Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe am 19. April 2012

Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 1

Aufgabe 1. Es sei X eine Menge, $A, B, C \subseteq X$ seien Teilmengen von X. Beweise die folgenden Aussagen:

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ und $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(ii) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

(iii) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Finde und beweise eine entsprechende Aussage für $A \setminus (B \setminus C)$.

Aufgabe 2. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen X und Y. Außerdem seien $M \subseteq X$ sowie $N \subseteq Y$ Teilmengen. Zeige:

(i) Stets gilt $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$. Gleichheit gilt genau dann für alle $M \subseteq X$, wenn f injektiv ist.

(ii) Untersuche analog den Zusammenhang zwischen $f(f^{-1}(N))$ und N.

Aufgabe 3. Prüfe, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv sind:

(i) $f(x, y) = (x + y^2, y + 2)$

(ii) $f(x, y) = (xy, x + y)$

(iii) $f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2)$

(iv) $f(x, y) = \left(x/\sqrt{1 + x^2 + y^2}, y/\sqrt{1 + x^2 + y^2}\right)$

Ist f bijektiv, so gib die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 4. Diese Aufgabe, die auf Cantor (1845–1918) zurückgeht, ist schwieriger und interessanter als die vorhergehenden. Sei M eine Menge, $f : M \to P(M)$ eine Abbildung. Setze

$$X := \{m \mid m \in M, m \notin f(m)\}.$$

Zeige, daß X nicht im Bild von f liegt.
Tip: Sonst ist $X = f(m_0)$ für ein festes m_0. Folgere den Widerspruch: $m_0 \in X$ genau dann, wenn $m_0 \notin X$.
Insbesondere ist dadurch gezeigt, daß es keine Bijektion zwischen einer Menge und ihrer Potenzmenge geben kann.