Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe am 26. April 2012

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 2

Aufgabe 1. Für die rekursiv definierten Folgen $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ beweise man jeweils die angegebene explizite Darstellung.

(i) Definiere $a_0 = 2$ und $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$ für $n \geq 1$. Dann ist $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 2$. Dann ist $a_n = \frac{2}{3}(1 - (-1)^n \frac{1}{2^n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2. Beweise mittels vollständiger Induktion die folgenden Identitäten:

(i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für jedes $q \in \mathbb{R} - \{1\}$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

(iv) $\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n+k}{k} = 4^n$

Aufgabe 3. Die Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$ und $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ für $n \geq 1$. Zeige:

(i) Es ist $a_n = 2^{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

(ii) Für $n \geq 1$ ist a_n die Anzahl der endlichen Folgen (variabler Länge) strikt positiver natürlicher Zahlen mit Summe n. (Etwa für $n = 3$ ist $a_3 = 4$ und die gesuchten Folgen sind (3), $(2, 1)$, $(1, 2)$ und $(1, 1, 1)$.)

Aufgabe 4. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $f_* : P(A) \to P(B)$, $f^* : P(B) \to P(A)$ seien die Abbildungen gegeben durch $f_*(A') = f(A')$ für $A' \subseteq A$ bzw. $f^*(B') = f^{-1}(B')$ für $B' \subseteq B$. Zeige:

(i) Für jede Menge M ist $(\mathrm{id}_M)_* = \mathrm{id}_{P(M)} = (\mathrm{id}_M)^*$.

(ii) Für je zwei Abbildungen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ und $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(iii) Äquivalent sind:

- (a) f ist injektiv,
- (b) f_* ist injektiv,
- (c) f^* ist surjektiv.

(iv) Äquivalent sind:

- (a) f ist surjektiv,
- (b) f_* ist surjektiv,
- (c) f^* ist injektiv.

(v) Ist f bijektiv, so sind f_* und f^* zueinander inverse Abbildungen.