jD \\ 0 &= A + B - C - D \\ 0 &= A - B - jC + jD \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = -\frac{j}{4}, \quad D = \frac{j}{4}$$

Im Fall einfacher Nullstellen des Nennerpolynoms $Q(s)$ kann man die Koeffizienten für die Partialbruchzerlegung auch einfacher gewinnen.

4.6.5 Satz

Ist $R(s) = P(s)/Q(s)$ eine rationale Funktion, so dass der Grad von P kleiner als der Grad von Q ist, und besitzt Q nur einfache Nullstellen s_1, \dots, s_k , so lässt sich R darstellen als

$$R(s) = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} \frac{1}{s - s_1} + \dots + \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} \frac{1}{s - s_k}$$

4.6.6 Beispiel

Sei wieder

$$R(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}.$$

Für das Nenner polynom gilt die Faktorisierung

$$Q(s) = (s - 1)(s + 1)(s - j)(s + j),$$

d.h. $Q(s)$ besitzt nur einfache Nullstellen. Mit

$$Q'(s) = 4s^3$$

ergibt sich also

$$\frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{P(j)}{Q'(j)} = -\frac{j}{4}, \quad \frac{P(-j)}{Q'(-j)} = \frac{j}{4}$$

Damit können wir nun für bestimmte rationale Funktionen (einfache Nullstellen des Nennerpolynoms) die Rücktransformation wegen der Korrespondenz

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s - a}$$

angeben.

4.6.7 Beispiel

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{s^2}{s^4 - 1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s + 1} - \frac{j}{4} \cdot \frac{1}{s - j} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s + j} \end{aligned}$$

ist die Laplacetransformierte von

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{4} (e^t - e^{-t} - j e^{jt} + j e^{-jt}) \\ &= \frac{1}{2} (\sinh t + \sin t) \end{aligned}$$

Den Fall mehrfacher Nullstellen können wir mit Hilfe des 2. Differentiationsatzes (vgl. Satz 4.3.14, Bemerkung 4.3.15 und Beispiel 4.3.16) lösen, da

$$\frac{1}{(k - 1)!} t^{k-1} e^{at} \circ \bullet \frac{1}{(s - a)^k} \text{ für } k \geq 2.$$

4.6.8 Beispiel

Die rationale Funktion

$$R(s) = \frac{1}{(s-j)^2} + \frac{1}{(s+j)^2}$$

ist die Laplacetransformierte von

$$\begin{aligned} r(t) &= te^{jt} + te^{-jt} \\ &= 2t \cdot \cos t \end{aligned}$$

4.7 Anwendung: Lösung von AWP für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Wir erläutern die Vorgehensweise zunächst an Hand von Beispielen.

4.7.1 Beispiel

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = e^{-2t} \text{ mit } x(0) = 1 \text{ und } x'(0) = 1$$

Nach dem Differentiationssatz gilt mit $x(t) \circ \bullet X(s)$

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ \bullet sX(s) - x(0^+) \\ x''(t) &\circ \bullet s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+) \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit $1 \circ \bullet \frac{1}{s}$ nach dem zweiten Verschiebungssatz

$$e^{-2t} \circ \bullet \frac{1}{s+2}$$

Wir wenden nun die Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung an und erhalten mit Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \{s^2X(s) - s - 1\} + \{sX(s) - 1\} - 2X(s) &= \frac{1}{s+2} \\ \Leftrightarrow X(s) \underbrace{(s^2 + s - 2)}_{\text{chrakt. Pol.}} &= \frac{1}{s+2} + s + 2 \end{aligned}$$

Lösen der Gleichung im Bildbereich liefert

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+2) \underbrace{(s^2 + s - 2)}_{(s+2)(s-1)}} + \frac{s+2}{s^2 + s - 2} \\ &= \frac{1}{(s+2)^2(s-1)} + \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Diese Lösung muss nun in den Originalbereich zurücktransformiert werden. Für die Rücktransformation von $\frac{1}{(s+2)^2(s-1)}$ führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.

