Lie-Algebren **WiSe 2015/16**
7. Übungsblatt **Dr. Thorsten Weist**
Abgabe bis Mittwoch, 14.12.2015 **Dr. Magdalena Boos**
(in Vorlesung oder Übung)

Aufgabe 1. (6 Punkte) Es sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach und V eine treue $\mathfrak{g}$-Darstellung via $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Zeigen Sie, dass das Casimir-Element C_ρ unabhängig von der Wahl der dualen Basen von $\mathfrak{g}$ ist.

Aufgabe 2. Es seien V und W $\mathfrak{g}$-Moduln. Dann ist auf natürliche Weise $V^* \otimes_K W$ ein $\mathfrak{g}$-Modul. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist ein $\mathfrak{g}$-Modul via
$$(g.f)(v) := g.(f(v)) - f(g.v)$$
für $g \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $v \in V$.

b) Es gibt einen $\mathfrak{g}$-Modul-Isomorphismus $V^* \otimes_K W \cong \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Aufgabe 3. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ für die $\mathrm{Rad}\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$ gilt, heißt ‘reduktiv’.

a) Nennen Sie drei reduktive Lie-Algebren.

b) Zeigen Sie, dass jede reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ als $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-Modul vollständig reduzibel ist. Folgern Sie, dass jede reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ die direkte Summe von $Z(\mathfrak{g})$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ist und dass $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach ist.

c) Zeigen Sie, dass jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die als $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-Modul vollständig reduzibel ist, auch reduktiv ist.

Aufgabe 4. Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra.

Zeigen Sie:

a) Der K-Vektorraum $(\mathfrak{g} \otimes_K \mathfrak{g})^*$ kann mit dem Raum aller Bilinearformen auf $\mathfrak{g}$ identifiziert werden.

b) Die adjungierte Darstellung induziert eine $\mathfrak{g}$-Operation auf $(\mathfrak{g} \otimes_K \mathfrak{g})^*$.

c) Eine Bilinearform β ist genau dann assoziativ, wenn $\mathfrak{g}.\beta = 0$.