Lie Algebren **WiSe 2015/16**
6. Übungsblatt **Dr. Thorsten Weist**
Abgabe bis Montag, 7.12.2015 **Dr. Magdalena Boos**
(in Vorlesung oder Übung)

Aufgabe 1. (6 Punkte) Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und

$$(*) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_k$$

eine Zerlegung in einfache Ideale. Für $x \in \mathfrak{g}$ sei $x = x_s + x_n$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung und $x = x_1 + ... + x_k$ die Zerlegung bezüglich der direkten Summe $(*)$.

Zeigen Sie, dass die Jordan-Chevalley-Zerlegung mit der Bildung der direkten Summe vertauscht, also:

a) $x_s = (x_1)_s + ... + (x_k)_s$

b) $x_n = (x_1)_n + ... + (x_k)_n$

Aufgabe 2. (6 Punkte) Es sei K ein Körper der Charakteristik $\mathrm{char}(K) = p \neq 0$ und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra darüber. Zeigen Sie:

a) Wenn die zugehörige Killingform nicht ausgeartet ist, dann ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

b) Die andere Richtung ist im Allgemeinen falsch: Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel. (*Tipp:* Zum Beispiel $p = 3$ und die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(K)$ modulo ihr Zentrum.)

Aufgabe 3. (6 Punkte) Es sei $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, das heißt V ist ein $\mathfrak{g}$-Modul. Zeigen Sie:

a) V ist genau dann irreduzibel, wenn gilt: für alle $v, w \neq 0$ in V lässt sich w als Linearkombination von Elementen der Form $\rho(x_1)...\rho(x_k)v$ mit $x_1, ..., x_k \in \mathfrak{g}$ schreiben.

b) V ist genau dann die direkte Summe von irreduziblen Untermoduln, wenn jeder $\mathfrak{g}$-Untermodul von V ein Komplement besitzt.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Ist eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auflösbar, dann ist jede irreduzible $\mathfrak{g}$-Darstellung V ein-dimensional, das heißt $\dim_K V = 1$.