Ansatz:

$$\frac{1}{(s+2)^2(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s-1}$$

d. h.

$$1 = A(s+2)(s-1) + B(s-1) + C(s+2)^2$$

Die Koeffizienten lassen sich hier recht einfach durch Einsetzen spezieller Werte für s ermitteln.

$$\begin{aligned} s = 1 & : 1 = 9C \\ s = -2 & : 1 = -3B \\ s = 0 & : 1 = -2A - B + 4C \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet

$$A = -\frac{1}{9}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{9}$$

Also gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} X(s) &= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} \\ &= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation kann jetzt termweise mit Hilfe der Tabelle oder mit bekannten Korrespondenzen und Ausnutzung der Rechenregeln durchgeführt werden. Dies ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = -\frac{1}{9} e^{-2t} - \frac{1}{3} t e^{-2t} + \frac{10}{9} e^t$$

4.7.2 Beispiel

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = \sin(3t) \text{ mit } x(0) = 0 \text{ und } x'(0) = 0$$

Nach dem Differentiationssatz gilt mit $x(t) \circ \bullet X(s)$

$$\begin{aligned} x'(t) & \circ \bullet sX(s) - x(0^+) \\ x''(t) & \circ \bullet s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+) \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit $\sin t \circ \bullet \frac{1}{s^2+1}$ nach dem Skalierungssatz

$$\sin(3t) \circ \bullet \frac{3}{s^2+9}$$

Wir wenden nun die Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung an und erhalten mit Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} s^2X(s) - 2sX(s) + 2X(s) &= \frac{3}{s^2+9} \\ \Leftrightarrow X(s) \underbrace{(s^2 - 2s + 2)}_{\text{charakt. Pol.}} &= \frac{3}{s^2+9} \end{aligned}$$

Lösen der Gleichung im Bildbereich liefert

$$X(s) = \frac{3}{(s^2+9)(s^2-2s+2)}$$

Diese Lösung muss nun in den Originalbereich zurücktransformiert werden. Für die Rücktransformation der rechten Seite führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung durch. Da die quadratischen Faktoren im Nenner in \mathbb{R} irreduzibel sind machen wir den Ansatz:

$$\frac{3}{(s^2+9)(s^2-2s+2)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2-2s+2}$$

d. h.

$$\begin{aligned} 3 &= (As + B)(s^2 - 2s + 2) + (Cs + D)(s^2 + 9) \\ \Leftrightarrow \\ 3 &= s^3(A + C) + s^2(-2A + B + D) + s(2A - 2B + 9C) + 2B + 9D \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= -2A + B + D \\ 0 &= 2A - 2B + 9C \\ 3 &= 2B + 9D \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet

$$A = \frac{6}{85}, \quad B = -\frac{21}{85}, \quad C = -\frac{6}{85}, \quad D = \frac{33}{85}$$

Also gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{85} \left\{ \frac{6s - 21}{s^2 + 9} + \frac{-6s + 33}{s^2 - 2s + 2} \right\} \\ &= \frac{1}{85} \left\{ 2 \cdot \frac{\frac{s}{3}}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 1} - \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 1} - 6 \cdot \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1} + 27 \cdot \frac{1}{(s - 1)^2 + 1} \right\} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation kann jetzt termweise mit Hilfe der Tabelle oder mit bekannten Korrespondenzen und Ausnutzung der Rechenregeln durchgeführt werden. Dies ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{1}{85} \{ 6 \cos(3t) - 7 \sin(3t) - 6e^t \cos t + 27e^t \sin t \}$$

4.7.3 Beispiel

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \sin t \text{ mit } x(0) = 0 \text{ und } x'(0) = 0$$

