Lie-Algebren **WiSe 2015/16**
4. Übungsblatt **Dr. Thorsten Weist**
Abgabe bis Montag, 23.11.2015 **Dr. Magdalena Boos**
(in Vorlesung oder Übung)

Aufgabe 1. (6 Punkte) Es seien V ein komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$.

Zeigen Sie:

a) Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, dann ist jedes Element in $\mathfrak{g}^1$ ad-nilpotent.

b) Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann auflösbar, wenn $\mathfrak{g}^1$ nilpotent ist.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Es sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ genau dann nilpotent ist, wenn jede zwei-dimensionale Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ abelsch ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Es sei $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein surjektiver Homomorphismus halbeinfacher Lie-Algebren. Die abstrakte Jordan-Chevalley-Zerlegung von $x \in \mathfrak{g}$ sei durch $x = x_s + x_n$ gegeben.

Zeigen Sie, dass $\varphi(x) = \varphi(x_s) + \varphi(x_n)$ die abstrakte Jordan-Chevalley-Zerlegung von $\varphi(x)$ in $\mathfrak{g}'$ ist.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$.

Zeigen Sie:

a) Das Radikal von $\mathfrak{g}$ ist in jeder maximal auflösbaren Unteralgebra $B \subset \mathfrak{g}$ enthalten.

b) $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \cap \mathfrak{d}_n(K)$

c) $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$. Beschreiben Sie das Radikal explizit.