Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

16. Mai 2012

# Linearen Algebra I

## Musterlösung zu Blatt 5

**Aufgabe 4.** Sei $R \in k^{m\times n}$ eine reduzierte Zeilenstufenmatrix. Für $1 \leq t \leq n$ sei $U_t := \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid x_j = 0 \text{ für alle } j < t\}$.

(i) Zeige, daß $U_t \cap Z(R) = \langle R_{i\bullet} \mid s(i) \geq t\rangle$ ist.

(ii) Zeige, daß für reduzierte Zeilenstufenmatrizen $R, R' \in k^{m\times n}$ aus $Z(R) = Z(R')$ bereits $R = R'$ folgt.

Erinnere: Eine Matrix $R \in k^{m\times n}$ heißt **reduzierte Zeilenstufenmatrix**, wenn es einen Index $r \leq m$ und eine Funktion $s : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, n\}$ (eine sog. Stufenfunktion) mit folgenden Eigenschaften gibt:

(0) $s$ ist eine strikt monoton wachsende Funktion.

(2) Für alle $1 \leq i \leq r$ und alle $1 \leq j < s(i)$ ist $R_{ij} = 0$.

(3) Für alle $r < i \leq m$ und alle $1 \leq j \leq n$ ist $R_{ij} = 0$.

(4) Für jedes $1 \leq i \leq r$ ist $R_{is(i)} = 1$.

(5) Für alle $1 \leq i \leq r$ und alle $1 \leq i' < i$ gilt $R_{i's(i)} = 0$.

In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, daß die Zeilen $R_{1\bullet}, \ldots, R_{r\bullet}$ linear unabhängig sind. Ferner sieht man sofort, daß für $1 \leq i \leq r$ die $s(i)$-te Spalte von $R$ mit dem $i$-ten Einheitsvektor in $k^m$ übereinstimmt. Es gilt also

$$R_{i's(i)} = \delta_{i',i}, \tag{A}$$

für jedes $1 \leq i' \leq m$.

**Lösung.** Seien $R$ und $R'$ zwei $(m \times n)$-Matrizen in reduzierter Zeilenstufenform mit Stufenfunktionen $s : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, n\}$ für $R$ und $s' : \{1, \ldots, r'\} \to \{1, \ldots, n\}$ für $R'$.

(i) Zeige die Inklusion von rechts nach links: Es sei $s(i) \geq t$. Nach (2) gilt für alle $j < t$ schon $R_{ij} = 0$. Damit ist $R_{i\bullet} \in U_t$ und natürlich ist auch $R_{i\bullet} \in Z(R)$.
Für die umgekehrte Teilmengen-Beziehung sei $x \in U_t \cap Z(R)$. Wegen $x \in Z(R)$ finden sich $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in k$ mit $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i R_{i\bullet}$. Wegen der Eigenschaft (3) ist $R_{i\bullet} = 0$ für $i > r$, also ist

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i R_{i\bullet}.$$

Nun sei $1 \leq i \leq r$, so daß $s(i) < t$ ist. Dann gilt $x_{s(i)} = 0$, denn $x$ liegt in $U_t$. Also haben wir

$$0 = x_{s(i)} = \sum_{i'=1}^{r} \lambda_{i'} R_{i's(i)} \overset{(A)}{=} \lambda_i R_{is(i)} = \lambda_i.$$

Somit liegt $x$ im Spann der $R_{i\bullet}$ mit $s(i) \geq t$.

(ii) **1. Variante.** Es gelte $Z(R) = Z(R')$. Wir zeigen, daß daraus $R = R'$ folgt.
Zunächst ist $r = r'$, denn es gilt $Z(R) = \langle R_{1\bullet}, \dots, R_{r\bullet} \rangle$ und $R_{1\bullet}, \dots, R_{r\bullet}$ linear unabhängig, also folgt $r = \dim Z(R) = \dim Z(R') = r'$.
Nun zeigen wir, daß die Funktionen $s$ und $s'$ übereinstimmen. Es sei $1 \leq i \leq r$ fest und wir definieren $t := s(i)$. Dann ist

$$U_t \cap Z(R) = U_t \cap Z(R') \overset{\text{(i)}}{=} \langle R'_{i'\bullet} \mid s'(i') \geq t = s(i) \rangle.$$

Da die linke Seite offensichtlich $R_{i\bullet}$ enthält, gibt es $\lambda_{i'} \in k$ mit

$$R_{i\bullet} = \sum_{i' : s'(i') \geq s(i)} \lambda_{i'} R'_{i'\bullet}. \tag{B}$$

