Prof. K. Bongartz/
D. Skorodumov
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Linearen Algebra I WS 08/09

Beispiel 1: In diesem Beispiel wird die Matrix M auf ihre reduzierte Zeilenstufenform gebracht.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Zuerst bringen wir die Matrix auf Zeilenstufenform. Dazu addieren wir geeignete Vielfache der ersten Zeile zu den anderen Zeilen, um in der zweiten Spalte unter der 2 die Nullen zu erhalten.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Nun vertauschen wir die zweite mit der dritten Zeile.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Jetzt addieren wir geeignete Vielfache der zweiten Zeile zu den Zeilen 3 und 4,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

verfahren analog mit der dritten Zeile und erhalten eine Zeilenstufenform der Matrix M.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jetzt normieren wir die dritte Zeile, indem wir diese mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren, und addieren geeignete Vielfache der dritten Zeile zu den Zeilen 1 und 2, um die Nullen über der 1 zu erhalten.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analog verfahren wir mit der zweiten Zeile.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schließlich multiplizieren wir die erste Zeile mit $\frac{1}{2}$, um die reduzierte Zeilenstufenform R der Matrix M zu erhalten.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es ist also $r = 3$ und $s : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ gegeben durch $s(1) = 2,\ s(2) = 4,\ s(3) = 5$.