Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe am 10. Mai 2012

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 4

Aufgabe 1. Im Folgenden sei immer $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume?

(i) $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0\}$ für ein fest gewähltes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

(ii) $V := \{x \in \mathbb{R}^n \mid$ es gibt ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $x_i = 0\}$

(iii) $W := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$

(iv) $X := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i = x_n\right\}$

(v) $Y := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2^2\right\}$

(vi) $Z := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\right\}$

Aufgabe 2. In $\mathbb{R}^4$ sei U_1 das Erzeugnis der Vektoren $(1, 1, 0, 0)$ und $(1, 2, 3, 0)$. Ferner sei $U_2 = \{(x_1, \dots, x_4) \mid x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0\}$.

(i) Zeige, daß U_2 ein Unterraum ist. Gib ein Erzeugendensystem an.

(ii) Berechne $U_1 \cap U_2$.

(iii) Gib ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ an.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, $\varphi : G \to G$ gegeben durch $\varphi(x) = x^{-1}$.

(i) Genau dann ist G kommutativ, wenn φ ein Homomorphismus ist.

(ii) Ist $x^2 = 1$ für alle $x \in G$, so ist G kommutativ.

Aufgabe 4. Im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ sind $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ linear unabhängig.