Prof. K. Bongartz/
D. Skorodumov
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Tutorium zur Linearen Algebra I WS 08/09

Blatt 5

Die folgenden Aufgaben werden in der Woche vom 24.11 bis 28.11 im Tutorium besprochen.

Aufgabe 1: Seien V, W, W' $k-$Vektorräume. Dann gilt:

a) $\operatorname{Hom}(V, W)$ ist ein $k-$Vektorraum.
b) Die Komposition linearer Abbildungen ist eine lineare Abbildung.
c) $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h,\ (g+h) \circ f' = g \circ f' + h \circ f' \ \ \forall\, g, h \in \operatorname{Hom}(V, W),\ f \in \operatorname{Hom}(W, W'),\ f' \in \operatorname{Hom}(W', W)$.
d) $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)\ \forall g \in \operatorname{Hom}(V, W),\ f \in \operatorname{Hom}(W, W'),\ \lambda \in k.$
e) Ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ bijektiv, so ist f^{-1} linear.

Aufgabe 2: Für $V = k^{\mathbb{N}}$ seien die Abbildungen $I, D \in \operatorname{End}(V)$ definiert durch:

$$(I(f))(n) = f(n-1)\ \forall\ n \geq 1\ \mathit{und}\ (I(f))(0) = 0\ ,$$

$$(D(f))(n) = f(n+1)\ \forall\ n \geq 0\ .$$

Dann gilt:

a) I, D sind linear.
b) $D \circ I = id_V$ aber I ist nicht surjektiv und D ist nicht injektiv.

Aufgabe 3: Sei V ein Vektorraum, so ist $\operatorname{End}(V)$ immer ein Ring; für $\dim V \geq 2$ ist $\operatorname{End}(V)$ nicht kommutativ. (Tip: Konstruiere Abbildungen auf Basen)