Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

24. Mai 2012

Lineare Algebra I

Beispiel 1

Aufgabe. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a)$ die Matrix

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 1 & -1 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a. Gib für alle a mit Rang $A(a) = 3$ die inverse Matrix an.

Lösung.

1	-1	1	1	0	0	
0	$a+1$	0	0	1	0	
1	-1	a^2	0	0	1	subtrahieren I von III
1	-1	1	1	0	0	
0	$a+1$	0	0	1	0	
0	0	a^2-1	-1	0	1	

Es ist also

$$\operatorname{Rang} A(a) = \begin{cases} 1, & a = -1; \\ 2, & a = 1; \\ 3, & a^2 - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Für das weitere Vorgehen setzen wir $a^2 - 1 \neq 0$ voraus.
Wir dividieren II durch $a+1$ und III durch $a^2 - 1$.

1	-1	1	1	0	0	
0	1	0	0	$\frac{1}{a+1}$	0	
0	0	1	$\frac{-1}{a^2-1}$	0	$\frac{1}{a^2-1}$	subtrahieren III von I
1	-1	0	$\frac{a^2}{a^2-1}$	0	$\frac{-1}{a^2-1}$	
0	1	0	0	$\frac{1}{a+1}$	0	
0	0	1	$\frac{-1}{a^2-1}$	0	$\frac{1}{a^2-1}$	addieren II zu I
1	0	0	$\frac{a^2}{a^2-1}$	$\frac{1}{a+1}$	$\frac{-1}{a^2-1}$	
0	1	0	0	$\frac{1}{a+1}$	0	
0	0	1	$\frac{-1}{a^2-1}$	0	$\frac{1}{a^2-1}$	fertig.

Es ist also

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - 1} \begin{pmatrix} a^2 & a-1 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(wie eine Probe $AA^{-1} = E_3$ bestätigt).