Prof. K. Bongartz/
D. Skorodumov
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Nachklausur zur Linearen Algebra I
28.03.09

Name	Vorname	Matrikelnummer	Übungsgruppe
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang	

In der ganzen Klausur sei $\mathbf{k}$ ein Körper. Alle Vektorräume sind endlichdimensionale $\mathbf{k}$-Vektorräume.

Aufgabe 1 (4P):
a) Wann heißt eine n-elementige Teilmenge $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von V linear unabhängig?

b) Wie ist das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbf{k}^{n\times n}$ definiert?

c) Formulieren Sie den Rangsatz.

d) Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton?

Aufgabe 2 (4P): Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a)$ die Matrix

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a^2-1 \\ 0 & a+1 & 1-a^2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a. Geben Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ mit Rang $A(a) = 3$ die inverse Matrix an.

Aufgabe 3 (4P): Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f(e_1) = 2e_2 - e_3,\; f(e_2) = e_1 + e_3,\; f(e_3) = e_1 - e_2.$$

a) Bestimmen Sie $M_\varphi(f)$ bzgl. der geordneten Basis $\varphi = (e_1, e_2, e_3)$.

b) Zeigen Sie, dass durch $\varphi'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ auch eine geordnete Basis $\varphi' = (\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3)$ gegeben wird und berechnen Sie $M_{\varphi'}(f)$.

Aufgabe 4 (6P): Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie χ_A, μ_A, die Eigenwerte und Basen der Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar oder wenigstens trigonalisierbar über $\mathbb{R}$? Berechnen Sie gegebenenfalls auch eine Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ Diagonal- oder Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 5 (4P): Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch. Begründen Sie Ihre Antwort ausreichend. (Durch Argumente und Zitate oder durch ein Gegenbeispiel.)

a) Haben zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die gleichen Eigenwerte (womöglich mit verschiedener algebraischer Vielfachheit), so stimmen ihre charakteristischen Polynome oder ihre Minimalpolynome überein.

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^2 = A$ ist stets diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

c) Ist für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das Produkt AB invertierbar, so sind auch A und B invertierbar.

d) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben, so dass $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist. Dann ist $m = n$ und auch A und B invertierbar.

Aufgabe 6 (4P): Sei $A \in \mathbf{k}^{n\times n}$. Betrachten Sie $f_A : \mathbf{k}^{n\times n} \to \mathbf{k}^{n\times n}$ mit $f_A(B) = AB$. Zeigen Sie:

a) f_A ist linear.

b) A ist invertierbar genau dann, wenn f_A invertierbar ist.

c) Allgemein gilt: $\mathrm{Rang}(f_A) = n\cdot\mathrm{Rang}(A)$.