Prof.Dr. Diepenbrock
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
Bergische Universität Wuppertal
42097 Wuppertal
Email: Diepenbrock(at)math.uni-wuppertal.de
Tel. 0202 4392516 und 0202 425960

Stellungnahme zur Modelllösung der Stochastik-Aufgabe M LK HT 8 vom Zentralabitur NRW 2010 (Aufgabe zu einer Meinungsumfrage)

Hier wird eine Stellungnahme zu der Modelllösung der Stochastik-Aufgabe M LK HT 8 aus der zentralen Abiturprüfung 2010 in NRW gegeben. Der Wortlaut der Aufgabe und der Modellösung kann hier nicht wiedergegeben werden, weil das gegen das Urheberrecht des Schulministeriums NRW verstoßen würde. Dennoch wird wohl jeder, der auf der einen Seite als Schüler oder auf der anderen Seite als korrigierender Lehrer mit der Aufgabe zu tun hat, mit der Stellungnahme etwas anfangen können.

Kurzfassung der Stellungnahme: Die Modelllösung von Aufgabenteil b ist falsch. Als vermeintliches Konfidenzintervall wird ein Intervall ermittelt, das gar kein Konfidenzintervall ist. Der Mangel ist um so schwerwiegender, als es gerade bei der Schließenden Statistik auf ein korrektes Verständnis der Begriffe ankommt. Es stellt sich nicht nur die Frage, wie Lösungen von Schülern bewertet wurden, deren Lösung ebenso falsch wie die Modelllösung ist, sondern mehr noch die Frage, wie Lösungen von Schülern bewertet wurden, die tatsächlich ein Konfidenzintervall und nicht das vermeintliche Konfidenzintervall ermittelt haben.

Ausführliche Stellungnahme:

Es geht um den Aufgabenteil b der Leistungskursaufgabe M LK HT 8 (Aufgabe zu einer Meinungsumfrage). Da der Aufgabenteil b weitgehend identisch mit dem Aufgabenteil c der entsprechenden Grundkursaufgabe M GK HT 8 ist und auch die entsprechende Modellösung identisch ist, betrifft meine Kritik also ebenso den Teil c der Grundkursaufgabe. Die zusätzliche Frage, die bei der Grundkursaufgabe gestellt wird, wird analog zur fehlerhaften Bestimmung des vermeintlichen Konfidenzintervalls falsch beantwortet.

Die Aufgabenstellung in Aufgabenteil b der Leistungskursaufgabe M LK HT 8 erscheint als ungewöhnlich und etwas verwirrend. Denn der wahre relative Anteil der Optimisten in der Grundgesamtheit wird angegeben (nämlich 0.20), und dann soll merkwürdigerweise ein Konfidenzintervall bestimmt werden. Schließlich bestimmt man ein Konfidenzintervall, um einen unbekannten relativen Anteil in der Grundgesamtheit zu schätzen. Auch ist es merkwürdig, dass der zufällige relative Anteil der Optimisten in der Stichprobe mit p (nämlich p=0.22) bezeichnet wird, obwohl man mit p doch eher den relativen Anteil in der Grundgesamtheit bezeichnen würde. Welcher Gedankengang dem Aufgabensteller hierbei vermutlich zu Grunde lag, wird in erschreckender Weise klar, wenn man auf die Modelllösung blickt: Der Aufgabensteller, der hier einfach mal als identisch mit dem Verfasser der Musterlösung angenommen wird, berechnet ein vermeintliches Konfidenzintervall, das aber überhaupt gar kein Konfidenzintervall ist. Das wird hier näher erläutert:Bei einem Konfidenzintervall geht es darum, dass der unbekannte Wert des Parameters einer Wahrscheinlichkeitsverteilung durch ein Intervall geschätzt wird, das aus einer Zufallsstichprobe gebildet wird, und dessen Grenzen somit zufallsabhängig sind. Der Gedanke, dass der Wert des Parameters zwar unbekannt, aber nicht zufallsabhängig ist, und andererseits die Grenzen des Intervalls zufallsabhängig sind, ist für das Verständnis des Begriffs Konfidenzintervalls von entscheidender Wichtigkeit. Die Modelllösung zu Teil b lässt, wie im Folgenden ausgeführt wird, kein Verständnis des Begriffs erkennen.