Aus der Identität (B) folgt nun, daß $\sum_{i':s'(i') \geq s(i)} \lambda_{i'} R'_{i's(i)} = R_{is(i)} = 1$ ist. Jedoch ist $R'_{i's(i)} = 0$, falls $s(i) < s'(i')$ ist. Damit erhalten wir

$$1 = \sum_{i' : s'(i') = s(i)} \lambda_{i'} R'_{i's(i)}$$

und es folgt, daß zu jedem $1 \leq i \leq r$ ein $1 \leq i' \leq r$ mit $s'(i') = s(i)$ existiert. Da beide Abbildungen aber streng monoton von $\{1, \dots, r\}$ nach $\{1, \dots, n\}$ abbilden, müssen sie dann schon übereinstimmen (klar?!).
Schließlich beweisen wir nun die eigentliche Behauptung. Dazu sei $1 \leq i \leq r$ wieder fixiert. Setzen wir in (B) nun ein, daß $s = s'$ ist, so ergibt sich

$$R_{i\bullet} = \sum_{i' : s(i') \geq s(i)} \lambda_{i'} R'_{i'\bullet} = \sum_{i'=i}^{r} \lambda_{i'} R'_{i'\bullet}.$$

Nun betrachten wir ein $i' \geq i$. Dann ist

$$\delta_{i,i'} \overset{(A)}{=} R_{is(i')} = \sum_{i''=i}^{r} \lambda_{i''} R'_{i''s(i')} \overset{(A)}{=} \lambda_{i'}$$

und damit ist $R_{i\bullet} = R'_{i\bullet}$.

**2. Variante.** Es gelte $Z(R) = Z(R')$. Dann folgt sofort $r = \dim Z(R) = \dim Z(R') = r'$. Wir zeigen nun per **absteigender endlicher** Induktion nach $i$, dass $s(i) = s'(i)$ und $R_{i\bullet} = R'_{i\bullet}$ für alle $i$ gilt. Diese Variante des Induktionsbeweises ist manchmal nützlich.
Der Induktionsanfang ist nun $i = r$. Angenommen, $s(r) \neq s'(r)$, also etwa $s(r) < s'(r)$. Dann folgt mit Teil (i) angewendet auf $t = s(r)$ der Widerspruch

$$\langle R_{r\bullet} \rangle = Z(R) \cap U_{s(r)} = Z(R') \cap U_{s(r)} = \{0\}.$$

Also ist $s(r) = s'(r)$ und $\langle R_{r\bullet} \rangle = Z(R) \cap U_{s(r)} = Z(R') \cap U_{s(r)} = \langle R'_{r\bullet} \rangle$. Daraus folgt $R_{r\bullet} = \lambda R'_{r\bullet}$. In der Spalte mit Index $s(r)$ steht $1 = \lambda \cdot 1$, d.h. es ist $R_{r\bullet} = R'_{r\bullet}$.
Der Induktionsschritt geht von $i$ nach $i-1$. Für alle $j$ mit $r \geq j \geq i$ sei also $s(j) = s'(j)$ und $R_{j\bullet} = R'_{j\bullet}$ richtig. Wie eben führt die Annahme $s(i-1) < s'(i-1)$ zu

$$\langle R_{(i-1)\bullet}, R_{i\bullet}, \ldots R_{r\bullet} \rangle = Z(R) \cap U_{s(i-1)} = Z(R') \cap U_{s(i-1)} = \langle R'_{i\bullet}, \ldots R'_{r\bullet} \rangle,$$

also durch Dimensionsvergleich zum Widerspruch $r - i = r - i + 1$. Somit ist $s(i-1) = s'(i-1)$ und $\langle R_{(i-1)\bullet}, R_{i\bullet}, \ldots R_{r\bullet} \rangle = Z(R) \cap U_{s(i-1)} = Z(R') \cap U_{s(i-1)} = \langle R'_{(i-1)\bullet}, R'_{i\bullet}, \ldots R'_{r\bullet} \rangle$. Also ist

$$R'_{(i-1)\bullet} = \lambda_{i-1} R_{(i-1)\bullet} + \lambda_i R_{i\bullet} + \ldots \lambda_r R_{r\bullet}$$

mit geeigneten Skalaren $\lambda_j$. Vergleicht man nacheinander die Spalten mit den Indizes $s(r) = s'(r), s(r-1) = s'(r-1), \ldots, s(i-1) = s'(i-1)$, so folgt $0 = \lambda_r = \lambda_{r-1} = \ldots = \lambda_i$ und $1 = \lambda_{i-1} \cdot 1$, d.h. $R_{(i-1)\bullet} = R'_{(i-1)\bullet}$.