Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe am 6. Juni 2012

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 7

Von den 10 Aufgaben auf diesem Blatt sollen 6 Aufgaben (Eurer Wahl) bearbeitet werden (es werden auch nur die ersten 6 Aufgaben Eurer Abgabe korrigiert). Jede dieser Aufgaben ist 4 Punkte wert, das gesamte Blatt trägt jedoch nur 16 Punkte zur Gesamtpunktzahl aller Blätter bei. Es können also bis zu 8 Zusatzpunkte erreicht werden!

Für die Bearbeitung der Aufgaben könnten die Hinweise auf der Homepage (http://wmaz.math.uni-wuppertal.de/franzen/lehre.html) hilfreich sein.

Aufgabe 1. Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Im Folgenden soll geprüft werden, ob Aussagen wahr oder falsch sind und eine *kurze* Begründung für die Antwort gegeben werden. Das kann bei einer falschen Aussage etwa durch ein Gegenbeispiel geschehen. Hinweis: Es können mehrere, oder auch keine wahren Aussagen darunter sein.

(i) Seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Definiere die Teilmenge $U_1 - U_2 := \{u_1 - u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$. Achtung: Das ist keine Standard-Schreibweise, sondern lediglich „zu Übungszwecken“ ersonnen worden. Prüfe folgende Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt:

- (a) $U_1 - U_1 = \{0\}$.
- (b) $(U_1 - U_2) + U_2 = U_1$.
- (c) $U_1 - U_2 = U_1 + U_2$.
- (d) $U_1 - U_2$ ist ein Unterraum von V.

(ii) Sei $L = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine n-elementige Teilmenge von V. Entscheide, ob L stets linear unabhängig ist, falls (x) gilt, wobei (x) eine der nachfolgenden Aussagen (a) bis (d) ist.

- (a) Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ ist, so gilt $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$.
- (b) $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$.
- (c) $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.
- (d) Für alle $1 \leq i \leq n$ ist $v_i \notin \langle v_j \mid j \neq i \rangle$.

(iii) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

  (a) Für jeden Unterraum U von V ist $V \setminus U$ ein Unterraum von V.
  (b) Es gibt einen Unterraum U von V, so daß $V \setminus U$ ein Unterraum von V ist.
  (c) Es gibt keinen Unterraum U von V, so daß $V \setminus U$ ein Unterraum von V ist.
  (d) Es gibt eine Teilmenge U von V, so daß $V \setminus U$ ein Unterraum von V ist.

(iv) Seien U_1 und U_2 Unterräume von V mit $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$. Entscheide, welche der folgenden Aussagen (a) bis (d) hinreichend dafür ist, daß $V = U_1 \oplus U_2$ ist.

  (a) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
  (b) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
  (c) $U_1 + U_2 = V$.
  (d) $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

Aufgabe 2. Seien V und W zwei endlich-dimensionale k-Vektorräume.

(i) Sei $A \in k^{m \times n}$ mit $m \leq n$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

  (a) $m \leq \operatorname{Rang} A \leq n$.
  (b) $n \leq \operatorname{Rang} A$.
  (c) $\operatorname{Rang} A \leq m$.
  (d) $\operatorname{Rang} A \leq n$.

(ii) Sei $A \in k^{n \times n}$. Prüfe folgende Aussagen:

  (a) Ist $\operatorname{Rang} A = n$, so ist A invertierbar.
  (b) Sind die Zeilen von A paarweise verschieden und linear unabhängig, so ist A invertierbar.
  (c) Ist A invertierbar, so ist $\operatorname{Rang} A = n$.
  (d) Ist A invertierbar, so ist $\operatorname{Rang} A \leq n$.

(iii) Sei $f : V \to W$ eine k-lineare Abbildung. Entscheide, welche der nachstehenden Aussagen die Injektivität von f impliziert.

  (a) f ist surjektiv.
  (b) $\dim \operatorname{Kern} f = 0$.
  (c) $\operatorname{Rang} f = 0$.
  (d) f ist ein Isomorphismus.

(iv) Sei $f : V \to W$ eine k-lineare Abbildung. Entscheide, welche der Aussagen (x) mit $\mathrm{x} \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ hinreichend dafür ist, daß f ein Isomorphismus ist.

  (a) V und W sind isomorph.
  (b) $\dim V = \dim W$ und f ist injektiv.
  (c) $\dim V \leq \dim W$ und f ist surjektiv.
  (d) $\dim \operatorname{Kern} f + \operatorname{Rang} f = \dim V$.

Aufgabe 3. Seien A, B, C und D Mengen und $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ Abbildungen. Zeige:

(i) Sind $g \circ f$ und $h \circ g$ bijektiv, so sind f, g und h bijektiv.

