Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

12. Juni 2012

Linearen Algebra I

Musterlösung zu Blatt 7

Auf dem Aufgabenblatt hat sich leider ein Fehler eingeschlichen. In Aufgabe 10 (i) fehlt eine Voraussetzung an f. Man muß die Fälle $f = 0$ und $f = \mathrm{id}$ ausschließen. Daher sollte die Aufgabenstellung wie folgt lauten:

Aufgabe 10. Sei V ein k-Vektorraum und sei $f \in \operatorname{End}_k V$.

(i) Es sei $f \neq 0$, $f \neq \mathrm{id}$ und es gelte $f^2 = f$. Zeige, daß es (bis auf Vertauschung von λ und μ) genau ein Paar $(\lambda, \mu) \in k \times k$ mit $\lambda \neq \mu$ gibt, so daß $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}) = 0$ ist. Welches Paar ist das, und was sind die in Aufgabe 9 definierten Räume E_λ und E_μ?

(ii) Betrachte den Spezialfall $V = \{g \mid g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildung}\}$ und den Endomorphismus $f : V \to V$, der definiert ist durch
$$f(g) := g \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$$
für alle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das heißt $f(g)$ ist die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(f(g))(x) = g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, daß dann $f^2 = \mathrm{id}_V$ ist. Zeige ferner, daß es (bis auf Vertauschung von λ und μ) genau ein Paar (λ, μ) von verschiedenen rellen Zahlen λ und μ so gibt, daß $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}_V) = 0$ ist. Wie sieht dieses Paar aus, und was sind die zugehörigen Räume E_λ und E_μ?

Lösung. (i) Zunächst zeigen wir, daß das Paar $(0, 1)$ die geforderte Eigenschaft hat. Es ist nämlich
$$(f - 0\,\mathrm{id}) \circ (f - 1\,\mathrm{id}) = f \circ (f - \mathrm{id}) = f^2 - f = 0.$$

Nun sei (λ, μ) ein anderes Paar mit $\lambda \neq \mu$, das sich von $(0, 1)$ nicht nur durch die Reihenfolge unterscheidet, das bedeutet $(\lambda, \mu) \neq (0, 1), (1, 0)$. Dann muß einer der beiden Werte λ, μ weder 1 noch 0 sein. Daher nehmen wir o.E. $\lambda \neq 0, 1$ an. Im Beweis von Aufgabe 9 (ii,b) ging die Voraussetzung „$(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{id})$“ nicht ein. Daher ist $E_\lambda \cap E_0 = \{0\} = E_\lambda \cap E_1$ und nach Aufgabe 9 (ii) gilt
$$E_\lambda = E_\lambda \cap V = E_\lambda \cap (E_0 + E_1) = (E_\lambda \cap E_0) + (E_\lambda \cap E_1) = \{0\}.$$

Gäbe es nun ein μ mit $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}) = 0$, so müsste wiederum nach Aufgabe 9 (ii) $E_\mu = V$ gelten. Das bedeutet $f = \mu\,\mathrm{id}$. Nach Voraussetzung gilt aber $f^2 = f$, also auch $\mu^2 = \mu$. Das ist aber nur für $\mu = 0$ oder $\mu = 1$ erfüllt. Somit wäre $f = 0$ oder $f = \mathrm{id}$, was beides ausgeschlossen ist.

Der Unterraum E_0 ist genau der Kern von f und E_1 ist die Menge $E_1 = \{v \in V \mid f(v) = v\}$ also die Menge der Fixpunkte von f.

(ii) Wir beweisen $f^2 = \mathrm{id}_V$. Sei $g \in V$ und betrachte $f^2(g)$. Definiere, der Übersicht halber, $h := f(g)$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$(f^2(g))(x) = (f(h))(x) = h(-x) = (f(g))(-x) = g(-(-x)) = g(x).$$

Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt $f^2(g) = g = \mathrm{id}_V(g)$ und da $g \in V$ beliebig war, muß $f^2 = \mathrm{id}_V$ sein.

Es ist klar, daß $(1, -1)$ ein Paar mit der gewünschten Eigenschaft ist, denn es gilt

$$(f - 1\,\mathrm{id}) \circ (f - (-1)\,\mathrm{id}) = (f - \mathrm{id}) \circ (f + \mathrm{id}) = f^2 - \mathrm{id} = 0,$$

wie bereits gezeigt wurde. Mit dem gleichen Argument wie unter (i) folgt, daß $(1, -1)$ das einzige Paar mit dieser Eigenschaft ist, denn für (λ, μ) mit $\lambda \neq 1, -1$ folgert man, daß $E_\lambda = \{0\}$ ist und somit $f = \mu\,\mathrm{id}$ sein müsste. Andererseits gilt $f^2 = \mathrm{id}$ und damit $\mu = 1$ oder $\mu = -1$. Aber f ist nicht die Identität auf V und es ist auch $f \neq -\mathrm{id}_V$.

Hier haben wir eine konkrete Abbildung gegeben, daher können wir auch E_1 und E_{-1} genauer beschreiben. Es gilt

$$E_1 = \{g \in V \mid f(g) = g\} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(-x) = g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

also ist E_1 die Menge der geraden Funktionen. Hingegen ist

$$E_{-1} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(-x) = -g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller ungeraden Funktionen. Beachten wir die Aufgabe 9, so haben wir hiermit gezeigt, daß sich jede Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf eindeutige Weise als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben läßt.