Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe am 3. Mai 2012

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 3

Aufgabe 1. Für $a,\ b \in \mathbb{R}$ sei $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_{a,b}(x) = ax + b$. Zeige, daß $G = \{f_{a,b} \mid a \neq 0,\ b \text{ beliebig}\}$ eine Untergruppe von $S(\mathbb{R})$ ist. Ist G kommutativ?

Aufgabe 2. Sei $\sqrt{2}$ die positive reelle Zahl x mit $x^2 = 2$. Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Zeige:

(i) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(ii) $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ gilt genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$.

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei M eine beliebige Menge, $R = P(M)$ die Potenzmenge.

(i) Definiere Addition und Multiplikation auf R durch:

$$X + Y := X \cup Y \text{ und } X \cdot Y = X \cap Y.$$

Zeige, daß nur für $M = \emptyset$ eine Null und eine Eins existieren, so daß R ein Ring wird.

(ii) Definiere nun Addition und Multiplikation auf R durch:

$$X + Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \text{ und } X \cdot Y = X \cap Y$$

Zeige, daß es jetzt stets eine Null und eine Eins gibt, so daß R ein kommutativer Ring ist. Zeige, daß R genau dann ein Körper ist, wenn $\sharp M = 1$ ist.

Tip: Es genügt die Ringaxiome jeweils anhand von Venn-Diagrammen (Ostereier) sinnvoll zu veranschaulichen.

Aufgabe 4. Sei M eine beliebige Menge und $2^M := \{f : M \to \{0,1\}\}$ die Menge der Abbildungen von M in die 2-elementige Menge $\{0,1\}$.

(i) Zeige, daß die Abbildung $\Phi : 2^M \to P(M)$ mit $\Phi(f) = f^{-1}(0)$ bijektiv ist.

(ii) Sei M endlich mit n Elementen. Zeige, daß $P(M)$ genau 2^n Elemente hat.

(iii) Wieder sei M endlich mit n Elementen. Sei

$$N = \{(B, C) | B, C \subseteq M, B \cap C = \emptyset\}.$$

Dann hat N genau 3^n Elemente.