Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

28. September 2012
(SoSe 2012)

Nachklausur zur Linearen Algebra I

Lösungen

Aufgabe 1. Im Aufgabenteil (iii) ist die Beziehung $\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$ gemeint. Der Rest kann in der Vorlesung nachgelesen werden (wie natürlich auch (iii)).

Aufgabe 2. Durch Entwicklung, etwa nach der ersten Zeile, sieht man, daß $\det A(a) = a^2(a-1)$ ist. Für $a \notin \{0,1\}$ ist also $\operatorname{Rang} A(a) = 3$. Ferner sind

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilenumf.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\operatorname{Rang} A(a) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } a = 0, \\ 2 & \text{, falls } a = 1 \text{ und} \\ 3 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Für $a \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ ist $A(a)$ invertierbar und man rechnet nach, daß

$$A(a)^{-1} = \frac{1}{a^2 - a} \begin{pmatrix} a-1 & a^2-a & 0 \\ 1-a & -a & 1 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 3. (i) Die Linearität von f folgt sofort aus den (in der Vorlesung bewiesenen) Identitäten $B \cdot (A + A') = BA + BA'$ und $B \cdot \lambda A = \lambda BA$ für $A, A' \in k^{n \times n}$ und $\lambda \in k$.

(ii) Die j-te Spalte von $M := M_\varphi(f)$ ergibt sich durch die Koeffizienten m_{ij} in der Linearkombinationsdarstellung von $f\varphi_j = \sum_{i=1}^4 m_{ij}\varphi_i$. Konkret: Betrachte $\varphi_1 = E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt

$$f\varphi_1 = B \cdot E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} = \varphi_1.$$

Die erste Spalte der Darstellungsmatrix M lautet also $(1,0,0,0)^T$. Genauso sieht man $f\varphi_2 = BE_{12} = E_{12} = \varphi_2$, $f\varphi_3 = 0$ und $f\varphi_4 = 0$. Damit ist

$$M_\varphi(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) $\ker f = \ker M_\varphi(f) = \langle \varphi_3, \varphi_4 \rangle$.

Aufgabe 4. (i) A_1 ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, denn χ_{A_1} zerfällt über $\mathbb{R}$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren (und damit μ_{A_1} auch). A_2 ist nicht diagonalisierbar, denn $\mu_{A_2}(t) = t^2$. Zu A_3: Es gilt $\chi_{A_3}(t) = (t - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi$. Da φ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist, ist $\sin^2\varphi > 0$ und somit hat χ_{A_3} keine reellen Nullstellen. Insbesondere ist A_3 dann nicht diagonalisierbar.

(ii) Berechne das charakteristische Polynom

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-4 & 2 & 5 \\ 2 & t-4 & -5 \\ -2 & 2 & t+3 \end{vmatrix}.$$

Wir addieren die zweite Zeile zur ersten und zur dritten und entwickeln danach nach der ersten Zeile. Dann erhalten wir

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & t-2 & 0 \\ 2 & t-4 & -5 \\ 0 & t-2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t-4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)^2,$$

Die Eigenwerte von A sind also 1 und 2.
Nun bestimmen wir Basen der Eigenräume von A. Durch Zeilenumformungen erhalten wir

$$E(A,1) = \mathrm{Kern}(A - E) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$E(A,1) = \mathrm{Kern}(A - 2E) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Somit ist A über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar und mit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt $S^{-1}AS = D$. Achtung: Wir müssen S hier nicht invertieren! Da die Spalten von S Eigenvektoren von A sind, folgt *automatisch* $AS = SD$.

Aufgabe 5. (i) Richtig, denn $\mu_{B(P)} = P$ und eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar über k, wenn ihr Minimalpolynom über k in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

(ii) Laut Cayley-Hamilton ist $0 = \chi_A(A) = c_0E + c_1A + \ldots + c_{n-1}A^{n-1} + A^n$ für gewisse $c_i \in k$ und es gilt $c_0 = \det A \neq 0$. Somit können wir E als eine Linearkombination von $A, \ldots, A^n$ darstellen. Multiplizieren wir diese Identität mit A^{-1} durch, so erhalten wir eine Linearkombinations-Darstellung von A^{-1} in Termen von $E, A, \ldots, A^{n-1}$. Diese Aussage ist also wahr.

(iii) Wahr, denn eine Matrix ist genau dann trigonalisierbar über k, wenn ihr charakteristisches Polynom über k in Linearfaktoren zerfällt.

(iv) Ist $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, so ist $S^{-1}(A + \lambda E)S = \mathrm{diag}(\lambda_1 + \lambda, \ldots, \lambda_n + \lambda)$. Die umgekehrte Richtung ist damit im Wesentlichen auch schon bewiesen.

Aufgabe 6. (i) Sei $w \in \mathrm{Bild}(h)$, es gibt also ein $v \in \mathrm{Bild}(f)$ mit $w = h(v) = g(v)$. Da v aber im Bild von f liegt, existiert ein $u \in U$ mit $v = f(u)$. Somit ist $w = g(f(u)) \in \mathrm{Bild}(g \circ f)$.
Ist umgekehrt $w \in \mathrm{Bild}(g \circ f)$, so gibt es ein $u \in U$, so daß $w = g(f(u))$ ist. Da $v := f(u) \in \mathrm{Bild}(f)$ liegt, ist $h(v)$ definiert und es gilt $w = h(v) \in \mathrm{Bild}(h)$.

(ii) Es sei $v \in \ker(h)$. Da h auf $\mathrm{Bild}(f)$ definiert ist, gilt $v \in \mathrm{Bild}(f)$. Andererseits ist $0 = h(v) = g(v)$, also ist $v \in \ker(g)$. Die umgekehrte Inklusion ist ebenso einfach.

(iii) Es gilt

$$\mathrm{Rang}(g \circ f) \overset{\text{(i)}}{=} \mathrm{Rang}(h) = \dim \mathrm{Bild}(f) - \dim \ker(h) \overset{\text{(ii)}}{=} \mathrm{Rang}(f) - \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \ker(g)).$$