Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

21. September 2012
(SoSe 2012)

Klausur zur Linearen Algebra I

Lösungen

Aufgabe 1. Exemplarisch definieren wir hier, wann eine n-elementige Teilmenge eines k-Vektorraums V linear unabhängig ist:

Eine n-elementige Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V heißt *linear unabhängig*, falls für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, für die $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ ist, schon folgt, daß $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ ist.

Aufgabe 2. Durch Entwicklung, etwa nach der zweiten Spalte, sieht man, daß $\det A(a) = a^2(a-1)$ ist. Für $a \notin \{0,1\}$ ist also $\operatorname{Rang} A(a) = 3$. Ferner sind

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilenumf.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\operatorname{Rang} A(a) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } a = 0, \\ 2 & \text{, falls } a = 1 \text{ und} \\ 3 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Für $a \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ ist $A(a)$ invertierbar und man rechnet nach, daß

$$A(a)^{-1} = \frac{1}{a^2 - a} \begin{pmatrix} -a & 1-a & 1 \\ a^2 - a & a-1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 3. (i) Geschenkt.

(ii) Die j-te Spalte von $M := M_\varphi(f)$ ergibt sich durch die Koeffizienten m_{ij} in der Linearkombinationsdarstellung von $f\varphi_j = \sum_{i=1}^4 m_{ij}\varphi_i$. Konkret: Betrachte $\varphi_1 = E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt

$$f\varphi_1 = E_{11} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} = \varphi_2.$$

Die erste Spalte der Darstellungsmatrix M lautet also $(0,1,0,0)^T$. Genauso sieht man $f\varphi_2 = E_{12}B = E_{12} = \varphi_2$, $f\varphi_3 = \varphi_4$ und $f\varphi_4 = \varphi_4$. Damit ist

$$M_\varphi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix}.$$

(iii) $\operatorname{Bild} f = \langle \varphi_2, \varphi_4 \rangle$.

Aufgabe 4. (i) A_1 ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, denn χ_{A_1} zerfällt über $\mathbb{R}$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren (und damit μ_{A_1} auch). A_2 ist nicht diagonalisierbar, denn $\mu_{A_2}(t) = t^2$. A_3 ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, denn sie ist die Begleitmatrix zum Polynom $P(t) = t^2 + pt + q = (t - p/2)^2 - (p^2/4 - q)$. Da nach Voraussetzung $p^2/4 - q > 0$ ist, hat P zwei verschiedene reelle Nullstellen.

(ii) Berechne das charakteristische Polynom

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 2 & 5 \\ 2 & t-3 & -5 \\ -2 & 2 & t+4 \end{vmatrix}.$$

Man kann hier natürlich direkt nach einer Zeile oder Spalte entwickeln, allerdings muß man dann rechnen bis der Arzt kommt. Schlauer ist es, zunächst die zweite Zeile zur ersten und zur dritten zu addieren und erst dann zu entwickeln. Dann erhalten wir

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & t-1 & 0 \\ 2 & t-3 & -5 \\ 0 & t-1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t-3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = t(t-1)^2,$$

wobei hier erst im letzten Schritt nach (z.B.) der ersten Zeile entwickelt wurde. Die Eigenwerte von A sind also 0 und 1.
Nun bestimmen wir Basen der Eigenräume von A. Durch Zeilenumformungen erhalten wir

$$E(A,0) = \operatorname{Kern} A = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$E(A,1) = \operatorname{Kern}(A - E) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Somit ist A über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar und mit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt $S^{-1}AS = D$. Achtung: Wir müssen S hier nicht invertieren! Da die Spalten von S Eigenvektoren von A sind, folgt *automatisch* $AS = SD$.

Aufgabe 5. (i) Falsch. Zum Beispiel ist $B(t^2)$ nicht diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, denn $\mu_{B(t^2)}(t) = t^2$ zerfällt nicht in paarweise verschiedene Linearfaktoren.

(ii) Richtig. Nach Cayley-Hamilton ist $\chi_A(A) = 0$ und χ_A ist ein (normiertes) Polynom vom Grad n über k, wobei $A \in k^{n\times n}$ sei.

(iii) Wahr, denn genau dann ist A diagonalisierbar über k, wenn μ_A über k in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

(iv) Auch wahr: Es gilt $A + \lambda E$ ist genau dann invertierbar, wenn $\chi_A(-\lambda) = 0$ ist. Ein Polynom über k hat aber nur endlich viele Nullstellen in k.

Aufgabe 6. (i) Sei v ein Eigenvektor von fg zum Eigenwert λ mit $gv \neq 0$. Es gilt

$$gf(gv) = g(fgv) = g(\lambda v) = \lambda gv$$

und da $gv \neq 0$ ist, ist gv ein Eigenvektor von gf zum Eigenwert λ.

(ii) Nach (i) ist h wohldefiniert (ist $gv = 0$, so ist sowieso $hv = gv = 0 \in E(fg, \lambda)$). Genauso ist auch $h' : E(gf, \lambda) \to E(fg, \lambda)$ definiert durch $h'w := fw$ für $w \in E(gf, \lambda)$ wohldefiniert. Für $v \in E(fg, \lambda)$ gilt

$$h'hv = fgv = \lambda v$$

und ebenso gilt für jedes $w \in E(gf, \lambda)$ auch $hh'w = \lambda w$. Da $\lambda \neq 0$ ist, ist h ein Isomorphismus mit $h^{-1} = \frac{1}{\lambda}h'$.

(iii) Nach (ii) genügt es zu zeigen, daß gf genau dann injektiv ist, wenn fg injektiv ist. Da V endlich-dimensional ist, folgt aus der Injektivität von gf schon, daß gf ein Iso ist. Damit ist g surjektiv und f injektiv. Also sind g und f beide Isomorphismen (wieder, da V endlich-dimensional ist) und damit insbesondere fg injektiv. Die andere Richtung folgt mit vertauschten Rollen von f und g.

(iv) Es ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, aber $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.