Nach dem Differentiationssatz gilt mit $x(t) \circ \bullet X(s)$

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ \bullet sX(s) - x(0^+) \\ x''(t) &\circ \bullet s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+) \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\sin t \circ \bullet \frac{1}{s^2 + 1}$. Wir wenden nun die Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung an und erhalten mit Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} s^2X(s) - 2sX(s) + X(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ \Leftrightarrow X(s) \underbrace{(s - 1)^2}_{\text{charakt. Pol.}} &= \frac{1}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

Lösen der Gleichung im Bildbereich liefert

$$X(s) = \frac{1}{(s - 1)^2(s^2 + 1)}$$

Diese Lösung muss nun in den Originalbereich zurücktransformiert werden. Für die Rücktransformation der rechten Seite führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.

Ansatz:

$$\frac{1}{(s - 1)^2(s^2 + 1)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{(s - 1)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}$$

d. h.

$$\begin{aligned} 1 &= A(s-1)(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)^2 \\ \Leftrightarrow \\ 1 &= s^3(A+C) + s^2(-A+B-2C+D) + s(A+C-2D) - A+B+D \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= A+C \\ 0 &= -A+B-2C+D \\ 0 &= A+C-2D \\ 1 &= A+B+D \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = 0$$

Also gilt die Darstellung

$$X(s) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s}{s^2+1} \right\}$$

Die Rücktransformation kann jetzt termweise mit Hilfe der Tabelle oder mit bekannten Korrespondenzen und Ausnutzung der Rechenregeln durchgeführt werden. Dies ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{1}{2} \{ -e^t + te^t + \cos t \}$$

Wir behandeln das Problem nun in allgemeiner Form. Dazu betrachten wir exemplarisch ein Anfangswertproblem zweiter Ordnung, wobei die Differentialgleichung linear mit konstanten Koeffizienten ist, d.h.

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = f(t) \text{ mit } x(0) = x_0 \text{ und } x'(0) = x_1$$

Wir wiederholen zunächst die aus dem zweiten Semester bekannte Methode und untersuchen dann, wie man das Problem mit Hilfe der Laplace-Transformation löst.

Bekannte Methode:

a) Lösen der homogenen DGL

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = 0$$

Ansatz: $x(t) = e^{st}$, d.h. $x'(t) = se^{st}$, $x''(t) = s^2e^{st}$

Einsetzen in die DGL und Division der Gleichung durch e^{st} liefert die charakteristische Gleichung

$$s^2 + ps + q = 0$$

Es können drei verschiedene Fälle eintreten:

i) Zwei verschiedene reelle Nullstellen s_1 und s_2 . Dann ist

$$x_h(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

ii) Eine doppelte reelle Nullstelle s_1 . Dann ist

$$x_h(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 t e^{s_1 t}$$

die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

iii) Ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen $s_1 = \alpha + j\beta$ und $s_2 = \alpha - j\beta$. Dann ist

$$x_h(t) = e^{\alpha t}(C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t))$$

die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

b) Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL erhält man je nach Typ der Störfunktion mit einem speziellen Ansatz (vgl. entsprechende Tabellen) oder mit Variation der Konstanten. Sei die partikuläre Lösung $x_p(t)$.

c) Die allgemeine Lösung der DGL ist dann

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

d) Setzt man nun die Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung ein, so erhält man Werte für die Konstanten C_1 und C_2 . Mit diesen Werten erhält man aus $x(t)$ die Lösung des AWP.

