Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

24. September 2012
(SoSe 2012)

Nachklausur zur Linearen Algebra I

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Studiengang: ____________________

Geburtsdatum: ____________________

Geburtsort: ____________________

Bemerkungen.

- Die Bearbeitungszeit beträgt **120** Minuten.
- Mit jeder Aufgabe können **4** Punkte erreicht werden.
- Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein eigenes Blatt.
- „Schmierzettel“ und Nebenrechnungen müssen nicht mit abgegeben werden.
- Bitte halten Sie Personalausweis und Immatrikulationsnachweis bereit.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen, insbesondere keine Bücher, Vorlesungs- oder Übungsmitschriften oder elektronische Hilfsmittel. Mitgebrachte Handys müssen **vor** Beginn der Klausur ausgeschaltet werden.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punkte								

In der gesamten Klausur sei k ein Körper.

Aufgabe 1. Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum.

(i) Wann heißt eine Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V ein Erzeugendensystem?

(ii) Wie ist der Begriff „Eigenvektor" eines Endomorphismus $f : V \to V$ definiert?

(iii) Seien U und W zwei Unterräume von V. Welche Beziehung besteht zwischen $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U + W)$ und $\dim(U \cap W)$.

(iv) Wie lautet der Satz von Cayley-Hamilton?

Aufgabe 2. Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$A(a) := \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 1 & 1 & -1 \\ a & a & a^2 - 2a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a. Berechnen Sie ferner für alle $a \in \mathbb{R}$, für die $\operatorname{Rang} A(a) = 3$ ist, die inverse Matrix $A(a)^{-1}$.

Aufgabe 3. Sei $V = k^{n\times n}$ und sei $B \in k^{n\times n}$ eine fest gewählte Matrix. Betrachten Sie die Abbildung $f : V \to V$ definiert durch

$$f(A) := BA$$

für alle $A \in k^{n\times n}$.

(i) Zeigen Sie, daß f eine k-lineare Abbildung ist.

(ii) Bestimmen Sie für $n = 2$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Darstellungsmatrix $M_\varphi(f) \in k^{4\times 4}$, wobei φ die geordnete Basis

$$\varphi = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

von $k^{2\times 2}$ sei.

(iii) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f im unter (ii) betrachteten Spezialfall.

Aufgabe 4.

(i) Entscheiden Sie, welche der drei folgenden Matrizen $A_\nu \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar sind und welche nicht. Begründen Sie Ihre Antwort. Dabei seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und $\varphi \in \mathbb{R}$ sei kein ganzzahliges Vielfaches von π, also $\varphi \notin \mathbb{Z}\pi = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) Zeigen Sie, daß die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$
über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{Q})$, sowie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $S^{-1}AS = D$.

Aufgabe 5. Sind die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie wahre Aussagen mithilfe von Sätzen aus der Vorlesung zeigen und falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel widerlegen.

(i) Eine Begleitmatrix $B(P) \in k^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar über k, wenn P genau n verschiedene Nullstellen in k hat.

(ii) Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{Gl}_n(k)$ ist A^{-1} eine Linearkombination von $A^0, A^1, \ldots, A^{n-1}$.

(iii) Haben zwei Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ das gleiche charakteristische Polynom, so ist A genau dann trigonalisierbar über k, wenn B trigonalisierbar über k ist.

(iv) Seien $A \in k^{n\times n}$ und $\lambda \in k$. Genau dann ist die Matrix A diagonalisierbar über k, wenn $A + \lambda E_n$ diagonalisierbar über k ist.

Aufgabe 6. Seien U, V und W drei endlich-dimensionale k-Vektorräume und $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ zwei k-lineare Abbildungen. Es sei $h : \mathrm{Bild}(f) \to W$ durch
$$h(v) := g(v)$$
für alle $v \in \mathrm{Bild}(f)$ definiert. Zeigen Sie

(i) $\mathrm{Bild}(h) = \mathrm{Bild}(g \circ f)$,

(ii) $\ker(h) = \mathrm{Bild}(f) \cap \ker(g)$ und

(iii) $\mathrm{Rang}(g \circ f) = \mathrm{Rang}(f) - \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \ker(g))$.