Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

20. Juli 2012
(SoSe 2012)

Klausur zur Linearen Algebra I

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Geburtsdatum: ______________________________

Geburtsort: ______________________________

Bemerkungen.

- Die Bearbeitungszeit beträgt **120** Minuten.
- Mit jeder Aufgabe können **4** Punkte erreicht werden.
- Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein eigenes Blatt.
- „Schmierzettel“ und Nebenrechnungen müssen nicht mit abgegeben werden.
- Bitte halten Sie Personalausweis und Immatrikulationsnachweis bereit.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen, insbesondere keine Bücher, Vorlesungs- oder Übungsmitschriften oder elektronische Hilfsmittel. Mitgebrachte Handys müssen **vor** Beginn der Klausur ausgeschaltet werden.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punkte								

In der gesamten Klausur sei k ein Körper.

Aufgabe 1. Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum.

(i) Wann heißt eine n-elementige Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V linear unabhängig?

(ii) Wie ist der Begriff „Eigenwert" eines Endomorphismus $f : V \to V$ definiert?

(iii) Was besagt der Rangsatz?

(iv) Wie lautet der Satz von Cayley-Hamilton?

Aufgabe 2. Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$A(a) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -a & 0 & a \\ a & a & a^2 - 2a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a. Berechnen Sie ferner für alle $a \in \mathbb{R}$, für die $\operatorname{Rang} A(a) = 3$ ist, die inverse Matrix $A(a)^{-1}$.

Aufgabe 3. Sei $V = k^{n\times n}$ und sei $B \in k^{n\times n}$ eine fest gewählte Matrix. Betrachten Sie die Abbildung $f : V \to V$ definiert durch

$$f(A) := AB$$

für $A \in k^{n\times n}$.

(i) Zeigen Sie, daß f eine k-lineare Abbildung ist.

(ii) Bestimmen Sie für $n = 2$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Darstellungsmatrix $M_\varphi(f) \in k^{4\times 4}$, wobei φ die geordnete Basis

$$\varphi = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

von $k^{2\times 2}$ sei.

(iii) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f im unter (ii) betrachteten Spezialfall.

Aufgabe 4.

(i) Entscheiden Sie, welche der drei folgenden Matrizen $A_\nu \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar sind und welche nicht. Begründen Sie Ihre Antwort. Dabei seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & -p \end{pmatrix}$$

und $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p^2 > 4q$.

(ii) Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{Q})$, sowie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $S^{-1}AS = D$.

Aufgabe 5. Sind die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie wahre Aussagen mithilfe von Sätzen aus der Vorlesung zeigen und falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel widerlegen.

(i) Jede Begleitmatrix $B(P) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.

(ii) Für jede Matrix $A \in k^{n\times n}$ ist A^n eine Linearkombination der Potenzen $A^0, A^1, \ldots, A^{n-1}$.

(iii) Haben zwei Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ gleiches Minimalpolynom, so ist A genau dann diagonalisierbar über k, wenn B diagonalisierbar über k ist.

(iv) Sei $A \in k^{n\times n}$. Dann ist die Matrix $A + \lambda E_n$ für alle $\lambda \in k$, außer endlich vielen, invertierbar.

Aufgabe 6. Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{End}_k(V)$.

(i) Ist v ein Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert λ und ist $g(v) \neq 0$, so ist $g(v)$ ein Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ.

(ii) Für $\lambda \neq 0$ ist die Abbildung $h : E(f \circ g, \lambda) \to E(g \circ f, \lambda)$, die für $v \in E(f \circ g, \lambda)$ durch

$$h(v) := g(v)$$

definiert ist, ein Isomorphismus.

(iii) Die Endomorphismen $f \circ g$ und $g \circ f$ haben die gleichen Eigenwerte.

(iv) Geben Sie ein Beispiel an, in dem die Eigenräume von $f \circ g$ und $g \circ f$ zum Eigenwert 0 nicht isomorph sind.