Prof. K. Bongartz/
D. Skorodumov
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Klausur zur Linearen Algebra I
07.02.09

Name	Vorname	Matrikelnummer	Übungsgruppe
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang	

In der ganzen Klausur sei $\mathbf{k}$ ein Körper. Alle Vektorräume sind endlichdimensionale $\mathbf{k}$-Vektorräume.

Aufgabe 1 (4P): a) Definieren Sie Kern und Bild einer linearen Abbildung $f : V \to W$.

b) Wie ist das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbf{k}^{n \times n}$ definiert?

c) Wie lautet die Dimensionsformel für Unterräume U_1, U_2 eines Vektorraums V?

d) Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton?

Aufgabe 2 (4P): Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a)$ die Matrix

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 1 & -1 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a. Geben Sie für alle a mit Rang $A(a) = 3$ die inverse Matrix an.

Aufgabe 3 (4P): Die Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ mit

$$f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+y-z \\ 2y+z \\ x+2z \end{bmatrix}$$

ist linear (Dies ist nicht nachzurechnen). Sei φ die geordnete Basis (e_1, e_2, e_3).

a) Bestimmen Sie $M_\varphi(f)$.

b) Zeigen Sie, dass durch $\varphi_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\varphi_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ auch eine geordnete Basis $\varphi' = (\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3')$ gegeben wird und berechnen Sie $M_{\varphi'}(f)$.

Aufgabe 4 (6P): Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie χ_A, μ_A, die Eigenwerte und Basen der Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar oder wenigstens trigonalisierbar über $\mathbb{R}$? Berechnen Sie gegebenenfalls auch eine Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ Diagonal- oder Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 5 (4P): Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch. Begründen Sie Ihre Antwort ausreichend. (Durch Argumente und Zitate oder durch ein Gegenbeispiel.)

a) Sei $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$. Gibt es ein $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AB = E_n$ (=Einheitsmatrix), so ist $B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$.

b) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\chi_A = \chi_B$. Dann sind A und B ähnlich über $\mathbb{C}$.

c) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\chi_A = \chi_B$. Ferner habe χ_A n verschiedene Nullstellen. Dann sind A und B ähnlich über $\mathbb{C}$.

d) Sei $Q \in \mathbf{k}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad n und P ein normierter Teiler von Q. Dann gibt es eine Matrix $A \in \mathbf{k}^{n\times n}$ mit $\chi_A = Q$ und $\mu_A = P$.

Aufgabe 6 (4P): Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) 0 ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn A nicht invertierbar ist.

b) 0 ist einziger Eigenwert von A genau dann, wenn $A^n = 0$ ist.

c) Geben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit 0 als einzigem Eigenwert an, die nicht nilpotent ist.