Prof. K. Bongartz/
J. Bender
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Klausur zur Linearen Algebra I
10.02.04

Name	Vorname	Matrikelnummer	Übungsgruppe
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang	

In der ganzen Klausur sei k ein Körper. Alle Vektorräume sind endlichdimensional.

Aufgabe 1:

1. Wie ist der Begriff „Eigenvektor“ eines Endomorphismus definiert?
2. Wann heißt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal?
3. Was besagt der Rangsatz?
4. Wie lautet der Satz von Cayley-Hamilton?

Aufgabe 2: Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix $A(a) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 \\ 2 & -2 & a \end{bmatrix}$. Bestimme den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a und für $\operatorname{Rang} A(a) = 3$ die inverse Matrix zu $A(a)$.

Aufgabe 3: Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar oder trigonalisierbar? Berechne χ_A, μ_A und alle Eigenräume.

Aufgabe 4: Sei $A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Gib eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren an.

Aufgabe 5: Begründe die folgenden Aussagen durch Zitate von Resultaten aus der Vorlesung oder widerlege sie durch ein Gegenbeispiel:

1. Jede Begleitmatrix $B(p) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.
2. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit gleichem Minimalpolynom. Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, so auch B.
3. Die Trigonalisierbarkeit über k einer Matrix $A \in k^{n\times n}$ läßt sich am charakteristischen Polynom erkennen.
4. Für $A, B \in k^{n\times n}$ gilt immer $\det_n(A+B) = \det_n A + \det_n B$.

Aufgabe 6: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\overline{A}^T = -A$. Dann gibt es eine ONB aus Eigenvektoren von A. Alle Eigenwerte von A sind rein imaginär (d.h. sie haben Realteil 0).