Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe am 16. Mai 2012

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Bestimme den Zeilenrang der folgenden reellen Matrizen durch Berechnung der reduzierten Zeilenstufenform:

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ -6 & -4 & -10 & -14 \end{bmatrix}$,

(ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$,

(iii) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 & -2 & 1 \\ -2 & b & 5 & b & -2 \end{bmatrix}$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume eines k-Vektorraums V.

(i) Genau dann ist $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ ist oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

(ii) Stets gilt $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$.

(iii) Gib ein Beispiel mit $U_1 \cap (U_2 + U_3) \nsubseteq (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$.

(iv) Falls $U_2 \subseteq U_1$, so gilt: $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_2 + (U_1 \cap U_3)$.

Aufgabe 3. Seien $U_1, U_2, \ldots, U_r$ Unterräume eines endlich-dimensionalen k-Vektorraums V. Dann sind gleichwertig:

(i) $\sum_{i=1}^r U_i = \bigoplus_{i=1}^r U_i$.

(ii) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ gilt $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = 0$.

(iii) $\dim \sum_{i=1}^r U_i = \sum_{i=1}^r \dim U_i$.

Aufgabe 4. Sei $R \in k^{m \times n}$ eine reduzierte Zeilenstufenmatrix. Für $1 \leq t \leq n$ sei $U_t := \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid x_j = 0 \text{ für alle } j < t\}$.

(i) Zeige, daß $U_t \cap Z(R) = \langle R_{i\bullet} \mid s(i) \geq t \rangle$ ist.

(ii) Zeige, daß für reduzierte Zeilenstufenmatrizen $R, R' \in k^{m \times n}$ aus $Z(R) = Z(R')$ bereits $R = R'$ folgt.