Bei den in der Schule behandelten Konfidenzintervallen liegt das Intervall symmetrisch zu einem zufallsabhängigen arithmetischen Mittel oder einer zufallsabhängigen Summe oder einem zufallsabhängigen relativen Anteil [1], die jeweils als (Punkt-)Schätzungen für den unbekannten Wert des Parameters aufgefasst werden können. Die Mitte

[1] der übrigens auch als ein Mittelwert, nämlich als ein Mittelwert aus Nullen und Einsen aufgefasst werden kann

und die Grenzen des Intervalls sind also zufallsabhängig. Der unbekannte wahre Werte des Parameters liegt zufallsabhängig manchmal im Intervall (der erfreulichere Fall) und manchmal nicht im Intervall (der unerfreulichere Fall). Konkret zu Aufgabenteil b: Bei der Aufgabenstellung, ein Konfidenzintervall zu berechnen, müsste man um den zufallsabhängigen Wert 0.22 (also nicht um den Wert 0.20) herum in der aus dem Schulunterricht bekannten Art ein Konfidenzintervall bilden, dessen Grenzen natürlich auch zufallsabhängig sind. Das wird in der Modelllösung aber nicht getan. Stattdessen wird ein Intervall um den wahren Parameterwert 0.20 herum gebildet. Für dieses Vorgehen gibt es keinen vernünftigen Grund. Eine Erklärung dafür, dass der Verfasser der Modelllösung dies tut, könnte darin bestehen, dass ihm vielleicht unklar ist, was überhaupt ein Konfidenzintervall ist. Der Verfasser ermittelt ein Intervall, dessen Grenzen nicht zufallsabhängig sind. Unter der Annahme, dass der Parameter, um den es geht, gleich 0.20 ist, hat dieses Intervall (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit 95 Prozent, aber - um es mal ironisch zu formulieren - nicht jedes Intervall, das die Wahrscheinlichkeit 95 Prozent hat, ist ein Konfidenzintervall.

Also: das Konfidenzintervall wäre hier das Intervall von $0.22-1.96\cdot\frac{\sqrt{n\cdot 0.22\cdot(1-0.22)}}{n}$ bis $0.22+1.96\cdot\frac{\sqrt{n\cdot 0.22\cdot(1-0.22)}}{n}$, wobei n natürlich gleich 1268 ist. [2]

Die Breite des Intervalls unterscheidet sich natürlich nicht stark von der Breite des fälschlich in der Musterlösung berechneten Intervalls, die Lage ist aber hier symmetrisch um 0.22, während sie beim falschen Intervall symmetrisch um 0.2 ist. Entscheidend ist aber sowieso nicht die zahlenmäßige Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit, sondern die Tatsache, dass das Intervall aus der Modelllösung auf einem falschen Verständnis des Begriffs Konfidenzintervall beruht.

Bei der Schließenden Statistik ist es sehr wichtig, dass man die Bedeutung der Begriffe versteht. Es ist wichtig, dass in den Aufgaben auch in geeigneter Weise das Verständnis der Bedeutung der Begriffe geprüft wird. Deshalb ist es nicht akzeptabel, wenn im Zentralabitur den Lehrerinnen und Lehrern eine Modelllösung gegeben wird, die das Verständnis des Begriffs Konfidenzintervall vermissen lässt.

Es stellt sich die Frage: Wie wurde es bewertet, wenn ein Schüler dasselbe vermeintliche Konfidenzintervall ermittelt hat, wie es in der Musterlösung steht?

Und wie wurde es bewertet, wenn ein Schüler mit Verständnis dessen, was ein Konfidenzintervall ist, das Konfidenzintervall richtig ermittelt? Das ist die noch interessantere Frage.

Nur der Vollständigkeit halber folgen noch Bemerkungen zu Teil c und d von M LK HT 8:

Zu Teil c: Es ist etwas problematisch, wenn dem Schüler in Teil c unkritisch eine Vorgehensweise präsentiert wird, die man nicht gerade als ordentliche statistische Praxis bezeichnen kann. Nämlich es wird ja im Grund genommen ein extremer Punkt aus dem Konfidenzintervall als Punktschätzer verwendet. Zur Modelllösung von Teil c: Es wäre m.E. eine Bemerkung dazu angebracht, wie solche Schülerlösungen bewertet werden sollen, bei denen die vereinfachte Formel für das Konfidenzintervall hergeleitet bzw. verwendet wird, d.h. die Formel, bei der nur eine lineare Ungleichung betrachtet wird, weil einfach näherungsweise $\sqrt{p\cdot(1-p)}$ durch $\sqrt{\frac{X}{n}\cdot(1-\frac{X}{n})}$ ersetzt wird.

Zu Teil d: Es wäre m.E. sinnvoll, darauf hinzuweisen, wie eine Lösung bewertet werden soll, bei der der Differenzbetrag in Abhängigkeit von p angegeben wird, statt dass der konkrete Wert des Differenzbetrags für den ungünstigsten Fall (p=0.5) angegeben wird.

Schließlich könnte bei der Modelllösung von Teil a angegeben werden, wie die Lösung bewertet werden soll, wenn - anders als in der Modelllösung - bei der Normalverteilungsapproximation keine sogenannte Stetigkeitskorrektur angewandt wird (m.E. kein Punkteabzug sinnvoll, weil die Stetigkeitskorrektur nicht grundsätzlich immer bessere Ergebnisse bringt).

14.6.2010 14.6.2010 14.6.2010

[2] Hier wird die vereinfachte ungenauere Formel genommen und nicht die Formel, die auf der Auflösung einer quadratischen Ungleichung beruht. Selbstverständlich sollten vernünftigerweise beide unterschiedlich genauen Möglichkeiten als richtig anerkannt werden.