Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe am 21. Juni 2012

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1. Seien $r, s \geq 1$ natürliche Zahlen. Seien weiter $A_1, B_1 \in k^{r\times r}$, $A_2, B_2 \in k^{r\times s}$, $A_3, B_3 \in k^{s\times r}$ und $A_4, B_4 \in k^{s\times s}$. Betrachte die „Blockmatrizen“

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \in k^{(r+s)\times(r+s)}.$$

(i) Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}$$

(das heißt mit den Blöcken rechnet man genauso wie mit 2×2-Matrizen).

(ii) $A = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{smallmatrix}\right)$ ist genau dann invertierbar, wenn A_1 und A_4 invertierbar sind.

(iii) Gib in (ii) eine Formel für A^{-1} an, wenn A invertierbar ist.

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathrm{End}_k V$, sei $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n)$ eine geordnete Basis von V. Sei

$$A = M_\varphi(f) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

in Blöcke zerlegt wie in Aufgabe 1. Sei $U = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_r \rangle$ und $W = \langle \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n \rangle$. Zeige:

(i) $fU \subseteq U \iff A_3 = 0$.

(ii) $fW \subseteq W \iff A_2 = 0$.

Aufgabe 3. Betrachte die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2y + z, x + 2z).$$

Die Linearität von f muß nicht geprüft werden. Sei φ die geordnete Basis bestehend aus den Einheits-Vektoren $\varphi = (e_1, e_2, e_3)$ und sei $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ mit

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimme $M_\varphi(f)$.

(ii) Zeige, daß ψ auch eine geordnete Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(iii) Bestimme die Transformationsmatrix von φ nach ψ und die von ψ nach φ.

(iv) Bestimme $M_\psi(f)$

 (a) direkt mit der Definition von $M_\psi(f)$ und

 (b) mithilfe der Transformationsformel bei Koordinatenwechsel.

Aufgabe 4. Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ sei die Ebene E gegeben durch

$$E = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die jedem Bild sein Spiegelbild bezüglich E zuordnet.

(i) Gib ein Koordinatensystem $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ an mit $f(\varphi_1) = \varphi_1$, $f(\varphi_2) = \varphi_2$ und $f(\varphi_3) = -\varphi_3$. Bestimme $M_\varphi(f)$.

(ii) Berechne $M_{\varphi'}(f)$ für $\varphi' = (e_1, e_2, e_3)$.