Methode mit Hilfe der Laplace-Transformation:

Wir wenden die Laplace-Transformation auf die DGL an, nutzen den Differentiationssatz aus und setzen die Anfangsbedingungen ein. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \{s^2 X(s) - sx_0 - x_1\} + p\{sX(s) - x_0\} + qX(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\ \Leftrightarrow X(s) \underbrace{(s^2 + ps + q)}_{\text{char. Pol.}} &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + (s+p)x_0 + x_1 \end{aligned}$$

Auflösen nach $X(s)$:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + ps + q} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0 \frac{s+p}{s^2 + ps + q} + x_1 \frac{1}{s^2 + ps + q}$$

Auch hier sind wieder drei Fälle zu unterscheiden.

a) Das charakteristische Polynom besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen s_1 und s_2 , d.h.

$$s^2 + ps + q = (s - s_1)(s - s_2)$$

und es gilt

$$p = -(s_1 + s_2)$$

Dann ist also:

$$X(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0 \frac{s - s_1 - s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} + x_1 \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Für die Rücktransformation benötigt man also die Partialbruchzerlegungen von

$$\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \text{und} \quad \frac{s - s_1 - s_2}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Diese lauten

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} &= \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_2} \\ \frac{s - s_1 - s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} &= -\frac{s_2}{s_1 - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_1} + \frac{s_1}{s_1 - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir im Bildbereich

$$X(s) = \frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ \left[\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right] \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + (x_1 - x_0 s_2) \frac{1}{s - s_1} + (x_0 s_1 - x_1) \frac{1}{s - s_2} \right\}$$

Mit der Korrespondenz $1 \circ \bullet \frac{1}{s}$, dem zweiten Verschiebungssatz und dem Faltungssatz ergibt sich somit durch Rücktransformation die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ [e^{s_1 t} - e^{s_2 t}] \star f(t) + (x_1 - x_0 s_2) e^{s_1 t} + (x_0 s_1 - x_1) e^{s_2 t} \right\}$$

b) Das charakteristische Polynom besitzt eine doppelte reelle Nullstelle s_1 , d.h.

$$s^2 + ps + q = (s - s_1)^2$$

und es gilt

$$p = -2s_1$$

Dann ist also:

$$X(s) = \frac{1}{(s - s_1)^2} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0 \frac{s - 2s_1}{(s - s_1)^2} + x_1 \frac{1}{(s - s_1)^2}$$

Für die Rücktransformation benötigt man also die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{s - 2s_1}{(s - s_1)^2}$$

Diese lautet

$$\frac{s - 2s_1}{(s - s_1)^2} = \frac{1}{s - s_1} - s_1 \cdot \frac{1}{(s - s_1)^2}$$

Damit erhalten wir im Bildbereich

$$X(s) = \frac{1}{(s - s_1)^2} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0 \cdot \frac{1}{s - s_1} + (x_1 - x_0 s_1) \frac{1}{(s - s_1)^2}$$

Mit den Korrespondenzen $1 \circ \bullet \frac{1}{s}$, $t \circ \bullet \frac{1}{s^2}$, dem zweiten Verschiebungssatz und dem Faltungssatz ergibt sich somit durch Rücktransformation die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = (t e^{s_1 t}) \star f(t) + x_0 e^{s_1 t} + (x_1 - x_0 s_1) t e^{s_1 t}$$

c) Das charakteristische Polynom besitzt ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen $s_1 = \alpha + j\beta$ und $s_2 = \alpha - j\beta$, d.h.

$$s^2 + ps + q = (s - \alpha - j\beta)(s - \alpha + j\beta) = (s - \alpha)^2 + \beta^2$$

und es gilt

$$p = -2\alpha$$

Dann ist also:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0 \frac{s - 2\alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + x_1 \frac{1}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \\ &= \frac{1}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0 \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + (x_1 - \alpha x_0) \cdot \frac{1}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

Mit den Korrespondenzen $\sin t \circ \bullet \frac{1}{s^2+1}$, $\cos t \circ \bullet \frac{s}{s^2+1}$, dem zweiten Verschiebungssatz, dem Skalierungssatz und dem Faltungssatz ergibt sich somit durch Rücktransformation die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{1}{\beta} (e^{\alpha t} \sin(\beta t)) \star f(t) + \frac{1}{\beta} (x_1 - \alpha x_0) e^{\alpha t} \sin(\beta t) + x_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$