(ii) Genau dann ist f injektiv, wenn für alle Mengen X und alle Abbildungen $g_1, g_2 : X \to A$ aus $f \circ g_1 = f \circ g_2$ schon $g_1 = g_2$ folgt.

Aufgabe 4. Sei $B \in k^{n\times n}$. Der **Kommutant** $K(B)$ von B sei definiert als die Menge aller mit B vertauschenden $(n \times n)$-Matrizen, d.h.

$$K(B) := \{A \in k^{n\times n} \mid AB = BA\}.$$

Beweise:

(i) $K(B)$ ist ein Unterring von $k^{n\times n}$, der auch unter Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, also auch ein k-Unterraum von $k^{n\times n}$.

(ii) Seien $\mathbf{i} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\mathbf{1} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeige, daß $K(\mathbf{i})$ der reelle Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{1}\}$ ist.

(iii) Zeige, daß der Ring $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nicht-kommutativ ist.

(iv) Sei $A = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \in K(\mathbf{i}) - \{0\}$. Zeige, daß A invertierbar ist und, daß $A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a \cdot \mathbf{1} - b \cdot \mathbf{i})$ gilt. Folgere daraus, daß $K(\mathbf{i})$ ein Körper ist.

Aufgabe 5. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1-a^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimme den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a und gegebenenfalls die inverse Matrix durch gleichzeitige elementare Zeilenoperationen auf $A(a)$ und $E_4 = 4 \times 4$-Einheitsmatrix.

(ii) Erhält man die Inverse auch durch gleichzeitige elementare Spaltenumformungen auf $A(a)$ und E_4? Kann man sogar nach Belieben Zeilen- und Spaltenumformungen verwenden?

Aufgabe 6. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix vom Rang r. Dann gilt:

(i) Stets ist $r \leq \min\{m, n\}$.

(ii) Genau dann ist $m > r$, falls ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit $L(A, b) = \emptyset$ existiert.

(iii) Genau dann ist $n > r$, wenn es ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\sharp L(A, b) \geq 2$ gibt.

(iv) Genau dann ist $n = m = r$, wenn für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ das Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 7. Bestimme die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \\ 12 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 8. Seien $A \in k^{m \times n}$ und $B, C \in k^{n \times m}$ mit $BA = E_n$ und $AC = E_m$. Zeige, daß dann $n = m$ gelten muß und, daß A invertierbar ist mit $B = C = A^{-1}$.

Aufgabe 9. Sei V ein k-Vektorraum, sei $f \in \operatorname{End}_k V$ und sei $\lambda \in k$. Definiere

$$E_\lambda := E_\lambda(f) := \operatorname{Kern}(f - \lambda \operatorname{id}_V) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

(i) Zeige, daß für alle $\lambda, \mu \in k$ gilt $(f - \lambda \operatorname{id}) \circ (f - \mu \operatorname{id}) = (f - \mu \operatorname{id}) \circ (f - \lambda \operatorname{id})$.

(ii) Nun seien $\lambda, \mu \in k$ mit $\lambda \neq \mu$ und wir nehmen an, es gelte $(f - \lambda \operatorname{id}) \circ (f - \mu \operatorname{id}) = 0$. Zeige:

(a) $V = E_\lambda + E_\mu$.
Tip: Zeige, daß sich ein $v \in V$ schreiben läßt als $v = \frac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu \operatorname{id})v + \frac{1}{\mu - \lambda}(f - \lambda \operatorname{id})v$ und zeige, daß der erste Summand dieser Summe in E_λ liegt und der zweite in E_μ.

(b) $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.

Aufgabe 10. Sei V ein k-Vektorraum und sei $f \in \operatorname{End}_k V$.

(i) Es gelte $f^2 = f$. Zeige, daß es (bis auf Vertauschung von λ und μ) genau ein Paar $(\lambda, \mu) \in k \times k$ mit $\lambda \neq \mu$ gibt, so daß $(f - \lambda \operatorname{id}) \circ (f - \mu \operatorname{id}) = 0$ ist. Welches Paar ist das, und was sind die in Aufgabe 9 definierten Räume E_λ und E_μ?

(ii) Betrachte den Spezialfall $V = \{g \mid g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildung}\}$ und den Endomorphismus $f : V \to V$, der definiert ist durch

$$f(g) := g \circ (-\operatorname{id}_{\mathbb{R}})$$

für alle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das heißt $f(g)$ ist die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(f(g))(x) = g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, daß dann $f^2 = \operatorname{id}_V$ ist. Zeige ferner, daß es (bis auf Vertauschung von λ und μ) genau ein Paar (λ, μ) von verschiedenen rellen Zahlen λ und μ so gibt, daß $(f - \lambda \operatorname{id}_V) \circ (f - \mu \operatorname{id}_V) = 0$ ist. Wie sieht dieses Paar aus, und was sind die zugehörigen Räume E_λ und E_μ?