Prof. K. Bongartz/
J. Bender
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Klausur zur Linearen Algebra I
17.02.06

Name	Vorname	Matrikelnummer	Übungsgruppe
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang	

In der ganzen Klausur sei k ein Körper. Alle Vektorräume sind endlichdimensional.

Aufgabe 1:

1. Wann heißt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal?
2. Wie ist der Begriff „Eigenwert" eines Endomorphismus $f : V \to V$ definiert?
3. Was besagt der Rangsatz?
4. Wie lautet der Satz von Cayley-Hamilton?

Aufgabe 2: Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix $A(a) = \begin{bmatrix} -1 & -a & 1 \\ 2 & a & -2 \\ 1 & 0 & a-a^2-1 \end{bmatrix}$. Bestimme den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a und für $\operatorname{Rang} A(a) = 3$ die inverse Matrix zu $A(a)$.

Aufgabe 3: Sei $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechne eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 4: Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechne χ_A, μ_A und Basen der Eigenräume. Ist A diagonalisierbar oder trigonalisierbar über $\mathbb{R}$? Gib gegebenenfalls eine invertierbare Matrix S an, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix oder obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 5: Begründe oder widerlege die folgenden Aussagen durch Zitate von Resultaten aus der Vorlesung:

1. Gilt für ein $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Beziehung $\overline{A}^T = A^2$, so ist A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.
2. Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, so daß die Potenzen $E_2 = A^0, A^1, A^2, A^3$ den Vektorraum $\mathbb{C}^{2\times 2}$ erzeugen.
3. Jedes normierte Polynom $P \in k[X]$ vom Grad n tritt als charakteristisches Polynom einer Matrix $A \in k^{n\times n}$ auf.
4. Falls das charakteristische Polynom χ_A von $A \in k^{n\times n}$ n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat, so ist $\mu_A = \chi_A$.

Aufgabe 6: Seien $A, B \in k^{n\times n}$.

1. Zeige, daß AB und BA ähnlich sind über k, falls A oder B invertierbar ist.
2. Gib Matrizen A, B an, wo AB und BA nicht ähnlich sind.
3. Ist 0 Eigenwert von AB, so auch von BA.
4. Stets haben AB und BA die gleichen Eigenwerte.