Lie-Algebren **WiSe 2015/16**
9. Übungsblatt **Dr. Thorsten Weist**
Abgabe bis Montag, 11.01.2016 **Dr. Magdalena Boos**
(in Vorlesung oder Übung)

Aufgabe 1. (6 Punkte) Wir fixieren die übliche Basis (x, y, h) von $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$. Es sei $m \in \mathbf{N}$ und $V(m)$ der aus der Vorlesung bekannte Vektorraum mit Basis $(v_0, ..., v_m)$. Wir definieren für $i \in \{0, ..., m\}$ und $v_{-1} = v_{m+1} := 0$

- $h.v_i := (m - 2i)v_i$
- $x.v_i := (m - i + 1)v_{i-1}$
- $y.v_i := (i + 1)v_{i+1}$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \to \mathfrak{gl}(V(m))$$

die durch lineare Fortsetzung (auf $V(m)$ und $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$) von $\rho(s)(v_i) := s.v_i$ für $s \in \{x, y, h\}$ und $i \in \{0, .., m\}$ definiert wird, ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Zerlegen Sie das Tensorprodukt der irreduziblen $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$-Moduln $V(3)$ und $V(7)$ in die direkte Summe irreduzibler Untermoduln.

(*Tipp:* $V(4) \oplus V(6) \oplus V(8) \oplus V(10)$)

Aufgabe 3. (6 Punkte) Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \neq 0$. Zeigen Sie

a) Der $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul $V(m)$ ist irreduzibel, wenn das Höchstgewicht m echt kleiner als p ist.

b) Gilt $m = p$, dann ist $V(m)$ reduzibel.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Berechnen Sie die Menge der Wurzeln von $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ bezüglich der Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ aller Diagonalmatrizen.