Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe am 24. Mai 2012

# Übungen zur Linearen Algebra I

## Blatt 6

**Aufgabe 1.** Welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear?

(i) $f(x,y) = (x + y^2, 2x, x - y)$

(ii) $f(x,y) = (y, 0, x)$

(iii) $f(x,y) = (x + 2, y + 2, x)$

(iv) $f(x,y) = (x, 0, 1 - \sin^2 x - \cos^2 x)$.

**Aufgabe 2.** Seien $U, V$ und $W$ $k$-Vektorräume von beliebiger Dimension.

(i) Auf der Menge $W^V := \{f \mid f : V \to W \text{ ist eine Abbildung }\}$ definieren wir Verknüpfungen „Addition" und „skalare Multiplikation" wie folgt: Für $f, g \in W^V$ und $\lambda \in k$ seien $f + g : V \to W$ und $\lambda f : V \to W$ erklärt durch

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(v) := \lambda f(v)$$

für alle $v \in V$. Zeige, daß $W^V$ mit diesen Operationen zu einem $k$-Vektorraum wird.

(ii) $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ ist ein Unterraum von $W^V$.

(iii) Sind $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen, so ist auch $g \circ f : U \to W$ eine lineare Abbildung.

(iv) Seien $f_i : U \to V$ und $g_i : V \to W$ lineare Abbildungen und seien $\lambda_i, \mu_i \in k$ für $i = 1, 2$. Zeige, daß

$$(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \lambda_i \mu_j (g_j \circ f_i)$$

gilt.

**Aufgabe 3.** Seien $V$ und $W$ endlich-dimensionale $k$-Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige jeweils die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b).

(i) (a) $f$ ist injektiv.
 (b) Für jede linear unabhängige Teilmenge $L$ von $V$ ist $f(L)$ linear unabhängig in $W$.

(ii) (a) $f$ ist surjektiv.
 (b) Für jedes Erzeugendensystem $E$ von $V$ ist $f(E)$ ein Erzeugendensystem von $W$.

Beachte, daß durch Kombination von (i) und (ii) sofort folgt, daß $f$ genau dann bijektiv ist, wenn für jede Basis $B$ von $V$ auch $f(B)$ eine Basis von $W$ ist.

**Aufgabe 4.** Seien $V$ und $W$ endlich-dimensionale $k$-Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

(i) Genau dann ist $f$ injektiv, wenn es eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \circ f = id_V$ gibt.

(ii) Genau dann ist $f$ surjektiv, wenn es eine lineare Abbildung $h : W \to V$ mit $f \circ h = id_W$ gibt.