Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe am 5. Juli 2012

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimme die reellen Eigenwerte von A und Basen für die zugehörigen Eigenräume. Ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 2. (i) In $\mathbb{C}$ hat das Polynom $X^n - 1$ für jedes $n \geq 1$ genau n Nullstellen, nämlich die Potenzen ζ^j der sogenannten primitiven n-ten Einheitswurzel $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Skizziere dies in der Gaußschen Zahlenebene.

(ii) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Ist A über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar oder diagonalisierbar? Was gilt über $\mathbb{C}$? Was ist die geometrische Bedeutung von A? (Tip: Skizziere Ae_1, Ae_2, Ae_3 für die kanonische Basis (e_1, e_2, e_3).)

Aufgabe 3. Die Fibonacci-Zahlen f_n $(n \in \mathbb{N})$, sind induktiv definiert durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 2$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und sei $\varphi^{(n)} := \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ für alle $n \geq 0$.

(i) Für $n \geq 0$ gilt $\varphi^{(n)} = A^n e_2$.

(ii) Bestimme ein $S \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $S^{-1}AS = D$.

(iii) Leite aus $\varphi^{(n)} = \left(SDS^{-1}\right)^n e_2 = SD^nS^{-1}e_2$ eine Formel für f_n her.

Aufgabe 4. Bestimme für die drei Matrizen

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$ jeweils charakteristisches Polynom, Minimalpolynom, Eigenwerte und Eigenräume. Gib für jede diagonalisierbare Matrix $A \in \{A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}\}$ auch noch jeweils ein $S \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^{-1}AS = D$ an.
Hinweis: In http://wmaz.math.uni-wuppertal.de/franzen/files/Tutorium/bsp6.pdf findet Ihr einen Algorithmus zur Berechnung des Minimalpolynoms für 3×3-Matrizen.

Aufgabe 5. Sei $V := \mathbb{R}[X]^{\leq 3}$ der vierdimensionale reelle Vektorraum der Polynome $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $\operatorname{grad} p \leq 3$. Seien $D, T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V$ definiert durch

$$Dp := p' \quad \text{und} \quad (Tp)(X) := p(X+1)$$

für alle $p \in V$. Bestimme charakteristisches Polynom, Minimalpolynom, Eigenwerte und Eigenräume von D und T.